

## ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1.  $(const)' = 0$ ;

### степенные функции

2.  $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ ;

2a.  $(x)' = 1$ ;

2b.  $(u^2)' = 2 \cdot u \cdot u'$ ;

2c.  $(\frac{1}{u})' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$ ;

2e.  $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u}} \cdot u'$ ;

$(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}})$

### показательные функции

3.  $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ ;

3a.  $(e^u)' = e^u \cdot u'$ ;

### логарифмические функции

4.  $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$ ;

4a.  $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ ;

$(\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b; \ln a^n = n \ln a)$

### тригонометрические функции

5.  $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ ;

6.  $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ ;

7.  $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ ;

8.  $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$ ;

### обратные тригонометрические функции

9.  $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ ;

10.  $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ ;

11.  $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ ;

12.  $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ ;

### гиперболические функции

13.  $(shu)' = chu \cdot u'$ ;

14.  $(chu)' = shu \cdot u'$ ;

15.  $(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$ ;

16.  $(cth u)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'$ ;

### показательно – степенные функции

17.  $(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$ .

### модуль функции

18.  $|u|' = \operatorname{sgn} u \cdot u'$ , ( $|u| = \operatorname{sgn} u \cdot u$ ),

где  $\operatorname{sgn} u = \begin{cases} 1, u > 0 \\ -1, u < 0; \\ 0, u = 0. \end{cases}$  – функция знак  $u$

(сигнум  $u$ ).

### Правила дифференцирования

1.  $(cu)' = c \cdot u'$ ;

1a.  $(\frac{u}{c})' = \frac{1}{c} \cdot u'$ ;

2.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ;

3.  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ ;

4.  $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ ;

### 5. сложная функция

$(F(u(x)))' = F'_u \cdot u'_x$ ;

### 6. параметрически заданная функция

$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ ;

### 7. неявно заданная функция

$y = y(x)$  уравнением

$F(x, y) = 0$ ;  $\Rightarrow$  чтобы найти производную неявно заданной функции, нужно продифференцировать обе части уравнения  $F(x, y) = 0$ , считая  $y$  функцией от  $x$  и применяя правило 5 дифференцирования сложной функции;

### 8. логарифмическое дифференцирование

$y = f(x) \Rightarrow \ln y = \ln f(x)$ ;

$\frac{1}{y} \cdot y' = (\ln f(x))'$ .

**ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ** ( $u = u(x)$ )

1.  $\int 0 du = c;$

**степенные функции**

2.  $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + c; m \neq -1;$

3.  $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c;$

$(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}})$

**показательные функции**

4.  $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c;$

4a.  $\int e^u du = e^u + c;$

**дробные рациональные и  
иррациональные функции**

5.  $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c;$

6.  $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c;$

7.  $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + c;$

8.  $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + c;$

**тригонометрические функции**

9.  $\int \sin u du = -\cos u + c;$

10.  $\int \cos u du = \sin u + c;$

11.  $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c;$

12.  $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + c;$

**гиперболические функции**

13.  $\int sh u du = ch u + c;$

14.  $\int ch u du = sh u + c;$

15.  $\int \frac{du}{ch^2 u} = th u + c;$

16.  $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cth u + c;$

$\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

**Непосредственное интегрирование**

$du = u'_x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u'};$

$u = ax + b \Rightarrow dx = \frac{d(ax + b)}{a};$

$\int \frac{1}{(ax + b)^m} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{1-m}}{1-m} + c;$

$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax + b| + c;$

$u = (ax^3 + b) \Rightarrow dx = \frac{d(ax^3 + b)}{3ax^2}$

$\int x^2 \cos(ax^3 + b) dx = \frac{1}{3a} \sin(ax^3 + b) + c;$

$u = mx \Rightarrow dx = \frac{d(mx)}{m}$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (mx)^2}} = \frac{1}{m} \operatorname{arcsin} \frac{mx}{a} + c;$

