Памяти моего
Учителя
Николая Карловича
Эрделя

ПРЕДИСЛОВИЕ

1. Надводную часть "айсберга" математического знания принято делить на три части. Первая из них – главное в математике, доставшейся нам от античности и средневековья, изучается в довузовской математике. Вторую часть – высшую математику, созданную в основном за последние 200–300 лет, изучают будущие бакалавры, инженеры и магистры. Третья часть, разделённая на специальные дисциплины, основы которых преподаются на математических факультетах, составляет фундамент бурно растущего дерева современной математики. Чётких границ между этими тремя частями математики нет, более того, вузовская математика вбирает в себя главные идеи и факты математики элементарной в более глубоком и фундаментальном их изложении.

Что касается подводной части "айсберга" математического знания, то там покоятся отдельные сведения, методы и целые теории, которые по каким-либо причинам или уже не нужны, или ещё не востребованы и ждут своего приложения или развития. Еще более условным является деление математики на "чистую" и прикладную. Например, трудно оспаривать фундаментальность значения в развитии многих специальных дисциплин "чистой" математики различных обобщений очень "прикладного" утверждения – теоремы Пифагора.

2. Кроме внутренних запросов и собственной логики развития математических дисциплин внешними побудительными мотивами роста математического знания и углубления математических исследований во многих направлениях являются запросы естественных наук и технологий, а также технические возможности решения прикладных задач.

Земледелие и ирригационное строительство, торговля и мореплавание, военное дело и проблемы фортификации во все времена являлись сферой применения математического знания и поставляли задачи для людей, занимающихся наукой. Так, теория вероятностей родилась из запросов о шансе выигрыша, успеха в банковском деле и особенно из попыток создания теории азартных игр. Первые результаты, положившие начало дифференциальной геометрии, были получены Карлом Гауссом при решении задач геодезии и картографии.

Попытки объяснения функционирования биологических, социальных и иных систем заложили начало одной из перспективнейших ветвей математики – кибернетики, науки об управлении, связи и переработке информации. Создание быстродействующих вычислительных машин позволило ставить и решать математическими методами многокомпонентные, многомерные задачи. Бурный расцвет математического моделирования процессов и явлений в технике и в естествознании связан с созданием и совершенствованием компьютеров и компьютерных сетей. Наступила эра компьютерных технологий и компьютерной математики.

3. Классическим примером значимости математики для развития фундаментального знания, примером опережающего практику развития математики является исполненное французским астрономом и математиком Ж. Леверье (11.03.1811 – 23.09.1877) предвычисление координат на небесной сфере неизвестной планеты по ее влиянию на движение планеты Уран. В 1846 году немецкий астроном И. Галле обнаружил в указанном Леверье месте эту неизвестную планету, названную впоследствии Нептуном. В этом же ряду открытий "на кончике пера" стоят предсказание электромагнитных волн в 1865 году Д. К. Максвеллом (13.07.1831 – 05.11.1879), экспериментально подтверждённое в 1887 году Г. Герцем, теоретическое описание в 1928 году положительного электрона – позитрона, зарегистрированного в потоке космического излучения Андерсеном в 1932 году, и мн. др. Ярким примером нетленности математического знания явилось использование Иоганном Кеплером (27.07.1578 – 15.11.1630) в расчётах орбиты Марса и других планет теории конических сечений, разработанной более чем за две тысячи лет до того геометрами Древней Греции.

4. Р. Курант и Г. Роббинс свою книгу "Что такое математика" начинают фразой: "На протяжении двух с лишним тысячелетий обладание некоторыми, не слишком поверхностными знаниями в области математики являлось необходимой составной частью интеллектуального багажа каждого образованного человека". Математическое знание, математическая культура являются необходимыми составляющими и величайшим достижением современной цивилизации. Новейшие исследования и достижения в науке, в технологии, в естествознании немыслимы и невозможны как без знания классических методов постановки и решения задач, так и без современных результатов фундаментальных наук и компьютерной реализации решений проблем процессов и явлений.

5. Предлагаемая вниманию читателя небольшая по объёму книга содержит научные основы введения в высшую математику. За очень малым исключением весь курс высшей математики может быть сведён к теории функций, заданных на отрезке [0, 1], и со значениями во множестве $\boldsymbol{R}$ действительных чисел. И именно поэтому значительное место в книге отводится понятию функции и понятию действительного числа. Исходным при введении этих понятий является понятие множества, причем из структур: групповой, порядка и топологической значительно большее место отведено двум первым.

