4.5. Линейные пространства и алгебры

Определение 4.8. *Векторным пространством над полем F называется коммутативная аддитивная группа V, если задан внешний закон композиции* $\circledast$: $F \times V \to V$ $((\alpha, a) \to \alpha \circledast a = b,\ a,\ b \in V,\ \alpha \in F)$ *и для* $\alpha, \beta \in F$ *и* $a, b \in V$ *выполнены аксиомы*:

1) $(\alpha + \beta) \circledast a = (\alpha \circledast a) \oplus (\beta \otimes a)$,

2) $\alpha \circledast (a \oplus b) = (\alpha \circledast a) \oplus (\alpha \circledast b)$,

3) $(\alpha \cdot \beta) \circledast a = \alpha \circledast (\beta \circledast a)$,

4) $1 \circledast a = a$.

Векторное пространство часто называют линейным пространством, аддитивные символы $\oplus$ и $+$ отождествляют, а мультипликативные символы $\cdot$ и $\circledast$ по умолчанию опускают, при таких соглашениях полный *список аксиом линейного пространства* имеет вид (см. [13, стр. 8]):

I. 1) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$, 2) $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$,

3) $\exists \overline{0}: \forall \overline{x} \in V\ \ \overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$, 4) $\forall \overline{a} \in V\ \exists \overline{b} \stackrel{\Delta}{=} -\overline{a}:\ \overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$.

II. 5) $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$, 6) $\alpha\beta(\overline{x}) = \alpha(\beta\overline{x})$.

III. 7) $(\alpha + \beta)\overline{x} = \alpha\overline{x} + \beta\overline{x}$, 8) $\alpha(\overline{x} + \overline{y}) = \alpha\overline{x} + \alpha\overline{y}$.

Ближайшие примеры линейных пространств дают:

1) V_1 – множество векторов на прямой l (векторов параллельных прямой l).

2) V_2 – множество векторов на плоскости L (векторов параллельных плоскости L).

3) V_3 – множество векторов пространства, где, как и в 2), операция $\overline{x} + \overline{y}$ сложения векторов определяется “правилом замыкающей”, “правилом треугольника” (см. Рис. 4.1), а умножение вектора $\overline{x}$ на число α означает увеличение длины вектора $\overline{x}$ в $|\alpha|$ раз и изменение на противоположное направление вектора, если $\alpha < 0$.

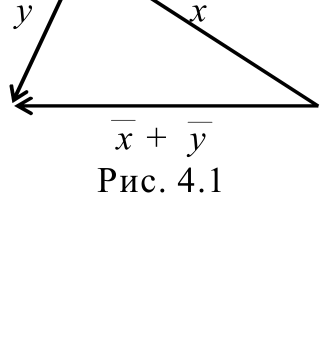

Рис. 4.1

Теоремой является утверждение $0 \cdot \overline{a} = \overline{0}$.

$\bullet\, 0 \cdot \overline{a} = (1-1)\,\overline{a} = 1 \cdot \overline{a} - 1 \cdot \overline{a} = \overline{a} - \overline{a} = \overline{0}$.■

Другие примеры линейных пространств:

Пример 4.6. Множество $M_{n\times k}$ матриц размера $n \times k \triangleq \langle n,k \rangle$ где умножение на число и сложение определены так: $\alpha \otimes (a_{ij}) \triangleq (\alpha a_{ij})$ и $(a_{ij}) \oplus (b_{ij}) \triangleq (a_{ij} + b_{ij})$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le k$, т. е., в частности, при умножении матрицы $A = (a_{ij})$ на число α каждый её элемент a_{ij} умножается на число α.

При $k = 1$ (при $n = 1$) линейное пространство $M_{n\times 1} \triangleq \boldsymbol{R}^n$ (линейное пространство $M_{1\times k} \triangleq \boldsymbol{R}_k$) называется арифметическим пространством n-столбцов (арифметическим пространством k-строк).

