Производная функции. Правила дифференцирования

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Запишите выражение для $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$ и найдите область определения функции Δy, если:
а) $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = 1/2$; б) $f(x) = \arccos x$, $x_0 = 0$;
в) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 2$; г) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 2\pi$.

2. Пользуясь определением производной, найдите производную функции:
а) $y = x$ в точке $x = 1$; б) $y = x^2$ в точке $x = x_0$;
в) $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 4$; г) $y = x|x|$ в точке $x = 0$;
д) $f(x) = \begin{cases} (1 - \cos x)/x & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$.

3. Функция $y = f(x)$ имеет производную в точке a. Вычислите пределы последовательностей:
а) $\lim\limits_{n\to\infty} n(f(a + 1/n) - f(a))$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} n(f(a) - f(a - 2/n))$;
в) $\lim\limits_{n\to\infty} n(f(a - 1/n) - f(a + 1/n))$;
г) $\lim\limits_{n\to\infty} n(f(a + 1/n) + f(a + 2/n) + \ldots + f(a + k/n) - kf(a))$.

4. Уравнения прямолинейного движения двух точек имеют вид: а) $s_1 = t$, $s_2 = t^2$ $(t \geq 0)$; б) $s_1 = t^2$, $s_2 = t^3$ $(t \geq 0)$; в) $s_1 = \ln t$, $s_2 = \sqrt{t}$ $(t \geq 1)$ (t – время, s_1 и s_2 – расстояния, пройденные первой и второй точками за время t). Сравните мгновенные скорости этих двух точек, а также их средние скорости на отрезках времени $0 \leq t \leq 1$ и $1 \leq t \leq 2$ для случаев а) и б) и на отрезках $1 \leq t \leq 4$ и $1 \leq t \leq 25$ для случая в).

5. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:
а) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$;
в) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$; г) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$.

6. Найдите точку пересечения касательных к графику функции $y = f(x)$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, если:
а) $f(x) = \cos x$, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/2$; б) $f(x) = e^x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; в) $f(x) = \arcsin x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$.

7. Составьте уравнения касательных к графику функции $y = \sqrt{x}$ проходящих через точку (2, 3/2).

8. Найдите односторонние производные $f'(x_0 + 0)$ и $f'(x_0 - 0)$ и сравните их, если:
а) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = |x|$, $x_0 = 1$;
в) $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$, $x_0 = 0$; г) $f(x) = \sqrt{\sin^2 x}$, $x_0 = 0$;
д) $f(x) = |x| \sin x$, $x_0 = 0$; е) $f(x) = |x - \pi/2| \cos x$, $x_0 = \pi/2$;
ж) $f(x) = |x - 1| e^x$, $x_0 = 1$.
Существует ли в каждом случае производная $f'(x_0)$?

9. Найдите $y'(x)$, если:
а) $y = x^2$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = 1/x$; г) $y = 2\sqrt[3]{x^2} - 3/\sqrt{x}$;
д) $y = \log_2 \mathrm{bg}2\, x^3 + \log_3 x^2$ (вычислите $y'(1)$); е) $y = 2^x + (1/2)^x$;
ж) $y = \sin x - \cos x$ (вычислите $y'(0)$ и $y'(\pi/4)$); з) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$;
и) $y = \arcsin x + \arccos x$ (объясните полученный результат);
к) $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$ (объясните полученный результат).

10. Докажите, что если $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x и $u(x) > 0$, то функция $[u(x)]^{v(x)}$ также имеет производную в точке x, причем

$$[u(x)^{v(x)}]' = v(x)u(x)^{v(x)-1} + u(x)^{v(x)} \ln u(x) v'(x).$$

11. Найдите $y'(x)$, если (везде $a > 0$):
а) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $y = \sqrt{x^2 - a^2}$, $y = x\sqrt[3]{x^2+1}$;
б) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, $y = \sin^2(\cos x) + \cos^2(\sin x)$;
в) $y = \sin[\sin(\sin x)]$, $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}$, $y = 2^{\cos x + \operatorname{tg} x}$;
г) $y = e^x \sin x)$, $y = e^{x2} \cos 2x$, $y = e^{ex} + x^{ex}$;
д) $y = x^x$, $y = \ln [\ln (\ln x)]$, $y = \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{x-a}{x+a}$;
е) $y = \ln |x|$, $y = \ln (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$, $y = \ln \sin x$;
ж) $y = \sin (\ln x)$, $y = \arcsin (x/a)$, $y = 1/a \operatorname{arctg} (x/a)$;
з) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1+x}{1-x}$ (сравните с производной функции $y = \operatorname{arctg} x$ и объясните результат);
и) $y = \arccos (l/x)$, $y = \arcsin (\sin x)$, $y = \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x)$;
к) $y = \sin (\arcsin x)$, $y = \operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} x)$;
л) $y = \ln \dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \dfrac{a}{b} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{b}$, $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a}$;
м) $y = \dfrac{\arccos x}{x} + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}$, $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$;

н) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$, $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)$;
о) $y = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, $y = (\sin x)^{\cos x}$, $y = \operatorname{sh}(\operatorname{tg} x)$, $y = \operatorname{th}(\cos x)$;
п) $y = \ln(\operatorname{sh} x)$, $y = \lg(\operatorname{ch} x)$, $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$, $y = \ln(\operatorname{cth}(x/2))$.

12. Известно, что $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$ имеют производные. Найдите $y'(x)$, если:
а) $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$;
б) $y = \log_{\varphi(x)}\psi(x)$ ($\varphi(x) > 0$, $\varphi(x) \neq 1$, $\psi(x) > 0$);
в) $y = f(x^2) + f(x^{-2})$; г) $y = f(f(x))$.

13. Функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = 0$ производную, отличную от нуля. Вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)e^x - f(0)}{f(x)\cos x - f(0)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\sin x}{f(x)\operatorname{ch} x - f(0)}$.

14. Функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x = a$. Вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(a+x)}{f(a)}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{f(a)}\right)^{1/(\sqrt{x}-\sqrt{a})}$ ($a > 0$).

15. Функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в точке a. Вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x-a}$ ($n \in \mathbf{N}$); б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a}$; в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)\ln a - f(a)\ln x}{g(x) - g(a)}$ ($a > 0$, $g'(a) \neq 0$).

16. Докажите (методом математической индукции), что если $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ имеют производные в точке x, то сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$ и произведение $f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)$ также имеют производные в точке x, причем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right)' = \sum_{i=1}^{n} f'_i(x),\quad (f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x))' = \sum_{i=1}^{n} f_1(x)\ldots f'_i(x)\ldots f_n(x).$$

17. Докажите, что имеет место следующее правило дифференцирования определителей n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & \dots & f_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{k1}(x) & \dots & f'_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

18. Можно ли применить правило дифференцирования произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$ в точке x_0, если:
а) $u(x) = x$, $v(x) = |x|$, $x_0 = 0$;
б) $u(x) = x$, $v(x) = |x|$, $x_0 = 1$;
в) $u(x) = \sin x$, $v(x) = \operatorname{sgn} x$, $x_0 = 1$;
г) $u(x) = x^2$, $v(x) = \operatorname{sgn} x$, $x_0 = 0$;

д) $u(x) = x^3$, $v(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$;

е) $u(x) = [x]$, $v(x) = \sin^2(\pi x)$, $x_0 = n \in \boldsymbol{Z}$;
ж) $u(x) = x - [x]$, $v(x) = \sin^2(\pi x)$, $x_0 = n \in \boldsymbol{Z}$?
Существует ли в каждом случае производная произведения $u(x)v(x)$ в точке x_0?

19. Справедливы ли следующие утверждения?
I. Если $u(x)$ имеет производную в точке x_0, а $v(x)$ не имеет производной в точке x_0, то:
а) $u(x) + v(x)$ не имеет производной в точке x_0;
б) $u(x)v(x)$ не имеет производной в точке x_0.
II. Если $u(x)$ и $v(x)$ не имеют производных в точке x_0, то:
а) $u(x) + v(x)$ не имеет производной в точке x_0;
б) $u(x)v(x)$ не имеет производной в точке x_0.
(Если утверждение не справедливо, то приведите соответствующий пример.)

20. Функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные во всех точках $x \in \boldsymbol{R}$. В каких точках не имеет производной функция:

а) $|f(x)|$; б) $\max(f(x), g(x))$; в) $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant x} f(t)$?

21. Справедливо ли утверждение: если $f(x) < g(x)$, то $f'(x) < g'(x)$?

