Ответы и указания к упражнениям для самостоятельной работы

---

1. а) $\Delta y = \arcsin\left(\frac{1}{2} + \Delta x\right) - \frac{\pi}{6}, \ -\frac{3}{2} \leqslant \Delta x \leqslant \frac{1}{2}$; в) $\Delta y = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{2}\right)$, $-2 < \Delta x < +\infty$.

2. а) 1; б) $2x_0$; в) $y'(4) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4+\Delta x} - \sqrt{4}}{\Delta x} = \frac{1}{4}$; г) 0; д) 1/2.

3. а) $f'(a)$; б) $2f'(a)$; в) $-2f'(a)$; г) $\frac{1}{2}k(k+1)f'(a)$.

4. а) $v_1 > v_2$ при $0 \le t < 1/2$, $v_1 = v_2$ при $t = 1/2$, $v_1 < v_2$ при $t > 1/2$; на [0, 1] $v_{1ср} = v_{2ср} = 1$, на [1, 2] $v_{1ср} = 1 < 3 = v_{2ср}$;
б) $v_1 = v_2 = 0$ при $t = 0$, $v_1 > v_2$ при $0 < t < 2/3$, $v_1 = v_2 = 4/3$ при $t = 2/3$, $v_1 < v_2$ при $t > 2/3$; на [0, 1] $v_{1ср} = v_{2ср} = 1$, на [1, 2] $v_{1ср} = 3 < 7 = v_{2ср}$;
в) $v_1 > v_2$ при $1 \le t < 4$, $v_1 = v_2 = 1/4$ при $t = 4$, $v_1 < v_2$ при $t > 4$; на [1, 4] $v_{1ср} = (1/3)\ln 4 > 1/3 = v_{2ср}$, на [1, 25] $v_{1ср} = (1/24)\ln 25 < 1/6 = v_{2ср}$.

5. а) $y = x$; б) $y = 2x - 1$; в) $x = 0$; г) $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

6. а) $\left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\left(\frac{1}{e-1}, \frac{e}{e-1}\right)$; в) $\left(\frac{6-\sqrt{3}\pi}{6(2-\sqrt{3})}, \frac{6-\sqrt{3}\pi}{6(2-\sqrt{3})}\right)$.

7. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}x + 1$.

8. а) $f'(+0) = 1, f'(-0) = -1$;
б) $f'(1+0) = f'(1-0) = f'(1) = 1$;
в) $f'(+0) = f'(-0) = f'(0) = 0$;
г) $f'(+0) = 1, f'(-0) = -1$;
д) $f'(+0) = f'(-0) = f'(0) = 0$;
е) $f'(\pi/2 + 0) = f'(\pi/2 - 0) = f'(\pi/2) = 0$;
ж) $f'(1+0) = e, f'(1-0) = -e$.

9. а) $2x$; б) $\frac{1}{2\sqrt{x}} \ (x > 0)$; в) $-\frac{1}{x^2} \ (x \neq 0)$;
г) $\frac{4}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{2x\sqrt{x}} \ (x > 0)$;
д) $\frac{1}{x}\frac{\ln 108}{\ln 2 \ln 3} \ (x > 0), y'(1) = \frac{\ln 108}{\ln 2 \ln 3}$;
ж) $\cos x + \sin x$, $y'(0) = 1$, $y'(\pi/4) = \sqrt{2}$–;
з) $1/(\sin^2 \cos x)$ ($x \neq \pi n/2$, $n \in \mathbf{Z}$);
и) 0 ($\arcsin x + \arccos x = \pi/2 = \text{const}$);
к) 0 ($\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2 = \text{const}$).

10. *Указание*: Представьте $[u(x)]^{v(x)}$ в виде $e^{v(x)\ln u(x)}$ и воспользуйтесь формулой для производной сложной функции.

11. а) $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$; $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$(x < -a, x > a)$; $\dfrac{5x^2+3}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$;

б) $\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$(x > 0)$ $-\sin x \sin(2\cos x) - \cos x \sin(2\sin x)$;

в) $\cos[\sin(\sin x)]\cos(\sin x)\cos x$; $\dfrac{4\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x)}{(1-\operatorname{tg}^2 x)^2}\left(x \neq \dfrac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z}\right)$;
$2^{\cos x+\operatorname{tg} x}\ln 2\left(-\sin x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\ \left(x \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ n \in \mathbf{Z}\right)$;

г) $e^x(\sin x + \cos x)$; $2e^{x^2}(x\cos 2x - \sin 2x)$; $e^x\left[e^{e^x}+x^{e^x}\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)\right]$$(x > 0)$;

