ГЛАВА 5

МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Из способов введения множества $\boldsymbol{R}$ действительных чисел рассмотрим два: индуктивный (индуктивно-аксиоматический), когда множество $\boldsymbol{R}$ строится путём последовательных расширений множества $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел, и аксиоматический, когда структура множества $\boldsymbol{R}$ описывается аксиомами, на базе которых строится теория множества $\boldsymbol{R}$.

5.1. Индуктивный способ введения множества $\boldsymbol{R}$

Построение множества $\boldsymbol{R}$ действительных чисел первым из указанных выше способов представляет собою цепь последовательных расширений понятия числа: $\{0\} \Rightarrow \boldsymbol{N} \Rightarrow \boldsymbol{Z} \Rightarrow \boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{AR} \Rightarrow \boldsymbol{R} \Rightarrow \ldots$. С этой цепью при определении множества $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел согласуется выбор числа 0 наименьшим в $\boldsymbol{N}$ числом, так что

$$\boldsymbol{N}=\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \ldots\}.$$

Операции сложения и умножения натуральных чисел замкнуты в $\boldsymbol{N}$.

Множество $\boldsymbol{Z} \triangleq \boldsymbol{N} \bigcup \{a_i : a_i \triangleq -(1+i), i \in \boldsymbol{N}\}$ целых чисел получается непосредственным расширением множества $\boldsymbol{N}$ до коммутативного кольца $\boldsymbol{Z}$ с единицей, когда уравнение $a + x = b$ разрешимо во множестве $\boldsymbol{Z}$. Множество $\boldsymbol{Z}$ замкнуто относительно операций сложения и умножения. Но уравнение $c \cdot x = d$ разрешимо во множестве $\boldsymbol{Z}$ только тогда, когда d кратно c. Требование разрешимости уравнения $a \cdot x = b$ при $a \neq 0$ удовлетворяется расширением кольца $\boldsymbol{Z}$ до поля $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел (см. п. 3.4 и п. 4.3).

Уравнение $x^n = b$ разрешимо во множестве $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел только тогда, когда в $\boldsymbol{Q}$ $\exists a$: $a^n = b$. Следующий шаг расширения множества действительных чисел связан с введением множества $\boldsymbol{AR}$ *алгебраических действительных чисел:* $\boldsymbol{AR} \supset \boldsymbol{Q}$,

$$\boldsymbol{AR} \triangleq \{c\colon \exists \big(a_0, a_1, \ldots, a_n\big),\ a_i \in \boldsymbol{Z},\ a_0 \neq 0,\ \ a_n \neq 0,\ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \triangleq P_n(x) : P_n(c) \equiv 0\}.$$

Множество $\boldsymbol{AIr} \triangleq \boldsymbol{AR} \backslash \boldsymbol{Q}$, называемое множеством иррациональных алгебраических чисел, имеет очень сложную алгебраическую структуру. Существуют элементы $\xi_1, \xi_2, \ldots$ во множестве $\boldsymbol{AIr}$, которые линейно независимы над полем $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел, что означает $\sum_i a_i \xi_i = 0$

лишь при $\forall i \;\; a_i = 0$ (см. Определение 4.9). Поэтому $V_\infty \stackrel{\Delta}{=} \boldsymbol{AIr} \cup \{0\}$ является линейным пространством (***бесконечномерным***). Число ноль поля $\boldsymbol{Q}$ играет роль и ноль-вектора линейного пространства V_∞.

Для каждого иррационального алгебраического числа $\xi \in \boldsymbol{AIr}$ подмножество $\boldsymbol{Q}_\xi \stackrel{\Delta}{=} \{\xi \cdot q \colon q \in \boldsymbol{Q}\}$ является изоморфным полю $\boldsymbol{Q}$ одномерным подпространством пространства V_∞.

Последний шаг расширения множества чисел поможет нам выбрать следующее утверждение.