22. Выведите формулы для сумм
$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$,
$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$,
$R_n = x + 3x^3 + 5x^5 + \ldots + (2n+1)x^{2n+1}$,

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k \cos kx$.

23. Изобразите траекторию точки, движение которой на плоскости (x, y) задается уравнениями:
а) $x = t$, $y = t$, $-\infty < t < \infty$;

б) $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, $0 \le t < \infty$;
в) $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \le t < \infty$;
г) $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$, $-\infty < t < \infty$;
д) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $-\infty < t < \infty$;
е) $x = e^t$, $y = e^{2t}$, $-\infty < t < \infty$.
В каждом из случаев укажите такой промежуток изменения параметра t, на котором уравнения определяют функцию $y = f(x)$, и найдите производную этой функции по формуле (4). В случаях а), б), в), г), е) выразите $f(x)$ в явном виде и сравните явное выражение для $f'(x)$ с выражением, полученным по формуле (4). В случаях в) и г) составьте уравнения касательной и нормали к кривой в точке $t = 0$.

24. Пусть $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_2\,\mathbf{k}$ − постоянный вектор. Докажите утверждение: для того чтобы $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a_1$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = a_2$, $\lim\limits_{t \to t_0} z(t) = a_3$.

25. Пользуясь результатом предыдущей задачи, докажите утверждение: для того чтобы вектор-функция $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ имела производную $\mathbf{r}'(t)$ в точке t, необходимо и достаточно, чтобы скалярные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имели производные в точке t. При этом $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}$.

26. Докажите, что для вектор-функций имеют место следующие правила дифференцирования:

$$(\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}'_1(t) + \mathbf{r}'_2(t),$$

$$(f(t)\mathbf{r}(t))' = f'(t)\mathbf{r}(t) + f(t)\mathbf{r}'(t),$$

$$[\mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}_2(t)]' = [\mathbf{r}'_1(t)\mathbf{r}_2(t)] + [\mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}'_2(t)],$$

где $[\mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}_2(t)]$ − векторное произведение векторов $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$.

27. Движение точки в пространстве задается уравнениями:
а) $x = t$, $y = t$, $z = t^2$, $t \ge 0$;
б) $x = R \cos t$ $y = R \sin t$, $z = ht$, $t \ge 0$, $R > 0$, $h > 0$ (винтовая линия);
в) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $t \ge 0$;
г) $x = \ln t$, $y = t^2/2$, $z = \sqrt{2}\,t$, $t \ge 1$.
Найдите модуль и направляющие косинусы вектора скорости в момент времени: а) $t = 2$; б) $t = \pi$; в) $t = 1$; г) $t = 2{,}5$.

Дифференциал функции

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

28. Представьте в виде (1) приращение функции:
а) $y = e^x$ в точке $x = 0$; б) $y = \sin x$ в точке $x = \pi/2$;
в) $y = \operatorname{arctg} x$ в точке $x = 0$.
Запишите выражение для функции $\alpha(\Delta x)$.

29. Найдите приращение и дифференциал функции $y = x^3 - x^2 + 1$ в точке $x = 1$ и вычислите их значения при:
а) $\Delta x = 0{,}01$; б) $\Delta x = 0{,}1$; в) $\Delta x = 1$; г) $\Delta x = 3$.

30. Прямолинейное движение точки задано уравнением $s = 2t^2 + t + 1$, где t выражается в секундах, а s – в метрах. Найдите приращение и дифференциал пути s в момент времени $t = 1$ с и сравните их при:
а) $\Delta t = 0{,}1$ с; б) $\Delta t = 0{,}2$ с; в) $\Delta t = 1$ с.

31. Найдите дифференциал функции y в точке x, если:
а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = 1/x$; в) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$; г) $y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$;
д) $y = \arcsin (x/a)$; е) $y = 1/a \operatorname{arctg} (x/a)$; ж) $y = xe^{2x}$; з) $y = x \sin x + \cos x$.

32. Найдите $dy|_{x=0}$ и $dy|_{x=1}$, если:
а) $y = x^3/3 - x^2/2 + x$; б) $y = \ln (1 + x)$; в) $y = e^x$
г) $y = \sin (\pi x/2)$; д) $y = \cos(\pi x/2)$.

33. Постройте график функции $y = \ln (1 + x)$ и изобразите на графике dy при: а) $x = 0$, $dx = 1$; б) $x = 1$, $dx = 1$; в) $x = 1$, $dx = 2$.