д) $x^x(\ln x + 1)$ $(x > 0)$; $\dfrac{1}{x\ln x[\ln(\ln x)]}$$(x > e)$; $\dfrac{1}{x^2-a^2}$$(x < -a, x > a)$;

е) $1/x$ $(x \neq 0)$; $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$; $\operatorname{ctg} x$ $(2\pi n < x < \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z})$;

ж) $1/x \cos(\ln x)$ $(x > 0)$; $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$x $(-a < x < a)$; $\dfrac{1}{x^2+a^2}$;

з) $\dfrac{1}{1+x^2}$$(x \neq 1)$; $\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}-\operatorname{arctg} x=\begin{cases}\pi/4 & \text{при } x<1,\\ -3\pi/4 & \text{при } x>1;\end{cases}$

и) $\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$(x < -1, x > 1)$ $\operatorname{sgn}\cos x$ $(x \neq \pi/2 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z})$; 1 $(x \neq \pi/2 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z})$;
к) 1 $(-1 < x < 1)$; 1;

л) $\dfrac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}$$(x > -a)$; $\sqrt{a^2-x^2}$$(-a < x < a)$;

м) $-\dfrac{\arccos x}{x^2}$ $(0 < |x| < 1)$; $\dfrac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$$(x > 1)$;

н) $\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$(-1 < x < 1)$; $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

о) $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$; $(\sin x)^{\cos x-1}(\cos^2 x - \sin^2 x \ln \sin x)$ $(2\pi n < x < \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z})$; $\dfrac{\operatorname{ch}(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}$ $(x \neq \pi/2 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z})$; $-\dfrac{\sin x}{\operatorname{ch}^2(\cos x)}$;
п) $\operatorname{cth} x$ $(x > 0)$; $\operatorname{th} x/\ln 10$; $1/\operatorname{ch} 2x$; $-1/\operatorname{sh} x$ $(x > 0)$.

12. а) $\dfrac{\varphi\varphi'+\psi\psi'}{\sqrt{\varphi^2+\psi^2}}$ $(\varphi^2+\psi^2 \neq 0)$; б) $\dfrac{\psi'\varphi\ln\varphi-\varphi'\psi\ln\psi}{\varphi\psi\ln^2\varphi}$; в) $2xf'(x^2)-\dfrac{2}{x^3}f'(x^{-2})$; $(x \neq 0)$; г) $f'(f(x))f'(x)$.

13. а) $\dfrac{f(0)+f'(0)}{f'(0)}$; б) $f(0)/f'(0)$.

14. а) $e^{f'(a)/f(a)}$; б) $e^{2\sqrt{a}f'(a)/f(a)}$.

15. а) $a^n f'(a) - na^{n-1}f(a)$; б) $g(a)f(a) - f(a)g'(a)$; в) $[(\ln a)f'(a) - (1/a)f(a)]/g'(a)$.

18. а) Нет, $(uv)'\big|_{x=0} = 0$; б) да, $(uv)'\big|_{x=0} = 1/2$; в) да, $(uv)'\big|_{x=0} = \cos 1$; г) нет, $(uv)'\big|_{x=0} = 0$; д) нет, $(uv)'\big|_{x=0} = 0$; е) нет, $(uv)'\big|_{x=0} = 0$; ж) нет, $(uv)'\big|_{x=0} = 0$.

19. I. а) Да; б) нет. II. а) Нет; б) нет.

20. а) В точках x таких, что $f(x) = 0$ и $f'(x) \neq 0$; б) в точках x таких, что $f(x) = g(x)$ и $f'(x) \neq g'(x)$; в) в точках x таких, что $f(x) = \max\limits_{[a,x)} f(t)$ и $f'(x) \neq 0$.

21. Нет.

22. *Указание*: Для $P_n(x)$ рассмотрите $(x + x^2 + \ldots + x^n)'$.

23. а) $-\infty < t < \infty$, $f'(x) = 2t/1\big|_{t=x} = 2x$, $f(x) = x^2$ $(-\infty < x < \infty)$;

б) $0 \le t \le \pi/2$, $f'(x) = (\sin^2 t)'/(\cos^2 t)'\Big|_{\substack{t=\arccos\sqrt{x} \\ t\neq 0,\, t\neq\pi/2}} = -1$ $(0 < x < 1)$, $f(x) = 1 - x$ $(0 \le x \le 1)$;

в) $0 \le t \le \pi$, $f'(x) = \dfrac{b\cos t}{-a\sin t}\Big|_{\substack{t=\arccos(x/a) \\ t\neq 0,\, t\neq\pi}} = -\dfrac{b}{a}\dfrac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\Big|_{\substack{\cos t = x/a \\ t\neq 0,\, t\neq\pi}} = -\dfrac{b}{a}\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(-a < x < a)$, $f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ $(-a \le x \le a)$; касательная: $x = a$, нормаль: $y = 0$;

г) $0 \le t \le \infty$, $f'(x) = \dfrac{b\,\mathrm{ch}\,t}{a\,\mathrm{sh}\,t}\Big|_{0<t<\infty} = \dfrac{b}{a}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(x > a)$, $f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ $(x \geqslant a)$ $(x \ge a)$; касательная: $x = a$, нормаль: $y = 0$;

е) $-\infty < t < \infty$, $f'(x) = \dfrac{2e^{2t}}{e^t}\Big|_{t=\ln x} = 2x$ $(0 < x < \infty)$.