Утверждение 5.0. *Множество* $\boldsymbol{AR}^* \stackrel{\Delta}{=} \{x \colon x \in \boldsymbol{AR},\; x \geq 0\}$ *замкнуто относительно операции возведения в рациональную положительную степень* $a = \frac{p}{q}\colon\; p, q \in \boldsymbol{N},\; q \neq 0$, *т. е.* $c^a \in \boldsymbol{AR}^*$, *если* $c \in \boldsymbol{AR}^*$.

● Если $0 < c \in \boldsymbol{Q}^+$, то $\left(c^{\frac{p}{q}}\right)^q = c^p \in \boldsymbol{Q}^+$. Поэтому $\exists P_q(x)\colon P_q\left(c^{\frac{p}{q}}\right) = 0$, т. е. $c^{\frac{p}{q}} \in \boldsymbol{AR}^*$, и так как $c > 0$, то $c \in \boldsymbol{AR}^*$.

Пусть $0 < c \in \boldsymbol{AIr}$, т. е. $\exists P_k(x)\colon P_k(c) = 0$, тогда $c^k \in \boldsymbol{Q}^+$. Пусть, далее, $c^{\frac{p}{q}} \stackrel{\Delta}{=} b$, тогда $b^{kq} = \left(\left(c^{\frac{p}{q}}\right)^q\right)^k = (c^p)^k = (c^k)^p \in \boldsymbol{Q}$, так как $c^k \in \boldsymbol{Q}^+$ и $p \in \boldsymbol{N}$.

Следовательно, для $n = k \cdot q \;\; \exists P_n(x)\colon\; P_n(b) = 0$. Это, по определению, означает, что $b \in \boldsymbol{AR}^*$, $b > 0$. Очевидно, что $0^{\frac{p}{q}} = 0 \in \boldsymbol{AR}^*$.■

Числа, не являющиеся алгебраическими, были названы в 1844 году Жозефом Лиувиллем (24.03.1809 – 08.09.1882) *трансцендентными* (см. [94, p. 1, 2], [78, с. 311–326]); их существование он доказал в 1851 году. Мы множество таких чисел обозначим символом $\boldsymbol{TR}$. Построено много классов трансцендентных чисел, несмотря на негативность характеристического свойства трансцендентного числа: “…не является корнем никакого алгебраического уравнения с коэффициентами из $\boldsymbol{Z}$”. Например, А. О. Гельфонд (24.10.1906 – 07.11.1968) доказал в 1934 году, что числа вида a^b, где $a \in \boldsymbol{AR}$ и $b \in \boldsymbol{AIr}$, не являются алгебраическими.

В 1873 году французский математик Шарль Эрмит (24.12.1822 – 14.01.1901) доказал трансцендентность числа *e*. В 1882 году немецкий математик Фердинанд Линдеман (21.04.1852 – 06.03.1939) доказал трансцендентность числа π. Этот результат дал отрицательное решение гипотезы древних греков "***О квадратуре круга***": трансцендентность числа π доказывает невозможность построения с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу. Подробное изложение теории трансцендентных чисел и её истории по состоянию на конец XX века можно найти в книге [94] А. Вэкера (Alane Baker).

Последнее расширение множества чисел называется *трансцендентным*, т. е. не алгебраическим, в отличие от всех предыдущих алгебраических. Итак, мы имеем цепь расширений множества чисел:

$$\{0\}\Rightarrow \boldsymbol{N}\Rightarrow \boldsymbol{Z}\Rightarrow \boldsymbol{Q}\Rightarrow \boldsymbol{AR}\triangleq \boldsymbol{Q}\cup \boldsymbol{AIr}\Rightarrow \boldsymbol{AR}\cup \boldsymbol{TR}\triangleq \boldsymbol{Q}\cup \boldsymbol{Ir}\Rightarrow\ldots \quad (*)$$

Замечание 5.1. Голландский математик Ян Брауэр (27.02.1881 – 02.12.1966) как-то заметил, что "…Бог создал число ноль, остальное – творение рук человеческих". Некоторые авторы приписывают эту фразу Леопольду Кронекеру (1823 – 1891).