Пример 4.7. Множество $\boldsymbol{P}_n(x)=\{P_k(x) : 0 \le k \le n, x \in \boldsymbol{R}\}$ многочленов степени не выше n образует линейное пространство с операциями сложения многочленов и умножения их на число.

Пример 4.8. Множество F всех отображений $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$, где

$$(f \oplus h)(x) \triangleq f(x) + h(x) \text{ и } (\alpha \circledast f)(x) \triangleq \alpha \cdot f(x),$$

образует линейное пространство.

Фундаментальными в теории линейных пространств являются вводимые ниже понятия.

Вектор

$$\overline{x} = \alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + \ldots + \alpha_k \overline{a}_k,$$

где $\alpha_i \in F$ и $\overline{a}_i \in V$, называют линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$, а элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ называют коэффициентами этой линейной комбинации.

Если в линейной комбинации $\overline{x} = \sum \alpha_i \cdot \overline{a}_i$ все $\alpha_i = 0$, то и вектор $\overline{x} = \overline{0}$, а линейную комбинацию называют *тривиальной*.

Определение 4.9. *Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ называются линейно независимыми, если из всех линейных комбинаций этих векторов нуль-*

вектору равна только тривиальная линейная комбинация этих векторов, т. е. когда из равенства

$$\sum_i \alpha_i \bar{a}_i = \bar{0} \Rightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0),\ \textit{или}\ \sum_i \alpha_i^2 = 0.$$

В противном случае, векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ *называются линейно зависимыми.*

Так, например, из $P_n(x) \stackrel{x}{\equiv} 0$, т. е. из тождества

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n+1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + \alpha_0 \stackrel{x}{\equiv} 0, \Rightarrow \alpha_n = \alpha_{n+1} = \ldots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0.$$

Поэтому все одночлены $P_0 = 1$, $P_1 = x^1$, $P_2 = x^2, \ldots, P_n = x^n$ являются линейно независимыми в пространстве $\boldsymbol{P}_n(x)=\{P_k(x){:}\ k \le n\}$, $n \in \boldsymbol{N}$. Очевидно, что размерность этого пространства равна $n+1$.

Определение 4.10. *Упорядоченное множество* $B_n = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n)$ *линейно независимых векторов* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ *называют базисом линейного пространства* V, *если каждый вектор* $\bar{a} \in V$ *можно представить линейной комбинацией этих векторов*: $\bar{a} = \sum_i \alpha_i \bar{a}_i$. *Коэффициенты* α_i *называют координатами вектора* $\bar{a}$ *в базисе* B_n, *а число n называют размерностью пространства V и пишут* $\dim V = n$.

Теорема 4.1. *Координаты* α_i *вектора* $\bar{a}$ *в базисе* B_n *линейного пространства V определяются однозначно этим базисом.*

● Предположим противное, когда $\bar{a} = \sum_i \alpha_i \bar{a}_i$ и $\bar{a} = \sum_i \beta_i \bar{a}_i$, тогда

$$\bar{0} = \bar{a} - \bar{a} = \sum_i \alpha_i \bar{a}_i - \sum_i \beta_i \bar{a}_i = \sum_i (\alpha_i - \beta_i) \bar{a}_i \Rightarrow (\forall i\ \alpha_i - \beta_i = 0),$$

т. е. $\forall i\ \alpha_i = \beta_i$.■

Определение 4.11. *Векторное пространство V над полем F называется* ***алгеброй****, если на V задана внутренняя операция* $\otimes$: $V \times V \to V$, *превращающая V в кольцо, так что выполнены следующие условия*:

1. $\alpha(\bar{a} \otimes \bar{b}) = (\alpha\bar{a}) \otimes (\bar{b}) = \bar{a} \otimes (\alpha\bar{b})$,

2. $(\bar{a} + \bar{b}) \otimes \bar{c} = (\bar{a} \otimes \bar{c}) + \bar{b} \otimes \bar{c}$,

3. $\bar{c} \otimes (\bar{a} + \bar{b}) = (\bar{c} \otimes \bar{a}) + (\bar{c} \otimes \bar{b})$.