27. а) $|v| = \sqrt{18}$, $\cos X = \cos Y = 1/\sqrt{18}$, $\cos Z = 4/\sqrt{18}$;
б) $|v| = \sqrt{R^2 + h^2}$, $\cos X = 0$, $\cos Y = -R\sqrt{R^2 + h^2}$, $\cos Z = h/\sqrt{R^2 + h^2}$;
в) $|v| = \sqrt{14}$, $\cos X = 1/\sqrt{14}$, $\cos Y = 2/\sqrt{14}$, $\cos Z = 3/\sqrt{14}$; г) $|v| = 2{,}9$, $\cos X = 2/29$, $\cos Y = 25/29$, $\cos Z = 10\sqrt{2}/29$.

28. а) $\Delta y = \Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x$, где $\alpha(\Delta x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\Delta x} - 1 - \Delta x}{\Delta x} & \text{при } \Delta x \neq 0, \\ 0 \text{ при } \Delta x = 0; \end{cases}$ б) $\Delta y = \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $\alpha(\Delta x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi/2 + \Delta x) - 1)}{\Delta x} & \text{при } \Delta x \neq 0, \\ 0 \text{ при } \Delta x = 0; \end{cases}$

в) $\Delta y = \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $\alpha(\Delta x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{arctg}\,\Delta x - \Delta x}{\Delta x} & \text{при } \Delta x \neq 0, \\ 0 \text{ при } \Delta x = 0. \end{cases}$

29. $\Delta y = \Delta x + 2(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; $dy = 1$; а) $\Delta y = 0{,}010201$, $dy = 0{,}01$;
б) $\Delta y = 0{,}121$, $dy = 0{,}1$; в) $\Delta y = 4$, $dy = 1$; г) $\Delta y = 48$, $dy = 3$.

30. $\Delta s = 5\Delta t + 2\Delta t^2$, $ds = 5\Delta t$; а) $\Delta s = 0{,}52$, $ds = 0{,}5$; б) $\Delta s = 1{,}08$, $ds = 1$; в) $\Delta s = 7$, $ds = 5$.

31. а) $\frac{dx}{2\sqrt{x}}(x > 0)$; б) $-\frac{dx}{x^2}(x \neq 0)$; в) $\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; г) $\frac{dx}{x^2-1}(x \neq \pm 1)$; д) $\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(-a < x < a)$; е) $\frac{dx}{x^2+a^2}$; ж) $(1 + 2x)e^{2x}dx$; з) $x \cos x\, dx$.

32. а) $dy\big|_{x=0} = dx$, $dy\big|_{x=1} = dx$;
б) $dy\big|_{x=0} = dx$, $dy\big|_{x=1} = 1/2dx$;
в) $dy\big|_{x=0} = dx$, $dy\big|_{x=1} = e\, dx$;
г) $dy\big|_{x=0} = \pi/2dx$, $dy\big|_{x=1} = 0$;
д) $dy\big|_{x=0} = 0$, $dy\big|_{x=1} = -\pi/2dx$.

34. Равенства б) и в).

35. а) -0,8747; б) 0,5121 рад, или 29°20'; в) 1,04; г) 1,0033; д) 0,83 рад, или 47°33'; е) 1,2.

36. а) 2,08; б) 3,9961; в) 2,0045.

37. $f'(a)/2$.

38. а) $(12x - 8x^3)e^{-x2}$; б) $-a^{10}\sin ax$; в) k^4e^{kx}; г) $12xf''(x^2) + 8x^3f'''(x^2)$;
д) $e^xf'(e^x) + e^{2x}f''(e^x)$; е) $\varphi'''(x)f'(\varphi(x)) + 3\varphi'(x)\varphi''(x)f''(\varphi(x)) + \varphi'3(x)f'''(\varphi(x))$;
ж) $-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 17}{2^{10}x^9\sqrt{x}}$ $(x > 0)$; з) $\frac{720}{(x-1)^7}(x \neq 1)$; и) $2^{20}(x^2\sin 2x - 20x\cos 2x - 95\sin 2x)$;
к) $5^{14}(5x^3 - 126x)\sin 5x - 3\cdot 5^{13}(75x^2 - 182)\cos 5x$; л) $-\frac{2\cdot 8!}{(x+1)^9}(x \neq -1)$;
м) $\frac{1}{2}\cdot 30! \times \left[\frac{1}{(x-1)^{31}} + \frac{1}{(x+1)^{31}}\right](x \neq \pm 1)$; н) $5^{10}(5x + 11)e^{5x}$; о) $-\frac{9!}{x^{10}}(x > 0)$;