Замечание 5.2. $\boldsymbol{Ir}\triangleq \boldsymbol{AIr}\cup \boldsymbol{TR}$.

Замечание 5.3. Множество $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q}\cup \boldsymbol{Ir}$ полно относительно операции возведения в степень: для $a\geq 0$ и $b\in \boldsymbol{R}$ $a^b\triangleq c\in \boldsymbol{R}$ (ср. [28, с. 605]).

Замечание 5.4. Цепь $(*)$ не обрывается на $\boldsymbol{R}$: $\boldsymbol{R}\Rightarrow \boldsymbol{C}\Rightarrow$?…, где $\boldsymbol{C}=\{z=a+ib\colon a,b\in \boldsymbol{R},\ i^2=-1\}$ – множество комплексных чисел.

Очевидно, что расширение $\boldsymbol{R}\Rightarrow \boldsymbol{C}$ является алгебраическим: в поле $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел разрешимо уравнение $z^2+1=0$, т. е. $z=\pm i$, и, более того, справедлива доказанная в 1799 году Карлом Гауссом (30.04.1777 – 23.02.1855) формулируемая ниже теорема.

Основная теорема алгебры. *В поле* ***C*** *комплексных чисел алгебраическое уравнение степени n имеет хотя бы один корень* (*и, следовательно, ровно n корней*).

Множество $\boldsymbol{AR}$, как всюду плотное множество (см. п. 6 Главы 3), непрерывно в каждой своей точке. Однако разбиение множества $\boldsymbol{AR}$ на верхний B и нижний A классы, при котором $A\bigcup B=\boldsymbol{AR}$, $A\bigcap B=\varnothing$, $\forall(a,b)\in A\times B$ $a<b$, не является дедекиндовым сечением, если это разбиение образуется посредством числа $c\in \boldsymbol{TR}$, например, если $c=\pi$ и $\forall(a,b)\in A\times B$ $a<\pi<b$.

Завершением этого способа построения множества $\boldsymbol{R}$ действительных чисел будет приводимое ниже без доказательства утверждение.

Теорема непрерывности множества *R*. *Построенное выше множество **R** непрерывно в каждой своей точке, т. е. всякое разбиение **R** на верхний и нижний классы является дедекиндовым сечением* (см. Определение 3.17).

5.2. Аксиоматическое введение множества *R*

Определение 5.1. *Множеством действительных чисел называется непрерывное, линейно упорядоченное поле **R**. Это означает, что, во-первых, на множестве **R** заданы следующие отношения и операции*:

I. *Отношение равенства* (см. Глава 3, п.п. 3 и 4).

II. *Бинарная операция* +: $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *и* $a+b=c$ *есть алгебраическая запись операции* +.

III. *Бинарная операция* ⊗: $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *и* $a \cdot b = c$ *есть алгебраическая запись операции* ⊗.

IV. *Отношение порядка* $\rho \subset \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ *и* $a < b$ *есть алгебраическая запись того, что* $(a, b) \in \rho$ (см. Глава 3, п.п. 4 и 5).

Во-вторых, при этом выполнены следующие аксиомы:

I.1. $a = a$. I.2. $a = b \Rightarrow b = a$.

I.3. $a = b \& b = c \Rightarrow a = c$. I.3′. $a = b \Rightarrow (\varphi(a) \Rightarrow \varphi(b))$.

II.1. $a + b = b + a$. II.2. $a + (b + c) = (a + b) + c$.

II.3. $\exists 0 \in \boldsymbol{R}\colon \forall a \in \boldsymbol{R}\ a + 0 = a$.

II.4. $\forall a \in \boldsymbol{R}\ \exists p \in \boldsymbol{R}\colon a + p = 0$.

III.1. $a \cdot b = b \cdot a$. III.2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

III.3. $\exists 1 \in \boldsymbol{R} : \forall b \in \boldsymbol{R}\ \ b \cdot 1 = b$.

