Производная функции. Правила дифференцирования

Примеры решения задач

---

1. Пользуясь определением производной, найти производную функции $y = x^3$ в точке $x = 1$.

Решение. Находим приращение функции $y = x^3$ в точке $x = 1$:

$$\Delta y = (1 + \Delta x)^3 - 1 = 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Отсюда получаем $\Delta y/\Delta x = 3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2$ и, следовательно, $y'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x = 3$.

---

2. Сравнить на промежутке $0 \le t \le 1$ мгновенные и средние скорости двух точек, прямолинейные движения которых заданы уравнениями $s_1 = t^2$, $s^2 = 2t^4$ $(t > 0)$.

Решение. Находим мгновенные скорости точек в момент времени t: $v_1(t) = s'_1(t) = 2t$, $v^2(t) = s'_2(t) = 8t^3$. Отсюда получаем $v_1(0) = v_2(0)$; $v_1(1/2) = v_1(1/2)$; $v_1(t) > v_2(t)$ при $0 < t < 1/2$; $v_1(t) < v_2(t)$ при $t > 1/2$. Средняя скорость первой точки на отрезке времени $0 \le t \le 1$ равна $v_{1ср} = \dfrac{s_1(1) - s_1(0)}{1} = 1$. Аналогично, $v_{2ср} = \dfrac{s_2(1) - s_2(0)}{1} = 2$. Таким $v_{1ср} < v_{2ср}$.

---

3. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке с абсциссой $x = \pi/6$.

Решение. Имеем $x_0 = \pi/6$, $f(x_0) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $f'(x_0) = -\sin(\pi/6) = -1/2$. Поэтому искомое уравнение касательной запишется в виде

$$y - \sqrt{3}/2 = -1/2(x - \pi/6).$$

---

4. Найти односторонние производные функции $f(x) = |x - x_0|g(x)$ в точке x_0, где $g(x)$ – непрерывная в точке x_0 функция. Имеет ли функция $f(x)$ производную в точке x_0?

Решение. При $\Delta x > 0$ приращение функции в точке x_0 имеет вид

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |x_0 + \Delta x - x_0|\, g(x_0 + \Delta x) - 0 = g(x_0 + \Delta x)\Delta x,$$

откуда $\Delta y/\Delta x = g(x_0 + \Delta x)$. Так как $g(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \Delta y/\Delta x = g(x_0)$. Итак, $f'(x_0 + 0) = g(x_0)$.

Аналогично, при $\Delta x < 0$ получаем $\Delta y = -g(x_0 + \Delta x)\Delta x$, откуда

$$\lim_{\Delta x \to -0} \Delta y/\Delta x = \lim_{\Delta x \to -0} (-\,g(x_0 + \Delta x)) = -g(x_0).$$

т. е. $f'(x_0 - 0) = -g(x_0)$.

Если $g(x_0) \neq 0$, то $f'(x_0 + 0) \neq f'(x_0 - 0)$, и, значит, функция $f(x)$ не имеет производной в точке x_0. Если же $g(x_0) = 0$, то $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = 0$, и, следовательно, функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, причем $f'(x_0) = 0$.

---

5. Вычислить производную функции:

а) $y = \dfrac{x^2 \sin x}{\ln x}$ $(x > 0, x \neq 1)$; б) $y = \cos(2^x - x^3)$ $(-\infty < x < \infty)$.

Решение. а) Пользуясь правилами дифференцирования произведения и частного и таблицей производных, получаем

$$y'(x) = \frac{(x^2 \sin x)' \ln x - x^2 \sin x (\ln x)'}{\ln^2 x} =$$

$$= \frac{(x^2 \cos x + 2x \sin x) \ln x - x^2 \sin x \cdot 1/x}{\ln^2 x} =$$

$$= \frac{x(x \cos x + 2 \sin x) \ln x - x \sin x}{\ln^2 x} \quad (x > 0, x \neq 1).$$

б) Функцию $y = \cos(2^x - x^3)$ можно представить в виде $y = \cos t$, где $t = 2^x - x^3$. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, получаем

$$y'(x) = (\cos t)'|_{t = 2^x - x^3}(2^x - x^3)' = -\sin(2^x - x^3)(2^x \ln 2 - 3x^2) \quad (-\infty < x < \infty).$$

---

6. Найти производную $y'(x)$ функции

$$y = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

и исследовать, является ли $y'(x)$ непрерывной в точке $x = 0$.