39. а) $\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!(a/2)^n}{(ax+b)^{(2n-1)/2}}$ $(ax + b > 0)$;
б) $\frac{(-1)^{n-1}(ad-bc)c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}n!$ $(cx + d \neq 0)$;
в) $-2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$;
г) $2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$;
д) $\frac{3}{4}\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)$;
е) $\frac{3}{4}\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3^n}{4}\cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)$;
ж) $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^n \times \cos\left[(\alpha-\beta)x + n\frac{\pi}{2}\right] - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^n\cos\left[(\alpha+\beta)x + n\frac{\pi}{2}\right]$;
з) $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^n \times \cos\left[(\alpha-\beta)x + n\frac{\pi}{2}\right] + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^n\cos\left[(\alpha+\beta)x + n\frac{\pi}{2}\right]$;
и) $a^{n-1}\left[ax\sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right) + n\sin\left(ax + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right]$;
к)

$$a^{n-2}\left[a^2x^2\cos\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right)+2nax\cos\left(ax+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)+n(n-1)\cos\left(ax+(n-2)\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
;

л) $k^{n-2}e^{kx}[(ax^2+bx+c)k^2+(2ax+b)nk+n(n-1)a]$;

м) $(-1)^{n-1}a^n(n-1)!\left[\frac{1}{(ax+b)^n}-\frac{1}{(ax-b)^n}\right]\left(\frac{ax+b}{ax-b}>0\right)$;

н) x ch $x+n$ sh x, если n нечетное, x sh $x+n$ ch x, если n четное;

о) x^2 sh $x+2nx$ ch $x+n(n-1)$ sh x, если n нечетное, x^2 ch $x+2nx$ sh $x+n(n-1)$ ch x, если n четное;

п) $a_0n!$.

41. а) $f''(x)=2; f'''(x)=0$; б) $f''(x)=f'''(x)=0$;

в) $f''(x)=-\frac{ab}{(a^2-x^2)^{3/2}}$; $f'''(x)=-\frac{3abx}{(a^2-x^2)^{5/2}}$;

г) $f''(x)=-\frac{ab}{(x^2-a^2)^{3/2}}$; $f'''(x)=\frac{3abx}{(x^2-a^2)^{5/2}}$;

д) $f''(x)=-\frac{1}{4a\sin^4(t/2)}$; $f'''(x)=\frac{\cos(t/2)}{4a^2\sin^7(t/2)}$, где $t=\varphi^{-1}(x)$ − обратная функция к функции $x=a(t-\sin t)$ $(t\neq 2\pi n,\ n\in \mathbf{Z})$

е) $f''(x)=2; f'''(x)=0$.

42. $(f^{-1}(y))'=\frac{1}{f'(x)}$, $(f^{-1}(y))''=-\frac{f''(x)}{f'^3(x)}$, $(f^{-1}(y))'''=\frac{3f''^2(x)-f'(x)f'''(x)}{f'^5(x)}$.

43. а) $|\mathbf{r}''(2)|=2$, $\cos X\cos Y=0$, $\cos Z=1$;

б) $|\mathbf{r}''(p)|=1$, $\cos X=1$, $\cos Y=\cos Z=0$;

в) $|\mathbf{r}''(1)|=2\surd1-0-$, $\cos X=0$, $\cos Y=1/\surd1-0-$, $\cos Z=3/\surd1-0-$;

г) $|\mathbf{r}''(2{,}5)|=\surd6-4-1-/25$, $\cos X=-4/\surd6-4-1-$, $\cos Y=25/\surd6-4-1-$, $\cos Z=0$.

44. а) $6dx^3$; б) $\frac{-15dx^4}{16(x-1)^{7/2}}(x>1$; в) $-\frac{6dx^5}{x^4}(x>0)$; г) $(10\cos x-x\sin x)dx^{10}$.

45. а) ch $x\,dx^n$, если n нечетное; sh xdx^n, если n четное;

б) $a^n sh(ax)dx^n$, если n нечетное; $a^n ch(ax)dx^n$, если n четное;

в) $(-1)^{n-1}2\cdot(n-3)!\frac{dx^n}{x^{n-2}}(x>0,\ n\geq 3)$.

47. $\varphi(x_0)\cdot n!$.