III.4. $\forall a \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}\ \exists q \in \boldsymbol{R}\colon a \cdot q = 1$.

IV.1. $a < b \& b < c \Rightarrow a < c$. IV.2. $(0, 0) \notin \rho$, т.е. $0 < 0$ ложно.

IV.3. $0 < 1$. V.1. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

VI.1. $\forall c \in \boldsymbol{R}\ a < b \Rightarrow a + c < b + c$.

VI.2. $(a > 0) \& (b > 0) \Rightarrow a \cdot b > 0$.

VII. Всякое разбиение множества ***R*** на верхний *B* и нижний *A* классы: $A \bigcup B = \boldsymbol{R}$, $A \neq \varnothing \neq B$, $\forall (a, b) \in A \times B\ a < b$, есть дедекиндово сечение, т. е. либо $\exists c \in A : \forall y \in A \setminus \{c\}:\ y < c$ и $\forall p \in B\quad \exists b \in B\colon b < p$, либо $\exists d \in B : \forall x \in B \setminus \{d\}\ d < x$ и $\forall y \in A\quad \exists a \in A\colon\ y < a$.

Замечание 5.5. В Аксиомах I.2 и I.3 равенства $a = b$, $b = c$, $a = c$ означают, что один и тот же элемент обозначен разными символами или даже получен разными способами, например $|a| = \sqrt{a \cdot a}$ (см. также [53, с. 12]). В Аксиоме I.3′ $\varphi(b)$ – некоторое выражение, не содержащее a (см. с. 12 и далее). Аксиома I.3′ обеспечивает *замену равного равным*, из неё следуют, в частности, Аксиомы I.3 и I.2 (см. также [53, с. 12]).

Замечание 5.6. Аксиомы I.1 – I.3′ и доказываемую ниже Теорему 5.4 традиционно опускают (см. [53, с. 12], ср. [30, с. 40, 41]).

Замечание 5.7. В Аксиоме IV.3 условием $0<1$ выбрана за *положительную* одна из двух возможных ориентаций в $\boldsymbol{R}$: $0<1$ или $1<0$.

Замечание 5.8. Использование нестрогого неравенства $q \le x$ оправдано лишь в тех выражениях, где, по крайней мере, одна из букв q и x есть символ переменной (см. Глава 1, Соглашение С), иначе, например, вместо $2 \le 3$ мы пишем $2<3$.

Весь изучаемый в высшей математике анализ – математический анализ функций – является теорией, выводимой из Аксиом I –VII. Отметим здесь лишь некоторые факты, при этом равенство = и импликацию $\Rightarrow$, справедливые в силу условия S, мы будем обозначать символами $=\!(S)\!\!=$ и $=\!(S)\!\!\Rightarrow$, соответственно.

Теорема 5.0. $\forall (x, y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ *либо* $x<y$, *либо* $x=y$, *либо* $x>y$.

● Пусть, например, $\exists (a,b) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$: $a>b \& b>a$. Тогда по Аксиоме IV.1 $a>a$ и по Аксиоме VI.1 получим $0>0$, это противоречит Аксиоме VI.2. Если же допустить существование в $\boldsymbol{R}$ $\{a, b\}$: $a>b$ и $a=b$, то по Аксиоме I.3′ получим $a>a$ и далее $0>0$.■

Теорема 5.1. *Если* $\exists \{0, \tilde{0}\} \subset \boldsymbol{R}$: $\forall \{a,b\} \subset \boldsymbol{R}$ $a+0=a$ *и* $b+\tilde{0}=b$, *то* $0=\tilde{0}$.

● Из условия теоремы при $a=\tilde{0}$ и $b=0$ получим $\tilde{0}+0=\tilde{0}$ и $0+\tilde{0}=0$. Из этих равенств и Аксиом II.1 и I.3 следует, что $0=\tilde{0}$.■

Аналогично доказывается единственность в $\boldsymbol{R}$ единицы, т. е.

Теорема 5.2. $a \cdot 1 = a \;\&\; b \cdot \tilde{1} = b \Rightarrow 1 = \tilde{1}$.