34. Пусть $y = \sin t$, где $x = \cos t$. Какие из следующих равенств справедливы:
а) $dy|_{t=\pi/2} = 0$; б) $dy|_{t=\pi/2} = dx$; в) $dy|_{t=\pi/2} = -dt$?

35. Используя формулу (3) и выбирая подходящее значение x_0, найдите приближенные значения:
а) $\cos 151°$; б) $\arcsin 0{,}49$; в) $\lg 11$; г) $\sqrt[3]{1{,}01}$; д) $\operatorname{arctg} 1{,}1$; е) $e^{0{,}2}$.

36. Докажите приближенную формулу (для малых x)

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a > 0).$$

С помощью этой формулы найдите приближенные значения:
а) $\sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[4]{255}$; в) $\sqrt[7]{130}$.

37. Функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x = a$. Вычислите предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(a+\frac{1}{n^2}\right)+f\left(a+\frac{2}{n^2}\right)+\ldots+f\left(a+\frac{n}{n^2}\right)-nf(a)\right).$$

Производные и дифференциалы высших порядков

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

38. Найдите производные указанного порядка:
а) $(e^{-x^2})^{(3)}$; б) $(\sin ax)^{(10)}$; в) $(e^{kx})^{(4)}$; г) $(f(x^2))^{(3)}$;
д) $(f(e^x))^{(2)}$; е) $(f(\varphi(x)))^{(3)}$; ж) $(\sqrt{x})^{(10)}$; з) $\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)^{(6)}$;
и) $(x^2 \sin 2x)^{(20)}$; к) $(x^3 \cos 5x)^{(15)}$; л) $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{(8)}$;
м) $\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)^{(30)}$; н) $(x e^{5x})^{(11)}$; о) $(\ln 3x)^{(10)}$.

39. Найдите $y^{(n)}$ если:
а) $y = \sqrt{ax+b}$; б) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; в) $y = \sin^2 x$;
г) $y = \cos^2 x$; д) $y = \sin^3 x$; е) $y = \cos^3 x$;
ж) $y = \sin \alpha x \sin \beta x$; з) $y = \cos \alpha x \cos \beta x$ и) $y = x \sin ax$;
к) $y = x^2 \cos ax$; л) $y = (ax^2 + bx + c)e^{kx}$;
м) $y = \ln \dfrac{ax+b}{ax-b}$; н) $y = x \operatorname{sh} x$; о) $y = x^2 \operatorname{ch} x$;
п) $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ (a_i − числа).

40. Методом математической индукции докажите равенства:
а) $(e^x \sin x)^{(n)} = 2^{n/2} e^x \sin(x + n\pi/4)$;
б) $(x^n \ln x)^{(n)} = n!\,(\ln x + 1 + 1/2 + \ldots + 1/n)$;
в) $(x^{n-1} e^{1/x})^{(n)} = (-1)^n e^{1/x}/x^{n+1}$.

41. Для функций из упр. 23, заданных параметрически, найдите $f''(x)$ и $f'''(x)$.

42. Выразите производные обратной функции $x = f^{-1}(y)$ до третьего порядка включительно через производные функции $y = f(x)$.

43. Движение точки в пространстве задается уравнениями из упр. 27. Найдите модуль и направляющие косинусы вектора ускорения в указанные моменты времени.

44. Найдите дифференциалы указанного порядка, если x − независимая переменная:
а) $d^3(x^3)$; б) $d^4(\sqrt{x-1})$; в) $d^5(x \ln x)$; г) $d^{10}(x \sin x)$.

45. Найдите $d^n y$, если:
а) $y = \operatorname{sh} x$; б) $y = \operatorname{ch}(ax)$; в) $y = x^2 \ln x$.

46. В каждом из следующих случаев проверьте, что функция $y(x)$ удовлетворяет соответствующему уравнению (C_i − произвольные числа):
а) $y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$, $y'' + k^2 y = 0$;
б) $y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$, $y'' - k^2 y = 0$;
в) $y = e^{-\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, $y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2)y = 0$;
г) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 e^x + C_4 e^{-x}$, $y^{(4)} - y = 0$.

47. Найдите $f^{(n)}(x_0)$, если $f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную $(n - 1)$-го порядка в точке x_0.

48. Докажите, что функция

д) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$

бесконечно дифференцируема в точке $x = 0$.