Решение. При $x \neq 0$ производную $y'(x)$ можно найти дифференцированием функции $x^2 \sin(1/x)$ по правилу дифференцирования произведения. Это дает

$$y'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) \quad (x \neq 0).$$

Полученное выражение не определено при $x = 0$. Это не означает, однако, что $y'(0)$ не существует, поскольку выражение для $y'(x)$ и было получено при условии $x \neq 0$. Для нахождения $y'(0)$ воспользуемся определением производной. Приращение Δy функции $y(x)$ в точке $x = 0$ равно $(\Delta x)^2 \sin(1/\Delta x)$, поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \sin(1/\Delta x) = 0,$$

т. е. $y'(0) = 0$. Итак, $y'(x)$ существует во всех точках:

$$y'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

Для исследования непрерывности $y'(x)$ в точке $x = 0$ рассмотрим $\lim_{x \to 0} y'(x)$. Ясно, что $\lim_{x \to 0} 2x \sin(1/x) = 0$, а $\lim_{x \to 0} \cos(1/x)$ не существует. Поэтому и $\lim_{x \to 0} y'(x)$ не существует. Таким образом, $y'(x)$ разрывна в точке $x = 0$, которая является точкой разрыва II рода функции $y'(x)$.

---

7. Доказать, что уравнения $x = \cos t$, $y = \sin t$ $(0 \leq t \leq \pi)$ задают параметрически некоторую функцию $y = f(x)$. Найти производную $f'(x)$ этой функции.

Решение. Функция $x = \cos t$ является строго монотонной (убывающей) на отрезке $0 \leq t \leq \pi$ и, следовательно, имеет обратную. Подставляя эту обратную функцию в уравнение $y = \sin t$, получаем функцию вида $y = f(x)$. В данном случае обратная функция находится в явном виде: $t = \arccos x$, и поэтому для $f(x)$ получаем выражение $f(x) = \sin(\arccos x)$ $(-1 \leq x \leq 1)$.

Эту же функцию можно записать в виде $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 \leq x \leq 1)$ (объясните, почему). Вычислим производную $f'(x)$ двумя способами: а) используя явное выражение; б) используя формулу для производной функции, заданной параметрически. Имеем:

а) $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(-1 < x < 1)$;

б) $f'(x) = \dfrac{\cos t}{-\sin t}$ $(t \neq 0, t \neq \pi)$.

Так как $\cos t = x$, $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-x^2}$ при $0 \le t \le \pi$ то из второго выражения для $f'(x)$ получаем первое: $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ($x \ne \pm 1$ или $-1 < x < 1$).

---

8. Доказать, что если вектор-функции $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$ имеют производные, то для производной скалярного произведения $(\mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}_2(t))$ справедлива формула

$$(\mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}_2(t))' = (\mathbf{r}'_1(t)\mathbf{r}_2(t)) + (\mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}'_2(t)).$$

Решение. Пусть $\mathbf{r}_1(t) = x_1(t)\,\mathbf{i} + y_1(t)\,\mathbf{j} + z_1(t)\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2(t) = x_2(t)\,\mathbf{i} + y_2(t)\,\mathbf{j} + z_2(t)\,\mathbf{k}$. Тогда $(\mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}_2(t)) = x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t) + z_1(t)z_2(t)$. Воспользуемся тем, что если $\mathbf{r}_i(t)$ ($i = 1, 2$) имеет производную, то $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$ также имеют производные, причем $\mathbf{r}'_i(t) = x'_i(t)\,\mathbf{i} + y'_i(t)\,\mathbf{j} + z'_i(t)\,\mathbf{k}$ (см. упр. 25). Получаем

$(\mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}_2(t))' = x'_1(t)x_2(t) + x_1(t)x'_2(t) + y'_1(t)y_2(t) + y_1(t)y'_2(t) + z'_1(t)z_2(t) + z_1(t)z'_2(t) = \{x'_1(t)x_2(t) + y'_1(t)y_2(t) + z'_1(t)z_2(t)\} + \{x_1(t)x'_2(t) + y_1(t)y'_2(t) + z_1(t)z'_2(t)\} = (\mathbf{r}'_1(t)\mathbf{r}_2(t)) + (\mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}'_2(t))$.