Определение 5.2. *Множеством натуральных чисел назовём множество* $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{R}$, *определяемое индуктивно двумя условиями* (ср. п. 3.6):

1) $1 \in \boldsymbol{N}$.
2) *Если* $n \in \boldsymbol{N}$, *то* $n+1 \in \boldsymbol{N}$.

Теорема 5.3. *Если* $a+p=0$ *и* $a+q=0$, *то* $p=q$.

● Допустим противное, т. е. что $\neg(p=q)$. Если, например, $p>q$, тогда из $a+p>a+q$ следует 0>0. Это противоречит Аксиоме IV.3.■

Единственное число $p=q\overset{\Delta}{=}-a$ называют числом, противоположным числу *a.*

Определение 5.3. *Число a назовём положительным и число* $(-a)$ *назовём отрицательным, если* $a>0$.

Определение 5.4. *Разностью чисел a и b назовём число*

$$c=a+(-b)\overset{\Delta}{=}a-b.$$

Теорема 5.4. *Если* $a=b$, *то* $\forall c\in\boldsymbol{R}$ $a+c=b+c$.

● Допустим $\neg(a+c=b+c)$, например, $a+c>b+c$. Из этого неравенства, по Аксиоме VI.1, получим $a>b$, что вместе с условием Теоремы противоречит заключению Теоремы 5.0.■

Следствие 5.1. $a=b\Leftrightarrow a-b=0\Leftrightarrow -a=-b$.

Теорема 5.5. *Если* $a=b$ *и* $p=q$, *то* $a+p=b+q$.

● $(a=b,\ p=q)=(\text{Теор. }5.4)\Rightarrow(a+p=b+p,\ b+p=b+q)=(\text{I.3})\Rightarrow$ $(a+p=b+q)$.■

Теорема 5.6. $-(-a)=a$.

● $((-a)+(-(-a))=(\text{II. 4.})=0)=(\text{Теор. }5.4)\Rightarrow a+(-a)+(-(-a))=$ $=0+a=(\text{II.4, II.3, I.3}')\Rightarrow 0-(-a)=a\Rightarrow -(-a)=a$.■

Теорема 5.7. $-(a+b)=-a-b$.

● $(p\overset{\Delta}{=}-(a+b))=(\text{Следствие 5.1})\Rightarrow(-p=-(-(a+b)))$.

$=(\text{Теор. }5.6)\Rightarrow(-p=a+b)=(\text{Теор. }5.4)\Rightarrow -a-b=p$. Теперь имеем $((p=-(a+b))\&(p=-a-b))\Rightarrow(-(a+b)=-a-b)$.■

Аналогично доказываются следующие три утверждения:

Теорема 5.8. $(-1)\cdot a=-a$.

Следствие 5.2. $(-1)\cdot(-1)=1$.

Следствие 5.3. $(-x)\cdot y=-(xy)$.

Теорема 5.9. $(a=b)\Rightarrow(ac=bc)=(c\neq 0)\Rightarrow(a=b)$.

● $(a=b)\Rightarrow(a-b=0)$, $(ac-bc=c(a-b)=c\cdot 0=0)\Rightarrow(ac=bc)$,

$(ac=bc)$ =($c\neq 0$)$\Rightarrow(a\cdot c\cdot c^{-1}=b\cdot c\cdot c^{-1})\Rightarrow(a\cdot 1=b\cdot 1)\Rightarrow(a=b)$.■

Следствие 5.4. Если $a\cdot b=0$, то либо a=0, либо b=0, либо a=b=0.

Теорема 5.10. *Если* $a\cdot w=1$ *и* $a\cdot v=1$, *то* $w=v$.

● $(aw=av)\Rightarrow(a(w-v)=0)$. Так как $a\neq 0$, ибо равенство $a=0$ в силу $1=a\cdot w=0$ противоречит Аксиоме IV.3, то в силу Следствия 5.4 $(w-v=0)$ =(Следствие 5.1)$\Rightarrow$ $w=v$.■

Единственное в Теореме 5.10 число $w=v\overset{\Delta}{=}a^{-1}$ называют обратным числом для числа a.

