Производная функции в точке

1.1. **Определение приращения аргумента** Δx	Приращением аргумента Δx функции $y = f(x)$ называется разность между значением аргумента в точке $x = x_0$ и любой другой точке из некоторой окрестности точки $x_0 : \Delta x = x - x_0, x \in U_\delta(x_0)$.
1.2. **Определение приращения** Δy **функции** $y = f(x)$	Приращением Δy функции $y = f(x)$, соответствующим приращению аргумента Δx в точке $x = x_0$ называется разность между значением функции в точке $x = x_0 + \Delta x$ и в точке $x = x_0 : \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
1.3. **Определение производной функции** $y = f(x)$ **в точке** $x = x_0$	Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$. Предел отношения приращения Δy функции в этой точке (если он существует) к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$, называется производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$. Обозначается производная $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ одним из следующих способов: $f'(x_0)$, или $y'(x_0)$, или $\frac{df(x_0)}{dx}$, $f'\Big\|_{x=x_0}$. Таким образом, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

$\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$			
1	$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	**6**	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$
2	$\mathrm{tg}\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$	**6a**	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
3	$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	**7**	$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$
4	$\mathrm{arctg}\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$	**7a**	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
5	$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$	**8**	$(1+\alpha(x))^\mu - 1 \sim \mu\, \alpha(x)$

Дифференциал функции в точке

6.1. **Определение дифференцируемой в точке функции**	Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Если приращение Δy функции $y = f(x)$ можно представить в виде $$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$ где A – постоянное число в точке x_0 ; $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$, то функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 .

6.2.

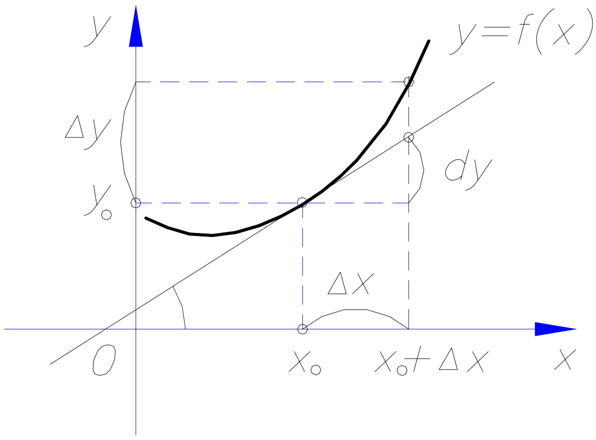
Определение дифференциала функции	Главная часть приращения Δy дифференцируемой в точке x_0 функции $y = f(x)$, то есть $$A \cdot \Delta x$$ называется дифференциалом функции в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)$: $$dy = df(x_0) = A \cdot \Delta x.$$ Замечание. Если $y = x$, то $dy = dx = \Delta x$.

6.3.

Теорема о связи функции, имеющей производную, и дифференцируемой в точке	Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$, при этом $A = f'(x_0)$. Следовательно, $$dy = df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx.$$

6.4.

Геометрический смысл дифференциала	Дифференциал функции в точке x_0 равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в этой точке, соответствующему приращению аргумента Δx



Теорема о непрерывности дифференцируемой функции	Если функция дифференцируема в точке x_0, то она и непрерывна в этой точке.

Уравнения касательной и нормали к графику функции

2.1.

Определение касательной к графику функции	Касательной к графику функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ называют предельное положение секущей, соединяющей точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ графика, при стремлении точки M к точке M_0 по графику.

2.2.

Геометрический смысл производной

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла, образованного касательной к графику функции в этой точке и положительным направлением оси Ox:

$y'(x_0) = tg\alpha$,

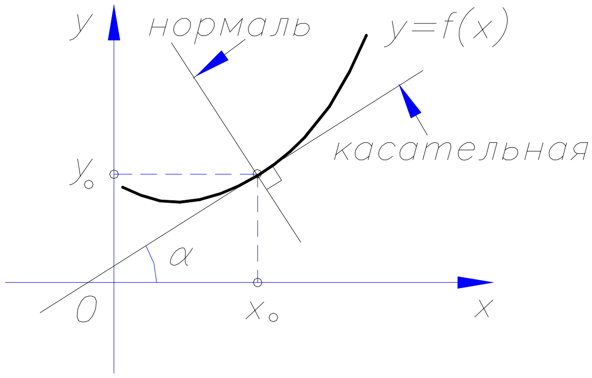
где α - угол между касательной к графику функции в точке x_0 и положительным направлением оси Ox.

2.3.

Уравнение касательной

Пусть функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную $y'(x_0) = tg\alpha$. Тогда в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует касательная к графику этой функции, уравнение которой:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$



2.4.

Определение нормали

Прямая линия, проходящая через точку касания, перпендикулярно касательной, называется нормалью к кривой.

2.5.

Уравнение нормали

Пусть функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную $y'(x_0) = tg\alpha$. Тогда в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует нормаль к графику этой функции, уравнение которой:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Если $f'(x_0) = 0$ (то есть касательная горизонтальна), то нормаль вертикальна и имеет уравнение $x = x_0$.

2.6.

