ГЛАВА 3

МНОЖЕСТВА. АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ. ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ. ОТОБРАЖЕНИЯ МНОЖЕСТВ

3.0. Аксиомы равенства. Классы равенств

В математических рассуждениях вне зависимости от уровня формализованности наиболее часто употребляется отношение равенства. При формализованном описании математических теорий отношение равенства описывается аксиомами, утверждающими *рефлексивность* равенства и возможность *замены равного равным* (см. Пример 1.1 в п. 1.5).

Из аксиом отношения равенства вытекают такие его свойства:

1) $a = a$,

2) если $a = b$, то $b = a$,

3) если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$,

где a, b, c суть объекты одной природы, или, точнее, символы переменных, у которых общее множество значений.

С логической точки зрения можно выделить три класса равенств:

I. *Аксиомы* (см. п.п. 4.5 и 5.2).

II. *Утверждения* – логические следствия аксиом:

IIа. *Тождества* – равенства, справедливые в силу аксиом при всех значениях входящих в них переменных:

$$(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2,\ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \equiv 1,\ \ldots.$$

IIб. *Теоремы* – равенства, являющиеся следствием аксиом при некоторых дополнительных условиях, ограничениях на входящие в эти равенства переменные: $a^2 + b^2 = c^2$, если a, b, c – длины соответствующих сторон прямоугольного треугольника.

III. *Определения*:

IIIа. *Явные определения*, вводящие новый символ: $1+1 \stackrel{\Delta}{=} 2$, $\forall a>0\ a^0 \stackrel{\Delta}{=} 1$.

IIIб. *Неявные определения – уравнения*:

$$2x+a \stackrel{\Delta}{=} 5,\quad x \stackrel{\Delta}{=} 1 + x^3,\ y' \stackrel{\Delta}{=} x^2 + y^2,\ \forall x: |x \cdot \ln x| \le 1,\ \sin(\varphi(x)) \stackrel{\Delta}{=} x \cdot \ln x,\ \ldots .$$

Изложенное выше описание отношения ***равенство*** является достаточным для нашего неформализованного изложения ниже, и мы будем заменять символы $\overset{\Delta}{=}$ и $\equiv$ на символ $=$ там, где это не вызовет недоразумений.

3.1. Множество элементов

Традиционная математика, элементы которой мы здесь излагаем, оперирует объектами четырёх типов: множествами, функциями, отношениями и свойствами. Объекты трёх из четырёх типов могут быть сведены к объектам четвёртого типа. Мы за исходное понятие принимаем понятие *множества.* Создатель теории множеств [32] немецкий математик Георг Кантор (3.3.1845 – 6.1.1918) говорил, что "*множество – это соединение в целое определённых различных объектов нашей интуиции или нашего мышления*". Мы называем эти объекты точками или элементами множества, и записи $a \in M$ и $b \notin M$ означают, что элемент a принадлежит множеству M, а элемент b не является элементом множества M.

Мы не будем ставить теорию множеств на аксиоматическую основу и перечислим некоторые принципы, не заботясь об их полноте и независимости.

1. Каждое множество определяется своими элементами: *множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, или в символической записи*:

$$(A = B) \cong \big((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)\big).$$

2. *Множество $\varnothing$, не содержащее никаких элементов, называется пустым* и вводится для формальной записи пустоты ($M=\varnothing$) и непустоты ($M \neq \varnothing$) множества M.

3. *Для любых множеств P и Q существует множество C, единственными элементами которого являются P и Q, т. е.* $C = \{P, Q\}$.

Из этого принципа существования двухэлементного множества при $P = Q$ следует существование одноэлементного множества.

4. *Как аксиому принимаем, что никакое множество не является элементом самого себя, т. е.* $\forall M \; M \notin M$.

В силу этого принципа теоремой будет выбор $a \neq \{a\}$ из альтернативы $a = \{a\}$ или $a \neq \{a\}$. Действительно, если мы обозначим множество $\{a\}$ через M, тогда из $a \in M = \{a\} = a$ следует, что $a \in a$.