Определение 5.5. *Частным чисел a и b называют число*

$$d=a\cdot b^{-1}\overset{\Delta}{=}\frac{a}{b}\overset{\Delta}{=}a:b.$$

Теорема 5.11. *Если* $a>0$, *то* $-a<0$.

● $(a>0)\Rightarrow(-a+a>0-a)\Rightarrow 0>-a$.■ (Ср. [30, с. 38]).

Теорема 5.12. $a>b\Leftrightarrow a-b>0$.

● $(a>b)$ =(VI.1)$\Rightarrow$ $(a+(-b)>b+(-b))\Rightarrow(a-b>0)$.■

Следствие 5.5. *Если* $a>b$ и $c>0$, то $ac>bc$.

● $(a>b)$ =(Теор. 5.12)$\Rightarrow$ $(a-b>0)$. Поэтому имеем далее

$(a-b>0,\ c>0)$ =(VI.2)$\Rightarrow$ $((a-b)\cdot c>0)$ =(V.1)$\Rightarrow$ $(ac-bc>0)$ = (Теорема 5.9)$\Rightarrow$ $(ac>bc)$.■

Теорема 5.13. *Если* $a>b$ *и* $c>d$, *то* $a+c>b+d$ *и* $a-d>b-c$.

● $(a>b,\ c>d)$ =(VI.1)$\Rightarrow$ $(a+c>b+c,\ b+c>b+d)$ =(IV.1)$\Rightarrow$ $(a+c>b+d)$. Неравенство $a-d>b-c$ доказывается аналогично, так как по Теореме 5.12 из $c>d$ следует $-d>-c$.■

Упражнения

Доказать следующие свойства действительных чисел:

5.14. Если $a>b+c$, то $a-c>b$.

5.15. Если $a\neq 0$, то $(a^{-1})^{-1}=a$.

5.16. $(-a)(-b)=a\cdot b$.

5.17. Если $a\neq 0$, то $(-a)^{-1}=-(a^{-1})$.

5.18. Если $a>0$, то $a^{-1}>0$.

5.19. Если $a>1$, то $0<a^{-1}<1$.

5.20. Если $a>b$ и $c<0$, то $ac<bc$.

5.21. При $a > b$ и $c > d$ $ac > bd$ в следующих трёх случаях:
1) если $a > 0$ и $d > 0$,
2) если $c > 0$ и $b > 0$,
3) если $b > 0$ и $d > 0$.

Утверждение 5.22. $\forall a > 0 \ \exists\{c,b\} \subset \boldsymbol{R}$: $0 < \frac{1}{b} < a < c$.

● Пусть $c \overset{\Delta}{=} a + 1$, тогда в силу Аксиом IV.3, I.3 и I.3′ имеем

$$(c = a + 1, \quad 1 > 0) \Rightarrow (c + 1 > a + 1) \Rightarrow (c > a).$$

Далее из $a > 0$ и из $a \cdot a^{-1} = 1$ получим**:** $a + a \cdot a^{-1} > 1 + 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a(1 + a^{-1}) > 1$. Если $b \overset{\Delta}{=} 1 + a^{-1}$, то из $(1 > 0, \quad a > 0) \Rightarrow b > 0 \Rightarrow b^{-1} > 0$, тогда $a \cdot b \cdot b^{-1} > 1 \cdot b^{-1} > 0 \Rightarrow a > b^{-1}$.■

Утверждение 5.22 говорит о том, что *среди положительных чисел нет ни наибольшего, ни наименьшего*. Для второй части этого утверждения обобщением является следующая ниже Теорема 5.23.