**основные свойства неопределенного  
интеграла**

1.  $\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx;$

2.  $\int \alpha u dx = \alpha \int u dx;$

3.  $d \int u(x) dx = u(x) dx;$

4.  $\int du = u + c;$

**замена переменной**

$u = u(t) \Leftrightarrow du = u'_t dt;$

$\int f(u) du = \int f(u(t)) u'_t dt;$

**интегрирование по частям**

$\int u dv = uv - \int v du.$

## ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

### Теоремы Роля, Лагранжа, Коши

Теорема	Если	то
Ролля	$f(x)$ : 1. непрерывна на отрезке $[a, b]$ ; 2. дифференцируема на интервале $(a, b)$ ; 3. принимает равные значения на концах отрезка, то есть $f(a) = f(b)$ ,	существует хотя бы одна точка $\xi$ , $a < \xi < b$ , что $f'(\xi) = 0$
Лагранжа	$f(x)$ : 1. непрерывна на отрезке $[a, b]$ ; 2. дифференцируема на интервале $(a, b)$ ,	существует хотя бы одна точка $\xi$ , $a < \xi < b$ , что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$
Коши	$f(x)$ и $g(x)$ : 1. непрерывны на отрезке $[a, b]$ ; 2. дифференцируемы на интервале $(a, b)$ ; 3. $g'(x) \neq 0$ во всех точках интервала $(a, b)$ ,	существует хотя бы одна точка $\xi$ , $a < \xi < b$ , что $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

### Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталья

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

№ п/п	Вид неопределенности	Преобразования	Результат преобразований ( $c, d - \text{const} \neq 0$ )
1	$\{0 \cdot \infty\}$	$f(x) \cdot h(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{h(x)}} = \frac{h(x)}{\frac{1}{f(x)}}$	$\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ или $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ – применить правило Лопиталья
2	$\{\infty - \infty\}$	2.1 . дроби привести к общему знаменателю; 2.2 . умножить и разделить разность функций на сопряженное выражение, если это разность квадратных корней; 2.3 . умножить и разделить разность функций на неполный квадрат суммы этих функций, если это разность корней кубических; 2.4 . $f(x) - h(x) = \frac{\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot h(x)}}$	$\left\{ \frac{c}{0} \right\} = \infty$ ; $\left\{ \frac{c}{\infty} \right\} = 0$ ; $\left\{ \frac{0}{c} \right\} = 0$ ; $\left\{ \frac{\infty}{c} \right\} = \infty$ ; $\left\{ \frac{c}{d} \right\} = A$ $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ или $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ – применить правило Лопиталья
3	$\{1^\infty\}$ , $\{0^0\}$ , $\{\infty^0\}$ .	3.1. $y = u^v \Rightarrow \ln y = v \ln u$ ; $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} y = e^A$ . 3.2. $y = u^v = e^{v \cdot \ln u}$	См. выше

## Исследования функции без применения производных

№ п/п	Цель исследования	Действия	Вывод
1	Найти область определения функции	Найти точки, в которых функция не определена или не задана (точки разрыва графика функции)	Исключить найденные точки из области определения функции
2	Найти вертикальные асимптоты	Вычислить односторонние пределы функции в точках разрыва и в точках, «подозрительных» на разрыв для кусочно-аналитической функции	Если хотя бы один из односторонних пределов в исследуемой точке равен бесконечности, то график функции имеет вертикальную асимптоту: $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \infty \Rightarrow x = a$ – вертикальная асимптота
3	Исследовать функцию на четность и нечетность	Если $f(-x) = f(x)$ , то функция четная.  Если $f(-x) = -f(x)$ , то функция нечетная	Ограничиться исследованием функции на интервале $(0, \infty)$ . График четной функции симметричен относительно оси $OY$ , график нечетной функции симметричен относительно начала координат
4	Исследовать функцию на периодичность	$T$ – период функции – (наименьшее из всех возможных значений, удовлетворяющих уравнению: $f(x + T) = f(x)$ )	Ограничиться исследованием на интервале, по длине равном периоду $T$ , за пределы интервала продолжить график функции периодическим образом
5	Найти точки пересечения с осями координат	Решив уравнение $y = f(x) = 0$ , найти $x_0 : f(x_0) = 0$ . Найти $y(0) = y_0$	Точка пересечения графика с осью $OX$ : $(x_0, 0)$ . Точка пересечения графика с осью $OY$ : $(0, y_0)$
6	Найти наклонные, в частности, горизонтальные асимптоты	Вычислить пределы $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$	Если $k$ и $b$ – конечные числа, то уравнение наклонных асимптот $y = kx + b$ , причем, при $k = 0$ асимптота горизонтальная $y = b$