Определение 3.1. *Множество A называется подмножеством множества M, если оно содержит элементы из множества M и никаких иных.*

Формальная запись $A \subseteq M$ означает нестрогое включение A в M, т. е. допускает совпадение множеств A и M. В этом случае множество A называется *несобственным* подмножеством множества M. Запись $A \subset M$ означает строгое включение, при котором $A \neq M$. В этом случае подмножество A называется *собственным* подмножеством множества M. Для каждого множества M по определению $\varnothing \subseteq M$.

5. *Существует множество* $P(M)$ *всех подмножеств множества* M, *называемое степенью множества* M.

Формальная запись $P(M) \overset{\Delta}{=} \{A\colon A \subseteq M\}$. Иногда степень множества обозначают символом 2^M, по аналогии с известным фактом из теории конечных множеств, где данным символом обозначается количество всевозможных подмножеств конечного множества M.

Конкретные множества мы будем задавать одним из следующих способов:

I. Непосредственным перечислением элементов: $S=\{A\}$, $M=\{\varnothing\}$, $Q=\{$ц, ы, п, л, ё, н о, к, $\varnothing$, ж, а, р, е, н, ы, й$\}$. Здесь M и S суть одноэлементные множества, а множество Q содержит 16 элементов.

II. Указанием характеристического, определяющего данное множество свойства: $P=\{y\colon 0<y<1\}$, $M\{x : R(x)\}$. Во множество M входят те и только те элементы x, которые обладают свойством $R(\,)$, см. Аксиому 7 п. 3.7.3.

III. $B=\{0,1,2,...,9\}$, $\boldsymbol{N}=\{1,2,3,...,n,...\}$, $S=\{a,b,c,...\}$. Три точки означают пропущенные или недописанные по каким-то причинам элементы, сущность которых ясна читателю из его предыдущего опыта, а множество S содержит элементы a, b, c и ещё какие-то элементы.

Упражнение 3.1. Перечислить все подмножества следующих множеств: $A=\{a,b\}$, $C=\{x,y,z\}$, $D=\{0,1,2,3\}$.

Верно ли утверждение, что количество N всех подмножеств A множества M, содержащего n элементов, равно 2^n (см. Определение 3.1)?

3.2. Алгебра множеств

Определение 3.2. *Множество C называется объединением* (*иначе - суммой*) *множеств A и B, если оно содержит все элементы множеств A и B и не содержит никаких иных элементов.*

Диаграмма Эйлера–Венна

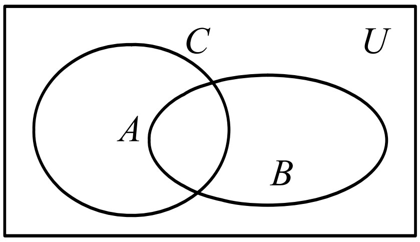


Рис.3.1

Формальная запись:

$$C \stackrel{\Delta}{=} A \cup B \stackrel{\Delta}{=} \{x\colon (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Леонард Эйлер (15.4.1707–18.9.1783) родился в Швейцарии. В 1726 – 1741 и в 1776 – 1783 годах жил и работал в России. Автор более 865 исследований по самым разнообразным вопросам математики, физики, механики и астрономии.

Джон Венн (1834–1923), английский логик, математик, первым ввёл термин “символическая логика”.

Определение 3.3. *Множество D называется пересечением* (*иногда произведением*) *множеств A и B, если оно содержит те и только те элементы множества A, которые принадлежат и множеству B.*

Формальная запись: $D \stackrel{\Delta}{=} A \bigcap B \stackrel{\Delta}{=} \{x : (x \in A) \,\&\, (x \in B)\}$.