Теорема 5.23. *Упорядоченное поле F всюду плотно, то есть*

$$\forall (a,b) \in F \times F, \text{ где } a < b, \ \exists c \in F \colon a < c < b.$$

● Пусть $2 \overset{\Delta}{=} 1 + 1 > 0$. Так как из

$$(a < b) \Rightarrow ((a + a < a + b) \ \textit{и} \ (a + b < b + b)),$$

то $a < \frac{a+b}{2}$ и $\frac{a+b}{2} < b$. Теперь, например, $c \overset{\Delta}{=} \frac{a+b}{2}$ ■

Предложения 5.1 – 5.23 справедливы для любого упорядоченного поля. Но в теории упорядоченного поля ***F***, если $\boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{Q}$**,** недоказуемы следующие предложения.

Утверждение 5.24′. Аксиома Архимеда.

Для любых чисел *a и b*, принадлежащих ***F***, $0 < b < a$, *найдётся натуральное число n такое, что* $a < \underbrace{b + b + \cdots + b}_{n \text{ слагаемых}} \overset{\Delta}{=} b \cdot n$.

Утверждение 5.24″. *Для каждого положительного* $\alpha \in \boldsymbol{F}$ *найдётся такое натуральное число n, что* $\frac{1}{\alpha} < n$.

Утверждение 5.24‴. Для всякого $a \in \boldsymbol{F}$, $a > 0$, найдётся натуральное число *n* такое, что $\frac{1}{2^n} < a < 2^n$.

Задание 5.1. Приняв одно из Утверждений 5.24 за аксиому поля ***F***, доказать два других.

Упорядоченное поле $\boldsymbol{F}$, в котором справедливо утверждение 5.24, называется *архимедовым полем*.

В [30] показано на с. 34–36, что Аксиома VII непрерывности множества $\boldsymbol{R}$ действительных чисел эквивалентна следующим ниже предложениям о *полноте множества* $\boldsymbol{R}$.

Предложение VII' **. *Принцип полноты Вейерштрасса.*** Любое ограниченное сверху непустое множество из $\boldsymbol{R}$ имеет в $\boldsymbol{R}$ точную верхнюю грань.

Предложение VII'' **. *Теорема отделимости.*** *Если* $A \neq \varnothing \neq B$, $A \bigcup B = \boldsymbol{R}$ *и для* $\forall (a,b) \in A \times B$ $a < b$, *то в* $\boldsymbol{R}$ *существует такое с, что для всех* $(x, y) \in A \times B$ $x \leq c \leq y$.

Предложение VII''' **. *Принцип полноты Кантора множества R.***

А) Пусть в $\boldsymbol{R}$ дана система $\{[a_n, b_n]\}$, $n \in \boldsymbol{N}$, вложенных отрезков $[a_{n+1},\ b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset \boldsymbol{R}$. Тогда $\bigcap\limits_i [a_i, b_i] \neq \varnothing$, т. е. существует число $c \in \boldsymbol{R}$ такое, что $\forall\, n \in \boldsymbol{N}$ $c \in [a_n, b_n]$.

В) Архимедово поле $\boldsymbol{F}$, в котором пересечение системы вложенных отрезков не пусто, есть множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел (ср. [41, с. 76, Теорема 3 и далее]).

Задание 5.2. Доказать справедливость Утверждений 5.24′ - 5.24‴ в поле $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел, т. е. что поле $\boldsymbol{Q}$ *архимедово*.

Вопросы Читателю

1. Как можно определить *бесконечномерное линейное пространство* V_∞?

2. Как изменится система аксиом множества $\boldsymbol{R}$, если в качестве одной из них принять Теорему 5.0?

3. Можно ли было бы принять числа меньшие нуля за положительные числа? Если “да”, то чему бы это противоречило?

4. Справедлива ли Теорема отделимости (Предложение VII″) во множестве $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел? Что из этого следует?

5. Каким числом можно заменить в Утверждении 5.24‴ степень 2^n?

6. Из п. 2 Главы 7 следует существование бесконечно больших натуральных чисел. Противоречит ли это Аксиомам Пеано (см. п. 3.7.5, с. 57) множества натуральных чисел?