Из двух возможных вариантов последовательности изложения введения: 1) теория множеств + математическая логика и 2) элементы математической логики + теория множеств, мы выбираем второй, по которому элементы математической логики и, в первую очередь, алгебру высказываний можно считать введением ко всему остальному материалу. В силу логической неизбежности и методической оправданности в курсе высшей математики мы часто используем принцип последовательного уточнения понятий от начально-школьного до научного.

Включенные в текст упражнения и примеры имеют теоретический и иллюстративный характер.

6. Предметом дискуссии могут быть Приложения А – Г. В Приложении А изложен альтернативный подход к решению континуум – гипотезы. В Приложении Б перечислены некоторые алгоритмы курса высшей математики. Приложение В содержит мотивировку введения нового символа для неопределённого интеграла и соответствующую этому символу методику введения понятий первообразной и множества первообразных. В Приложении Г дифференцируемость определяется для непрерывной функции вместо традиционного доказательства теоремы о непрерывности дифференцируемой функции. Это добавленное во второе издание приложение о «Дифференцируемости и интегрировании функций» может составить учебно-методический интерес для преподавателей высшей математики. Приложение Д содержит список тем рефератов по обсуждаемым в книге вопросам. При втором издании книги были добавлены три главы, содержащие новые результаты автора в области анализа.

В Главе 6 исследованы условия сюръективности инъективных отображений $\varphi\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, найдены характеристические признаки 6-ти непересекающихся классов таких отображений, приведены примеры и даны приложения введённых понятий, в частности, доказано (Теорема 6.2.5), что не существует биекции между множеством $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел и его собственным подмножеством $A \subset \boldsymbol{N}$, и показано (Пример 6.3.5), что остаток r_k гармонического ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$.

В седьмой главе введено определение *w-сходящейся числовой последовательности* (Определение 7.1.2) и доказано (Теорема 7.1.3), что произвольная последовательность Коши является *w*-сходящейся и удовлетворяет, следовательно, предельному условию: $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$. Это свойство последовательностей Коши явилось основанием для корректного введения бесконечно больших и бесконечно малых чисел. Описаны некоторые свойства этих чисел, в том числе их алгебра.

Некоторые результаты Глав 6 и 7 использованы в Главе 8, где рассмотрены с новой точки зрения начальные понятия теории числовых рядов. В частности, из понятий частичной суммы числового ряда и его остатка выделены понятия значений этих сумм. Такой подход позволил доказать ряд новых в теории числовых рядов утверждений: достаточность необходимого признака сходимости ряда и независимость сходимости знакопеременного числового ряда от перестановок его слагаемых. Доказано и более общее утверждение (Теорема 8.2.3): если для произвольного числа *B* из членов сходящегося к числу *A* знакопеременного ряда (***A***) построена произвольным образом последовательность (Σ_n^*) сумм Σ_n^*, последовательность значений S_n^* которых сходится к числу *B*, то последовательность (r_n^*) получающихся при этом остатков r_n^* сходится к числу *A–B*. Значение этих теорем трудно переоценить как в собственно анализе, так и в иных областях математики, например, в теории ортогональных рядов, в аналитической теории чисел и др.

Основные, вводимые в пособии понятия и термины, а также некоторые символы включены в предметный указатель.

Библиография содержит список лишь тех книг и статей, на которые нельзя было не сослаться.

7. В 3-ем издании пособия корректнее сформулированы некоторые понятия и улучшены доказательства в трёх последних главах. Так в Главе 6 новым является понятие *C-точной пары натуральных переменных* (Определение 6.1.1), в Главе 7 введено более содержательное, чем во 2-ом издании, понятие *e-расходящейся числовой последовательности* (Определение 7.1.1). Добавленные Примеры 6.3.2 и 8.3.2 иллюстрируют утверждение Теоремы 8.2.1. Эти и другие примеры подтверждают корректность новых понятий в Главах 6–8 и взаимную связь этих глав. В Главе 3 добавлен п. 3.7.7 об отображениях бесконечных множеств.

Кроме того, что отмечено, при переиздании в тексте пособия исправлены замеченные опечатки, ошибки и другие неточности.