Диаграмма Эйлера–Венна

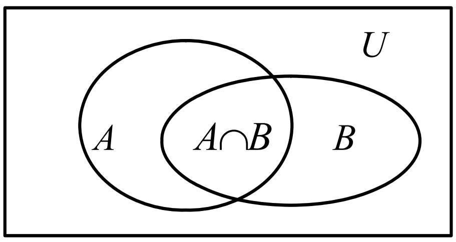


Рис.3.2

Две бинарные операции: объединение и пересечение вносят во множество U всех рассматриваемых нами множеств ***структуру алгебры*** (см. Главу 4) со следующими ниже свойствами:

I. ***Ассоциативность*** суммы и произведения:

$$(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C),$$
$$(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C).$$

II. ***Коммутативность*** суммы и произведения:

$$A \bigcup B = B \bigcup A, \quad A \bigcap B = B \bigcap A.$$

III. ***Дистрибутивность*** суммы по отношению к произведению:

$$(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C).$$

Здесь приоритетность (если таковую принять) операции умножения перед операцией сложения позволяет опустить скобки в правой части равенства:

$$(A \bigcup B) \bigcap C = A \bigcap C \bigcup B \bigcap C.$$

IV. ***Аддитивной единицей*** (нулём по сложению) и мультипликативным нулём служит пустое множество $\varnothing$:

$$\forall A \;\; A \bigcup \varnothing = A, \quad A \bigcap \varnothing = \varnothing.$$

V. Роль ***мультипликативной единицы*** (единицы по умножению) выполняет множество U: $\forall A \;\; A \bigcap U = A$.

Последнее условие является характеристическим для множества *U,* т. е. его можно принять за определение множества *U,* ибо

$$\forall B \; U \bigcup B = U \bigcup (B \bigcap U) = U \text{, т. е. } B \subset U.$$

Докажем, например, свойство III. Для этого достаточно показать, что из $x \in (A \bigcup B) \bigcap C \stackrel{\Delta}{=} M \Rightarrow x \in A \bigcap C \bigcup B \bigcap C \stackrel{\Delta}{=} P$ и из $y \in P \Rightarrow y \in M$.

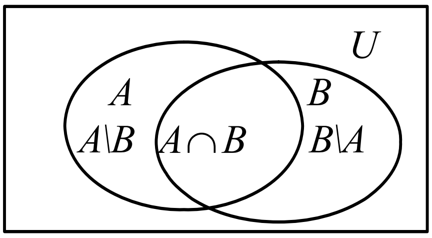
● Пусть $x \in M$, тогда

$$((x \in C) \,\&\, (x \in (A \bigcup B))) \Rightarrow (x \in C \,\&\, ((x \in A) \vee (x \in B))) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (((x \in C) \,\&\, (x \in A)) \vee ((x \in C) \,\&\, (x \in B))) \Rightarrow$$
$$\big((x \in C \bigcap A) \vee (x \in C \bigcap B)\big) \Rightarrow x \in \big((C \bigcap A) \bigcup (C \bigcap B)\big) \Rightarrow x \in P.$$

Аналогично доказывается, что из $y \in P \Rightarrow y \in M$.■

Доказательство остальных свойств (или их *проверку на примерах*) оставляем читателю в качестве упражнений.

Диаграмма Эйлера–Венна



Определение 3.4. ***Разностью*** *$A \setminus B$ множеств A и B* (*в другой терминологии – дополнением множества B до множества $A \cup B$*) *называется множество тех элементов множества A, которые не являются элементами множества B.*

Формальная запись:

$$A \setminus B \stackrel{\Delta}{=} \{x\colon\ (x \in A) \,\&\, (x \notin B)\}.$$

Определение 3.5. ***Симметрической разностью*** *множеств A и B называется множество* $A \dot{-} B \stackrel{\Delta}{=} (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B)$.

Утверждение 3.1. $A \dot{-} B = A \setminus B \bigcup B \setminus A$.

● Покажем, что $M \stackrel{\Delta}{=} A \dot{-} B \subseteq A \setminus B \bigcup B \setminus A \stackrel{\Delta}{=} P$ и $P \subseteq M$.

1) Пусть $x \in M$. Тогда $(x \in A \bigcup B) \& (x \notin A \bigcap B)$.