В общем случае алгебра не коммутативна и не ассоциативна относительно операции $\otimes$.

Так как в базисе $B_n = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n)$ всякий вектор $\bar{c}_{ij} \triangleq \bar{a}_i \otimes \bar{a}_j$ может быть представлен в форме $\bar{c}_{ij} = \sum\limits_k A_{ijk} \bar{a}_k$, то для Вас, читатель, предлагается

Упражнение 4.7. Получить условия на коэффициенты A_{ijk}, определяющие таблицу умножения $\bar{a}_i \otimes \bar{a}_j$ в базисе B_n ассоциативной и коммутативной алгебры.

В математике термин алгебра чаще употребляется в более широком, чем в Определении 4.11 смысле: мы говорим "алгебра множеств" в Главе III, "Булевы алгебры" в Главе II, часто говорят "линейная алгебра" или "алгебра векторов". Но во всех этих случаях структуру на множестве *M* задают не менее двух композиций – операций.

4.6. Аффинно-точечное пространство. Евклидовы и нормированные пространства

Теория линейных пространств широко используется почти во всех математических дисциплинах, и, в первую очередь, в *аналитической геометрии*, где основные факты евклидовой (элементарной) геометрии излагаются на языке систем координат и уравнений и неравенств.

Ниже мы используем при формировании понятия точечного пространства введённое выше аксиоматически линейное пространство $V = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots\}$.

Определение 4.12. *Множество* $\boldsymbol{A} = \{A, B, C, \ldots, P, Q, S, T, \ldots\}$ *назовём точечным аффинным пространством, а его элементы точками, соответствующим линейному пространству V, если выполнены следующие условия*:

1) *задана биекция* $\varphi : V \times \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$, *где* $\varphi(\bar{a}, A) \triangleq \langle A, B \rangle \triangleq AB$ *называется направленным отрезком в* $\boldsymbol{A}$ *с началом в точке A и концом в точке B*,

2) *множество* $\boldsymbol{A}$ *связанно*: *если* $\varphi(\overline{a}, P) = PA$, $\varphi(\overline{b}, A) = AQ$ и $\varphi(\overline{c}, P) = PB$, *то* $B \equiv Q$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$.

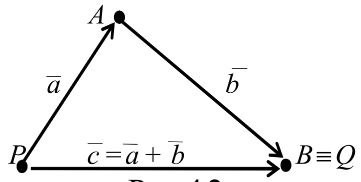

Рис. 4.2

Полагая в условии 2) $\overline{a} = \overline{0}$ и $\overline{b} = \overline{c}$, получим, что для всех $A \in \boldsymbol{A}$ $\varphi(\overline{0}, A) = AA$.

Если же в условии 2) принять, что $\overline{c} = \overline{0}$ и $\overline{b} = -\overline{a}$, то из $\varphi(\overline{a}, P) = PA$ следует, что $\varphi(-\overline{a}, A) = AP$.

Теперь во множестве $\{AB\colon A, B \in \boldsymbol{A}\}$ всех отрезков в $\boldsymbol{A}$ введём отношение эквивалентности: $AB \sim PQ$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\overline{v}, A) = AB$ и $\varphi(\overline{v}, P) = PQ$, $\overline{v} \in V$, при этом класс эквивалентности $\{AB\colon AB \sim PQ \sim \ldots\}$ обозначим символом $\overline{AB} \stackrel{\Delta}{=} \overline{PQ} = \ldots$ (если $AB \sim PQ \sim \ldots$) и назовём вектором в $\boldsymbol{A}$. Множество векторов в $\boldsymbol{A}$ обозначим символом V_A.