## Исследования функции с применением производных

№ п/п	Цель исследования	Действия и вывод																											
1	Найти интервалы монотонности и точки локальных экстремумов функции	<p>1.1.1. Найти критические точки первого порядка <math>x_i, i = 1, 2, \dots, n</math> :  <math>y'(x_i) = 0</math> или <math>y'(x_i) = \infty</math>, или <math>y'(x_i)</math> – не существует  <b>(необходимое условие существования экстремума функции в точке);</b></p> <p>1.2.1. Применить <b>первое достаточное</b> условие существования экстремума функции в критической точке:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%; text-align: center;"><math>x</math></td> <td style="width: 25%; text-align: center;"><math>x &lt; x_1</math></td> <td style="width: 25%; text-align: center;"><math>x_1</math></td> <td style="width: 35%; text-align: center;"><math>x &gt; x_x</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>y'</math></td> <td style="text-align: center;">—</td> <td style="text-align: center;">Критическая точка первого порядка</td> <td style="text-align: center;">+</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>y</math></td> <td style="text-align: center;">Функция убывает</td> <td style="text-align: center;"><math>(x_1, y(x_1))</math> – точка минимума</td> <td style="text-align: center;">Функция возрастает</td> </tr> </table> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%; text-align: center;"><math>x</math></td> <td style="width: 25%; text-align: center;"><math>x &lt; x_2</math></td> <td style="width: 25%; text-align: center;"><math>x_2</math></td> <td style="width: 35%; text-align: center;"><math>x &gt; x_2</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>y'</math></td> <td style="text-align: center;">+</td> <td style="text-align: center;">Критическая точка первого порядка</td> <td style="text-align: center;">—</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>y</math></td> <td style="text-align: center;">Функция возрастает</td> <td style="text-align: center;"><math>(x_2, y(x_2))</math> – точка максимума</td> <td style="text-align: center;">Функция убывает</td> </tr> </table> <p>1.2.2. Если <math>x_3</math> и <math>x_4</math> – стационарные точки (все производные до <math>(2k-1)</math> порядка равны нулю), можно применить <b>второе достаточное</b> условие существования экстремума функции в точке:  <math>y^{(2k)}(x_3) &gt; 0 \Rightarrow (x_3, y(x_3))</math> – точка локального минимума;  <math>y^{(2k)}(x_4) &lt; 0 \Rightarrow (x_4, y(x_4))</math> – точка локального максимума;  <math>y^{(2k)}(x_5) = 0, y^{(2k+1)} \neq 0</math> – в точке <math>(x_5, y(x_5))</math> экстремума нет.</p>				$x$	$x < x_1$	$x_1$	$x > x_x$	$y'$	—	Критическая точка первого порядка	+	$y$	Функция убывает	$(x_1, y(x_1))$ – точка минимума	Функция возрастает	$x$	$x < x_2$	$x_2$	$x > x_2$	$y'$	+	Критическая точка первого порядка	—	$y$	Функция возрастает	$(x_2, y(x_2))$ – точка максимума	Функция убывает
$x$	$x < x_1$	$x_1$	$x > x_x$																										
$y'$	—	Критическая точка первого порядка	+																										
$y$	Функция убывает	$(x_1, y(x_1))$ – точка минимума	Функция возрастает																										
$x$	$x < x_2$	$x_2$	$x > x_2$																										
$y'$	+	Критическая точка первого порядка	—																										
$y$	Функция возрастает	$(x_2, y(x_2))$ – точка максимума	Функция убывает																										
2	Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба	<p>2.1. Найти критические точки второго порядка <math>x_j, j = 1, 2, \dots, m</math> :  <math>y''(x_j) = 0</math> или <math>y''(x_j) = \infty</math>, или <math>y''(x_j)</math> – не существует  <b>(необходимое условие существования точки перегиба графика);</b></p> <p>2.2. Применить <b>достаточные</b> условия выпуклости и вогнутости графика и существования точек перегиба:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%; text-align: center;"><math>x</math></td> <td style="width: 25%; text-align: center;"><math>x &lt; x_6</math></td> <td style="width: 25%; text-align: center;"><math>x_6</math></td> <td style="width: 35%; text-align: center;"><math>x &gt; x_6</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>y''</math></td> <td style="text-align: center;">+</td> <td style="text-align: center;">Критическая точка второго порядка, точка непрерывности</td> <td style="text-align: center;">—</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>y</math></td> <td style="text-align: center;">График функции вогнутый</td> <td style="text-align: center;"><math>(x_6, y(x_6))</math> – точка перегиба</td> <td style="text-align: center;">График функции выпуклый</td> </tr> </table>				$x$	$x < x_6$	$x_6$	$x > x_6$	$y''$	+	Критическая точка второго порядка, точка непрерывности	—	$y$	График функции вогнутый	$(x_6, y(x_6))$ – точка перегиба	График функции выпуклый												
$x$	$x < x_6$	$x_6$	$x > x_6$																										
$y''$	+	Критическая точка второго порядка, точка непрерывности	—																										
$y$	График функции вогнутый	$(x_6, y(x_6))$ – точка перегиба	График функции выпуклый																										