1.1) Если $x \in A$, тогда из $x \notin A \bigcap B \Rightarrow x \notin B$. Значит, $x \in A \setminus B$ и, следовательно, $x \in A \setminus B \bigcup B \setminus A = P$.

1.2) Пусть $x \in B$, тогда, аналогично, получим, что $x \in B \setminus A$. Итак, из $x \in M \Rightarrow x \in P$, т.е. $M \subseteq P$.

2) Пусть $y \in P$. В силу Опр. 3.4 $(A \setminus B) \bigcap (B \setminus A) = \varnothing$, значит, по Опр. 3.2 либо $y \in A \setminus B$, либо $y \in B \setminus A$.

2.1) Если $y \in A \setminus B$, то, по Опр. 3.4, $y \in A$ и $y \notin B$. Далее, по Опр.

3.2 и 3.3 имеем, что $y \in A \bigcup B$ и $y \notin A \bigcap B$. Значит, по Опр. 3.4, $y \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \stackrel{\Delta}{=} A \dot{-} B$.

2.2) Из $y \in B \setminus A$, аналогично, получаем, что $y \in M$.

Следовательно, $P \subseteq M$, это означает вместе с $M \subseteq P$, что $P = M$.■

Из Утверждения 3.1 получаем очевидное равенство $A \dot{-} B = B \dot{-} A$.

Гипотеза 3.1. Заданием множеств $A \bigcup B$, $A \bigcap B$ и $A \dot{-} B$ множества A и B однозначно не определяются.

Для доказательства гипотезы достаточно одного хорошего ***контрпримера.*** Для опровержения этой гипотезы необходимо показать, что для любых множеств *P, Q* и *T* множества *A* и *B* найдутся однозначно из следующих равенств: $P = A \dot{-} B$, $Q = A \bigcup B$ и $T = A \bigcap B$. Дерзайте, Читатель!

Упражнение 3.2. Доказать следующие тождества:

а) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$,

б) $A \setminus (B \bigcup C) = (A \setminus B) \bigcap (A \setminus C)$,

в) $A \setminus (A \setminus B) = A \bigcap B$,

г) $A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$,

д) $A \bigcap (B \dot{-} C) = (A \bigcap B) \dot{-} (A \bigcap C)$.

Упражнение 3.3. Доказать следующие эквивалентности:

а) $(A \bigcup B) \subseteq C \Leftrightarrow (A \subseteq C) \& (B \subseteq C)$;

б) $A \subseteq (B \bigcap C) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \& (A \subseteq C)$;

в) $A \dot{-} B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$;

г) $A \bigcap B = \varnothing \Leftrightarrow A \bigcup B = A \dot{-} B$;

д) $A \dot{-} B = C \Leftrightarrow B \dot{-} C = A \Leftrightarrow C \dot{-} A = B$.

Определение 3.6. *Разбиением множества M называют представление этого множества в виде объединения непересекающихся его подмножеств*:

$$M = M_1 \bigcup M_2 \bigcup \ldots \bigcup M_k, \text{ где } M_i \bigcap M_j = \varnothing, \text{ если } i \neq j.$$

Вопрос Читателю: сколько различных разбиений имеет пятиэлементное множество $M = \{a, b, c, d, e\}$?

3.3. Отношения на множествах

Так как изначально во множествах никакого порядка не предполагается: $\{b,\ 0,\ p\} \overset{\Delta}{=} \{p,\ 0, b\} \overset{\Delta}{=} \{b,\ p,\ 0\} = \cdots$, то мы формулируем

Определение 3.7. *Упорядоченной парой элементов a и b называется множество* $\{a, \{a, b\}\}$*, обозначенное для краткости символом* (a, b)*, где a называют первым элементом пары* (a, b) *и b – вторым.*

Аналогично определяется для трёх элементов *упорядоченная тройка*: $(a,b,c) \overset{\Delta}{=} \{a, \{b,\ (b, c)\}\}$ и, индуктивно, - упорядоченная *n*-ка: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \overset{\Delta}{=} \{a_1, \{a_1, (a_2, \ldots, a_n)\}\}$.