Угол между линиями в точке их пересечения

Пусть даны две пересекающиеся в точке $M_0(x_0, y_0)$ кривые $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем обе функции имеют производные в точке x_0. Тогда углом между этими кривыми называется угол между касательными к ним, проведенными в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Этот угол φ можно найти из формулы:

$$tg\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}.$$

Основные правила дифференцирования функций

Основные правила дифференцирования функций	Пусть c – константа, а $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в некоторой точке x. Тогда функции $u(x) \pm v(x)$, $c \cdot u(x)$, $u(x) \cdot v(x)$ и $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (где $v(x) \neq 0$) также имеют производные в этой точке, причем 1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ - производная **суммы** функций равна сумме производных этих функций; 2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ - производная **произведения** функций равна сумме произведений производной первой функции на вторую и первой функции на производную второй; 3. $(cu)' = cu'$, $(\dfrac{u}{c})' = \dfrac{1}{c} \cdot u'$ - **постоянный множитель** выносят за знак производной; 4. $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ - производная отношения двух функций (**частного**) равна отношению разности произведений производной числителя на знаменатель и числителя на производную знаменателя к квадрату знаменателя; 5. пусть функция $y = F(u)$ имеет производную в точке u_0, а функция $u = \varphi(x)$ - в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда **сложная** функция $y = F(u(x))$ также имеет производную в точке x_0, причем $y'(x_0) = F'_u(u_0) \cdot u'_x(x_0)$ - производная сложной функции равна производной этой функции по промежуточному аргументу *u,* умноженной на производную от промежуточного аргумента *u* по основному аргументу *x*.

Производная обратной функции

Теорема о производной обратной функции	Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой точке, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем $\dfrac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}$.

Производная параметрически заданной функции

Теорема о производной параметрически заданной функции	Если функция $y = f(x)$ задана параметрически дифференцируемыми в точке t_0 функциями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, причем одна из них, например, $x(t)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки t_0 и $x'(t_0) \neq 0$. Тогда $y'_x(x_0) = \dfrac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$.

Производные и дифференциалы высших порядков

5.1.

Определение производной второго порядка	Производная от функции $f^{/}(x)$ (производной первого порядка) называется производной второго порядка от функции $f(x)$ (или второй производной) и обозначается $f^{//}(x)$.

5.2.

$$y^{/} = (\ln\sin\frac{x}{4})^{/} = \frac{1}{\sin\frac{x}{4}}\cos\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}ctg\frac{x}{4};$$

$$y^{//} = (\frac{1}{4}ctg\frac{x}{4})^{/} = -\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{4}}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{16\sin^2\frac{x}{4}}$$

5.3.

Определение производной ***n*– го порядка**	Производная от функции $f^{(n-1)}(x)$ (производной эн-минус первого порядка) называется производной энного порядка от функции $f(x)$ (или энной производной) и обозначается $f^{(n)}(x)$.

5.4. $y^{(5)} = (3^{4x})^{(5)} = 4^5(\ln 3)^5 3^{4x}$, поскольку при каждом последовательном дифференцировании добавляется сомножитель $4\ln 3$.

5.5.

Производная высших порядков параметрически заданной функции	Производная второго порядка функции, заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} y = y(t); \\ x = x(t) \end{cases}$, может быть найдена по формуле: $y_{xx}^{//} = \dfrac{(y_x^{/})_t^{/}}{x_t^{/}}$, а производная энного порядка – по формуле: $y_x^{(n)} = \dfrac{(y_x^{(n-1)})_t^{/}}{x_t^{/}}$.

5.6. Найдем сначала производную первого порядка функции $\begin{cases} y = 3t^2; \\ x = 4t \end{cases}$.

$$y_x^{/} = \frac{y_t^{/}}{x_t^{/}} = \frac{6t}{4} = \frac{3}{2}t.$$

Производная второго порядка данной функции равна $y_{xx}^{//} = \dfrac{(\frac{3}{2}t)_t^{/}}{(4t)_t^{/}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{4} = \dfrac{3}{8}$.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $(const)' = 0;$

степенные функции

2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;

2a. $(x)' = 1;$

2b. $(u^2)' = 2 \cdot u \cdot u'$;

2c. $(\frac{1}{u})' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$;

2e. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u}} \cdot u'$;

$(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \quad \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}})$

показательные функции

3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;

3a. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

логарифмические функции

4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;

4a. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;

$(\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b; \quad \ln a^n = n \ln a)$

тригонометрические функции

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

7. $(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

8. $(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

обратные тригонометрические функции

9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11. $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

12. $(arcctg\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

гиперболические функции

13. $(sh\, u)' = ch\, u \cdot u'$;

14. $(ch\, u)' = sh\, u \cdot u'$;

15. $(th\, u)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$;

16. $(cth\, u)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'$;

показательно – степенные функции

17. $(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$.

модуль функции

18. $|u|' = \text{sgn}\, u \cdot u'$, $(|u| = \text{sgn}\, u \cdot u)$,

где $\text{sgn}\, u = \begin{cases} 1, u > 0 \\ -1, u < 0; \\ 0, u = 0. \end{cases}$ – функция знак u

(сигнум u).

Правила дифференцирования

1. $(cu)' = c \cdot u'$;

1a. $(\frac{u}{c})' = \frac{1}{c} \cdot u'$;

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$;

5. сложная функция

$(F(u(x)))' = F'_u \cdot u'_x$;

6. параметрически заданная функция

$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \; y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$;

7. ***неявно заданная функция*** $y = y(x)$ уравнением $F(x, y) = 0; \Rightarrow$ чтобы найти производную неявно заданной функции, нужно продифференцировать обе части уравнения $F(x, y) = 0,$ считая y функцией от x и применяя правило 5 дифференцирования сложной функции;

8. ***логарифмическое дифференцирование***

$y = f(x) \Rightarrow \ln y = \ln f(x);$

$\frac{1}{y} \cdot y' = (\ln f(x))'$.