Дифференциал функции

Примеры решения задач

---

1. Найти дифференциал функции $y = x^2 - x + 3$ в точке $x = 2$ двумя способами: а) выделяя линейную относительно Δx часть Δy; б) по формуле (2).

Решение. а) $\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = [(2 + \Delta x)^2 - (2 + \Delta x) + 3] - [2^2 - 2 + 3] = 3\Delta x + (\Delta x)^2$. Отсюда следует, что $dy = 3\Delta x$.

б) $f(x) = 2x - 1$, $f'(2) = 3$. Следовательно, по формуле (2) получаем $dy = 3dx = 3\Delta x$.

---

2. Найти дифференциал функции $y = \sin(x^2)$: а) в точке $x = x_0$; б) в точке $x = \sqrt{\pi}$; в) в точке $x = \sqrt{\pi}$ при $dx = -2$.

Решение. а) Согласно формуле (2) $dy|_{x = x_0} = f'(x_0)dx = \cos(x_0^2)\, 2x_0\, dx$.

б) Полагая в последнем равенстве $x = \sqrt{\pi}$, получаем $dy|_{x=\sqrt{\pi}} = -2\sqrt{\pi}\, dx$

в) Имеем $dy\Big|_{\substack{x=\sqrt{\pi}\\ dx=-2}} = 4\sqrt{\pi}$.

3. Заменяя приращение функции ее дифференциалом, найти приближенное значение: а) $\sqrt{0{,}98}$; б) sin 31°.

Решение. а) Рассмотрим функцию $y(x) = \sqrt{1+x}$. Так как $y(0) = 1$, $y(-0{,}02) = \sqrt{0{,}98}$, $y'(x) = 1/2(1+x)^{-1/2}$, $y'(0) = 1/2$, то по формуле (3) получаем

$$y(-0{,}02) \approx y(0) + y'(0)(-0{,}02) = 1 - 0{,}001 = 0{,}99$$

Итак, $\sqrt{0{,}98} \approx 0{,}99$

б) Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Так как $y(30°) = \sin 30° = 1/2$, $y'(30°) = \cos 30° = \sqrt{3}/2$, $1° = 2\pi/360$ (радиан) $\approx 0{,}0175$ (радиан), то по формуле (3), получаем

$$\sin 31° \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\pi}{360} \approx 0{,}5151.$$

Производные и дифференциалы высших порядков

Примеры решения задач

1. Найти $y^{(10)}$, если $y = x^2 e^{3x}$.

Решение. Данная функция является произведением двух функций: x^2 и e^{3x}. Применяя формулу Лейбница, получаем

$$(x^2e^{3x})^{(10)} = x^2(e^{3x})^{(10)} + C^1{}_{10}(x^2)'(e^{3x})^{(9)} + C^2{}_{10}(x^2)^{(2)}(e^{3x})^{(8)} + \ldots + (x^2)^{(10)}e^{3x}.$$

Так как $(x^2)^{(n)} = 0$ при $n \geq 3$, $(e^{3x})^{(k)} = e^{3x}3^k$, то

$$(x^2e^{3x})^{(10)} = x^2e^{3x}3^{10} + 10 \cdot 2xe^{3x}3^9 + 45 \cdot 2e^{3x}3^8 = 3^9(3x^2 + 20\,x + 30).$$

Рассмотренный пример показывает, что формулу Лейбница наиболее удобно применять в тех случаях, когда один из сомножителей является многочленом невысокой степени p. В этом случае все члены формулы Лейбница начиная с $(p + 2)$-го равны нулю.