Упорядоченную *n*-ку называют также *n*-набором, *n*-кортежем и пр.

Гипотеза 3.2. *Теоремой является утверждение*

$$((a, b) = (c, d)) \Rightarrow \left(a = c \,\&\, b = d\right).$$

Утверждение, обратное данному, почти очевидно. Действительно, из $(a = c)\&(b = d) \Rightarrow \{a,b\} = \{c,d\}$ и далее $\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$. Эти рассуждения дают начало проверки гипотезы: по определению пары из $(a, b) = (c, d) \Rightarrow \{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$. Теперь по определению равенства множеств либо $(a = c)\&(\{a, b\} = \{c, d\})$, либо $a = \{c, d\}$ и $c = \{a, b\}$. Далее, … *дерзайте*, ***Читатель*!** (Или см. [7, с. 82], [22, с. 9], [53, с. 180]).

Определение 3.8. *Прямым произведением множеств A и B называется множество всех тех упорядоченных пар* (a, b)*, где* $a \in A$ *и* $b \in B$.

Формальная запись: $A \times B \overset{\Delta}{=} \{(a, b)\colon a \in A \,\&\, b \in B\}$.

Это множество называют также декартовым произведением множеств *A* и *B*.

Сами множества *A* и *B* в отношении к их прямому произведению называют первой и, соответственно, второй проекцией:

$$A \overset{\Delta}{=} \mathrm{Pr}_I(A \times B),\ B \overset{\Delta}{=} \mathrm{Pr}_{II}(A \times B).$$

Наконец, множество $\{a\} \times B$ назовём слоем над *a* в прямом произведении $A \times B$ для $a \in A$.

Пример 3.1. Числовая плоскость *XOY* есть прямое произведение двух числовых прямых.

Определение 3.9. *Бинарным отношением* ρ *между множествами A и B называется всякое подмножество* ρ *прямого произведения* $A \times B$

этих множеств.

Для всякого отношения $\rho \neq \varnothing$ между множествами A и B можно построить *обратное к* ρ *отношение* ρ^{-1}, определяемое формулой

$$\rho^{-1} \overset{\Delta}{=} \{(b,a)\colon (a,b) \in \rho \subseteq A \times B\} \subseteq B \times A.$$

Если $A = B$, то говорят, что бинарное отношение $\rho \subseteq A \times A$ задано во множестве A. Аналогично определяется декартово произведение n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и n-арные отношения между ними. Если все сомножители декартового произведения равны, то произведение $A \times A \times \cdots \times A$ называется декартовой степенью множества A.

Подмножество $D_\rho \subseteq A$, определяемое формулой

$$D_\rho \overset{\Delta}{=} \{x\colon \exists y\, (x, y) \in \rho \subseteq A \times B\} \subseteq A,$$

называют областью (множеством) определения отношения ρ, т. е. $D_\rho = \mathrm{Pr}_I\, \rho$. Если $D_\rho = A$, то говорят, что ρ задано на множестве A.

Аналогично, подмножество R_ρ, определяемое формулой

$$R_\rho \overset{\Delta}{=} \{y : \exists x\, (x, y) \in \rho \subseteq A \times B\} \subseteq B,$$

называют множеством значений бинарного отношения ρ, т. е.

$$R_\rho = \mathrm{Pr}_{II}\, \rho \subseteq B.$$

Пример 3.2. Пусть $A=\{-1, 0, 2, 3\}$, $B = \{1, -2, 3\}$. Тогда $A \times B = \{(-1, -2), (-1, 1), (-1, 3), (0, -2), (0, 1), (0, 3), (2, -2), (2, 1), \ldots, (3, 3)\}$, $A \times \{3\} = \{(-1, 3), (0, 3), (2, 3), (3, 3)\}$, $\{2\} \times B = \{(2, -2), (2, 1), (2, 3)\}$ (см. Рис. 3.4).