С помощью биекции $\varphi\colon V \times \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ построим биекцию ξ: $\boldsymbol{V} \to V_A$ по следующему правилу: $\xi(\overline{a}) = \overline{AB}$, если $\varphi(\overline{a}, A) = AB$. Биекция ξ позволяет перенести линейные операции из $\boldsymbol{V}$ в V_A и даже отождествить $\boldsymbol{V}$ и V_A в силу их изоморфности. Доказательство этой изоморфности предоставляется Читателю.

Теперь отрезок AB можно представить как множество точек из $\boldsymbol{A}$:

$$AB = \{M\colon \overline{AB} = t \cdot \overline{AB},\ 0 \le t \le 1,\ M,\ A,\ B \in \boldsymbol{A}\} \subset \boldsymbol{A}.$$

Линейное пространство V_A назовём векторным пространством аффинного пространства $\boldsymbol{A}$. Пространство $\boldsymbol{A}$ назовём n-мерным, если размерность $\dim V_A$ его линейного пространства V_A равна n, и будем писать $\dim \boldsymbol{A} = n$.

Определение 4.13. *Системой координат* $CK(\boldsymbol{A})$ *в n-мерном точечном пространстве* $\boldsymbol{A}$ *назовём биекцию* $CK\colon \boldsymbol{A} \to S_n$, $S_n \in \{R^n, R_n\}$, *определяемую, например, формулой*

$$CK(P) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R_n,\ O,\ P \in \boldsymbol{A},\ \overline{OP} \in V = V_A .$$

Для задания системы координат *СК*(***A***) достаточно выбрать некоторый n-мерный базис $B_n = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ в V и некоторую точку $O \in \boldsymbol{A}$, назвав её началом *СК*(***A***). Такая *СК*(***A***) называется декартовой. Вектор $\overline{OP}$ называют радиус – вектором точки P в базисе B_n, а коэффициенты α_i линейной комбинации $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i = \overline{OP}$ назовём координатами точки P в системе координат *СК*(***A***), определяемой парой (O, B_n).

Введённый аппарат позволяет решать аффинные задачи аналитической геометрии, т. е. геометрические задачи, не связанной с метрикой.

Определение 4.14. *Векторное пространство V и аффинное точечное пространство **A** называются евклидовыми, если задана сюръекция*: ρ: $V \times V \to \boldsymbol{R}$ *такая, что выполняются следующие условия*:

1) $\rho(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$, $\bar{a} \neq \bar{0} \Rightarrow \rho(\bar{a}, \bar{a}) > 0$,

2) $\rho(\lambda \bar{a}, \bar{b}) = \lambda \rho(\bar{a}, \bar{b})$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$,

3) $\rho(\bar{a}, \bar{b}) = \rho(\bar{b}, \bar{a})$,

4) $\rho(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = \rho(\bar{a}, \bar{c}) + \rho(\bar{b}, \bar{c})$.

Сюръекцию ρ называют скалярным произведением в V (в ***A***) и пишут $\bar{a} \cdot \bar{b}$ или $(\bar{a}, \bar{b})$ вместо $\rho(\bar{a}, \bar{b})$, а вместо ***A*** и V пишут E_n и V_E, соответственно.

Пример 4.9. В бесконечномерном линейном пространстве $C([a,b])$ непрерывных функций $f: [a,b] \to \boldsymbol{R}$ скалярное произведение определим формулой

$$\rho(h, f) = \int_a^b f(t) \cdot h(t) \cdot dt .$$

Выполнимость аксиом скалярного произведения легко следует из свойств определённого интеграла:

$$\rho(f, f) = \int_a^b (f(t))^2 \, dt \triangleq I \geq 0,$$

например, как интеграл от неотрицательной функции $(f(t))^2$, при этом $I = 0$ лишь тогда, когда $f(t) \equiv 0$, т. е. $\forall t \in [a,b] \;\; f(t) = 0$.

Пример 4.10. В арифметическом n-мерном пространстве n-строк $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, скалярное произведение определим формулой

$$\alpha \cdot \beta = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \cdot (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \triangleq \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \beta_i .$$

Легко проверить, что все аксиомы скалярного произведения выполнены.