2. Найти n-ю производную функции $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде $y = 1 + \frac{2}{x^2 - 1}$. Поэтому $y = 1^{(n)} + \left(\frac{2}{x^2-1}\right)^{(n)} = \left(\frac{2}{x^2-1}\right)^{(n)}$. В свою очередь $\frac{2}{x^2-1}$ можно разложить на простейшие дроби:

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

Следовательно,

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}.$$

Вычислим последовательно первую, вторую и третью производные функции $\frac{1}{x-1}$:

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)' = [(x-1)^{-1}]' = -1(x-1)^{-2},$$

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(2)} = (-1)(-2)(x-1)^{-3} = (-1)^2 \cdot 2!(x-1)^{-3},$$

$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(3)} = (-1)^2 2!(-3)(x-1)^{-4} = (-1)$<SUP3< sup>$\cdot\, 3!(x-1)^{-4}$.

Далее по индукции нетрудно доказать, что

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = (-1)^n n!(x-1)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

Аналогично,

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

Итак,

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

3. Функция $y = f(x)$ задана параметрически уравнениями $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 < t < \pi$. Найти $f''(x)$.

Решение. Выведем формулу для второй производной функции $y = f(x)$, заданной параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, считая, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дважды дифференцируемы и $\varphi'(t) \neq 0$.

В силу инвариантности формы первого дифференциала $df'(x) = f''(x)dx$, откуда $f''(x) = \dfrac{df'(x)}{dx}$. Так как $f'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, то $df'(x) = \left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)' dt$. Учитывая, что $dx = \varphi'(t)$dt, получаем

$$f''(x) = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)' \frac{1}{\varphi'(t)}\Bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\psi'^3(t)}\Bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \qquad (3)$$

Положив в этой формуле $\psi = a\sin t$, $\varphi = a\cos t$, $\varphi^{-1}(x) = \arccos(x/a)$, получим

$$f''(x) = -\frac{1}{a\sin^3 t}\Bigg|_{t=\arccos(x/a)} = -\frac{1}{a(1 - x^2/a^2)^{3/2}} = -\frac{a^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}.$$

В данном примере можно найти явное выражение для $f(x)$: $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ $(-a < x < x)$. Вычисляя $f''(x)$, получим, разумеется, то же самое выражение, что и по формуле (3).

---

4. Движение точки в пространстве задано уравнениями $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = ht^2/2$, $t \geq 0$. Найти модули векторов скорости и ускорения в момент $t = 1$.

Решение. С помощью вектор-функции движение можно задать уравнением

$$\mathbf{r} = R\cos t \cdot \mathbf{i} + R\sin t \cdot \mathbf{j} + ht^2/2 \cdot \mathbf{k},\ t \geq 0.$$

Дифференцируя, находим

$$\mathbf{r}'(t) = -R\sin t \cdot \mathbf{i} + R\cos t \cdot \mathbf{j} + ht \cdot \mathbf{k} \text{ (скорость)},$$

$$\mathbf{r}''(t) = -R\cos t \cdot \mathbf{i} + -R\sin t \cdot \mathbf{j} + h \cdot \mathbf{k} \text{ (ускорение)}.$$

Отсюда получаем $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{R^2 + h^2t^2}$, $|\mathbf{r}'(1)| = \sqrt{R^2 + h^2}$, $|\mathbf{r}''(t)| = \sqrt{R^2 + h^2}$ (абсолютная величина ускорения является постоянной).

---

5. Найти второй дифференциал функции $y = \cos 2x$, если: а) x − независимая переменная; б) $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ − дважды дифференцируемая функция независимой переменной t.

Решение. а) $d^2y = y''(x)(dx)^2 = -4\cos 2x(dx)^2$;

б) $d^2y = y''(x)(dx)^2 + y'(x)d^2x = -4\cos(2\varphi(t))(\varphi'(t)dt)^2 - 2\sin(2\varphi(t))\varphi''(t)(dt)^2 = -2[2\cos(2\varphi(t))\varphi'^2(t) + \sin(2\varphi(t))\varphi''(t)](dt)^2$.