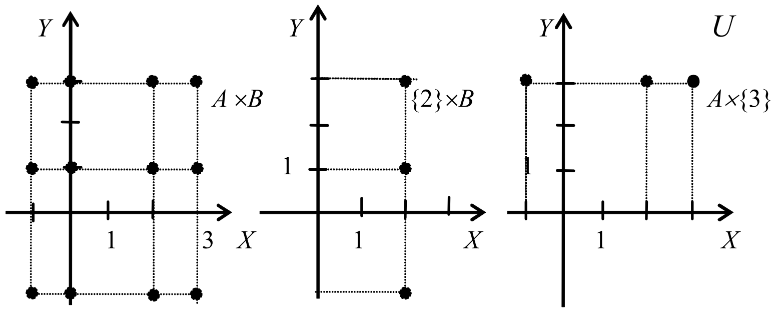


Рис. 3.4

Определение 3.10. *Полным образом (прообразом) в отношении*

$\rho \subseteq A \times B$ *элемента* $a \in A$ (*элемента* $b \in B$) *называют подмножество* $\rho(a) \subseteq B$ $(\rho^{-1}(b) \subseteq A)$, *определяемое формулой*

$$\rho(a) \stackrel{\Delta}{=} \{y\colon (a, y) \in \rho\} \; (\rho^{-1}(b) \stackrel{\Delta}{=} \{x\colon (x, b) \in \rho\}).$$

Иллюстрацию этих множеств даёт следующий ниже Рисунок 3.5.

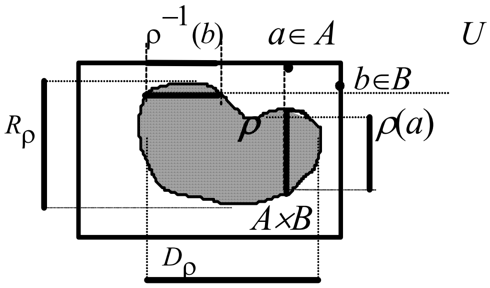


Рис. 3.5

Графиком Gr_ρ отношения $\rho \subseteq A \times B$ называют объединение по всем элементам $a \in D_\rho$ слоев вида $D_\rho \times \rho(a)$ над полными образами в данном отношении $\rho \subseteq A \times B$ элементов $a \in D_\rho$ на прямом произведении $D_\rho \times R_\rho$, т. е. $Gr_\rho = \bigcup_{a \in D_\rho} (D_\rho \times \rho(a)) \subseteq D_\rho \times R_\rho$.

Определение 3.11. *Бинарное отношение* $\rho \subseteq A \times B$ *называется функциональным в точке а, если образ* $\rho(a) \subseteq B$ *есть одноэлементное множество. Функциональное в каждой точке а области определения* D_ρ *бинарное отношение* ρ *называется отображением или функцией.*

Употребительны также следующие термины: соответствие, преобразование, правило, морфизм, операция, оператор, закон, функционал, стрелка и др. Так, операцией (n-арной) чаще называют функцию, заданную на $A \times A \times \cdots \times A$ со значениями в A, знак (термин) стрелка используется в схемах и диаграммах: $A \xrightarrow{f} B$, $f\colon A \to B$, $f\colon a \to b$, или как на Рис. 3.6. Для каждой функциональной стрелки f, определённой *на а со значением b*, существует функциональная стрелка g, определённая на b *со значением а*: (f: $a \to b$)$\Leftrightarrow$(g: $b \to a$). Поэтому при $f(a)=b$ и $g(b) = a$ пишут $f \stackrel{\Delta}{=} g^{-1}$ и $g = f^{-1}$: $f(f^{-1}(b)) = b$ и $g(g^{-1}(a)) = a$.