Теорема 4.2. *В евклидовом пространстве V_E справедливо неравенство Коши–Буняковского*

$$(\bar{x}, \bar{y})^2 \le (\bar{x}, \bar{x}) \cdot (\bar{y}, \bar{y}). \tag{$*$}$$

● По условию 1) из Определения 4.12 $(\lambda\bar{x} - \bar{y}, \lambda\bar{x} - \bar{y}) \ge 0$, отсюда имеем квадратное неравенство относительно параметра λ

$$\lambda^2(\bar{x}, \bar{x}) - 2\lambda(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y}) \ge 0$$

по условиям 2) – 4) того же определения.

В силу условия 1) дискриминант этого квадратного трёхчлена должен быть не положителен, т. е. $4(\bar{x}, \bar{y})^2 - 4(\bar{x}, \bar{x}) \cdot (\bar{y}, \bar{y}) \le 0$, далее следует утверждаемое теоремой неравенство ($*$).■

Структура евклидового пространства позволяет ввести в V_E топологическую структуру, когда некоторые подмножества в V_E объявляются о*ткрытыми*.

Точную формулировку даёт следующее определение.

Определение 4.15. *Множество X называется топологическим пространством, если из множества $P(X)$ всех подмножеств $A \subseteq X$ выделена совокупность $G \subset P(X)$ подмножеств, называемых открытыми и при этом выполнены следующие условия*:

1) $\varnothing \in G,\ X \in G$,

2) *если* $M_k \in G$, $k \in I \subseteq \mathbf{N}$, *то* $\bigcap_{i=1}^{i=k_0} M_i \in G$,

3) *если* $M_i \in G$, $i \in I$, *то* $\bigcup_{i \in I} M_i \in G$.

Так, например, для линейно упорядоченного множества M открытыми можно считать следующие множества: $\varnothing$, M, $O(a,b)$, где $a < b$ и

$\{a,b\} \subset M$ (см. Глава 3, п. 5). Для дискретного множества *M* так определяемая топология называется дискретной.

Определение 4.16. *Линейное пространство V_A называется нормированным пространством, если существует такая сюръекция*

$$\psi : V_A \to \boldsymbol{R}^* \triangleq \{x : \ 0 \le x, \ x \in \boldsymbol{R}\},$$

называемая нормой на V_A , что выполнены следующие условия:

1) $\psi(\overline{x}) \ge 0 \ \ (\psi(\overline{x}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0})$,

2) $\psi(\lambda\overline{a}) = |\lambda|\psi(\overline{a})$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$,

3) $\psi(\overline{a} + \overline{b}) \le \psi(\overline{a}) + \psi(\overline{b})$.

В евклидовом пространстве V_E норму $\psi(\overline{a}) \triangleq \|\overline{a}\| \triangleq |\overline{a}|$ можно ввести равенством $\|\overline{a}\| \triangleq \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}}$.

Упражнение 4.8. Проверить справедливость аксиом 1), 2) и 3) нормы для нормы, определённой равенством $\|\overline{a}\| \triangleq \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}}$.

Топологию в V_E можно ввести теперь объявлением открытыми в пространстве V_E множества: $\varnothing$, V_E, $\overline{0}$ и такие W_α, что $\overline{x} \in W_\alpha$, если $\|\overline{x}\| < \alpha$, $0 < \alpha$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

Вопросы Читателю

1. Как можно определить, изоморфны ли два линейно упорядоченных множества?

2. При каких условиях теоретико-множественное объединение двух подгрупп группы *G* будет группой?

3. Какова размерность линейного пространства $\{(a_{ij})\}$ симметричных $(a_{ik} = a_{ki})$ матриц третьего порядка?

4. Как можно проверить будет ли нормой в линейном пространстве *L* прямоугольных матриц размера $\langle m,n \rangle$ отображение $\psi : L \to \boldsymbol{R}^*$, если

$$\psi(A) = \psi(a_{ik}) = \sum_{i,k} |a_{ik}|?$$