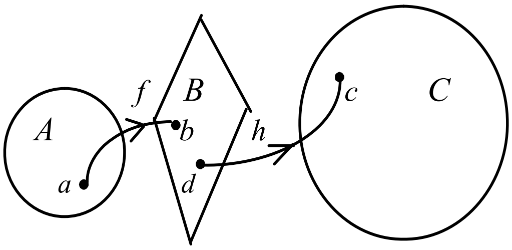


Рис. 3.6

Попытки доказать сформулированное выше утверждение уведут любознательного читателя глубоко в основания теории множеств и откроют ему бездну неизведанного, и пусть напутствием ему будет седьмой дополнительный параграф этой главы.

3.4. Спецификация отношений

Перечислим основные классы отношений декартового произведения $A \times A$, т. е. отношений на (во) множестве A. Далее $(a\rho b) \overset{\Delta}{=} ((a, b) \in \rho)$.

I. Бинарное отношение $I_A \overset{\Delta}{=} \{(a, a) : a \in A\}$ называется *тождественным отношением* на множестве A (его называют также *диагональю* множества A).

II. Бинарное отношение ρ называется *рефлексивным*, если из $x\rho a$ и $b\rho y$ следует $a\rho a$ и $b\rho b$, соответственно,

III. Бинарное отношение ρ называется *антирефлексивным* (иррефлексивным, как в [99, с. 485]), если из $a\rho y$ и $x\rho b$ следует $y \neq a$ и $x \neq b$, соответственно.

IV. Бинарное отношение ρ называется *симметричным*, если из $b\rho a$ следует $a\rho b$.

V. Бинарное отношение ρ называется *транзитивным*, если из $a\rho b$ и $b\rho c$ следует $a\rho c$.

VI. Бинарное отношение ρ назовём *асимметричным*, если из $(a, b) \in \rho$ следует $(b, a) \in \rho$, т. е. $a\rho b \Rightarrow \neg\, b\rho a$.

VII. Бинарное отношение ρ назовём *антисимметричным,* если из $a\rho x$ и $y\rho a$ следует $x = y = a$.

VIII. Бинарное отношение ρ назовём *определённым на множестве A*, если $\forall a \in A \exists \{c, b\} \subset A$: $a\rho c \vee b\rho a$, т. е. каждый элемент a из A находится в отношении ρ хотя бы с одним элементом множества A.

IX. Бинарное отношение ρ назовём *всюду определённым* (*нестрого линейным*), если для каждой пары $(a, b) \in A \times A$ либо $a\rho b$, либо $b\rho a$, либо и $a\rho b$ и $b\rho a$.

X. Бинарное отношение ρ назовём *линейным* (*строго линейным*), если

$\forall(a,b)\in A\times A$, $a\neq b$, либо $(a,b)\in\rho$, либо $(b,a)\in\rho$.

Отношение ρ на множестве A можно изображать на рисунке-графе в виде точек-элементов из A и стрелок, соединяющих точки, находящиеся в отношении ρ. Так, на Рис. 3.7 изображены:

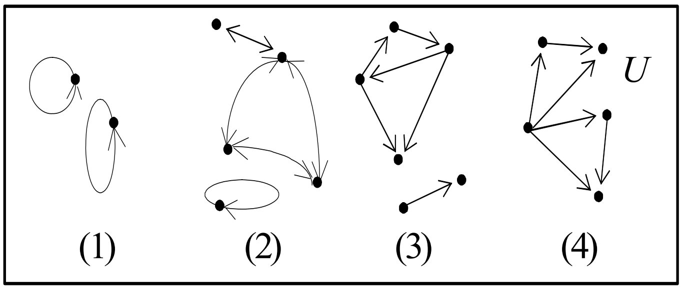


Рис. 3.7

1) – граф тождественного отношения, состоящий из петель, (2) – граф симметричного отношения, он не ориентирован, (3) – граф антирефлексивного отношения без петель. В графе (4) транзитивного отношения каждая исходящая из одной точки ломаная из стрелок замкнута по “правилу сложения векторов”.

Теорема 3.1. *Если бинарное отношение $\rho\subseteq A\times A$ симметрично и транзитивно, тогда оно и рефлексивно.*

●Дано: 1) $a\rho b\Rightarrow b\rho a$, 2) $(a\rho b)\&(b\rho c)\Rightarrow a\rho c$. Полагая в 2) $c=a$, получаем 3) $(a\rho b)\&(b\rho a)\Rightarrow a\rho a$. В силу 1) посылка в 3) есть истинное высказывание, следовательно, является истинным в 3) и заключение $a\rho a$. (Ср. [57, с. 28]). ■

На Рис. 3.8 приведены графики бинарных отношений ρ на $A\times A$: *а*) –тождественного отношения I_A, (*б*) – рефлексивного отношения ρ_1, $\rho_1\bigcap I_A\neq\varnothing$, (*в*) – антирефлексивного ρ_2, $\rho_2\bigcap I_A\neq\varnothing$, (*г*) – симметричного отношения ρ_3, (*е*) – антисимметричного отношения ρ_5, для которого $\rho_5\bigcap I_A\supseteq\varnothing$, и (*д*) – асимметричного отношения ρ_4, $\rho_4\bigcap I_A=\varnothing$.

Легко показать, что справедливо

Утверждение 3.2. *Асимметричное отношение ρ_4 на $A\times A$ является и антирефлексивным.*

Обратное утверждение, как показывает Рис. 3.8, *в*, в общем случае не имеет места.

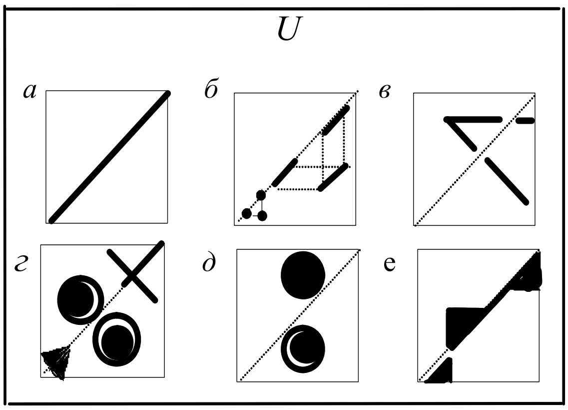


Рис. 3.8

Одним из важнейших отношений на множествах является *отношение эквивалентности*, обладающее свойствами симметричности и транзитивности и, как следует из Теоремы 3.1, свойством рефлексивности. В качестве символов этого отношения используются следующие знаки:

1) ~ (a~b), 2) $=$ $(c = x)$, 3) $\overset{x}{\equiv}$ $(P_n(x)\overset{x}{\equiv}Q_n(x))$, 4) $\equiv$ $(-(a+b)) \equiv (-a-b)$,
5) $\equiv \mathrm{mod}$ $\left(7 \equiv 2 \,\mathrm{mod}\, 5\right)$, 6) $\Leftrightarrow$ и другие.

Пример 3.3. Пусть на плоскости дана прямая l. Точки P и Q будем считать эквивалентными, если они лежат на прямой l или на прямой l', параллельной прямой l. Можно писать $P\overset{l}{\sim}Q$ или $P \equiv Q \,\mathrm{mod}(l)$. Легко показать, что это отношение является симметричным, транзитивным и рефлексивным.

Пример 3.4. Во множестве Z целых чисел введём отношение эквивалентности между числами m и n по равенству остатка от деления их, например, на 5. Тогда 5~0~10~ … ~5n, 6~1~11~…~5n+1,…, 4 ~ 9 ~ 14 ~ , …, ~$5n+4$, $n \in N$. В этом случае обычно пишут так: $5n+k\equiv k(\mathrm{mod}5)$, где $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Пример 3.5. Во множестве высказываний эквивалентны все ложные высказывания, как и эквивалентны между собой все истинные высказывания.

Отношение эквивалентности на M разбивает множество M на непересекающиеся подмножества, называемые классами эквивалентности. Классы эквивалентности множества M образуют множество $M/\sim$. Так, в примере 3.5 всего два класса эквивалентности $\{И\}$ и $\{Л\}$, к первому принадлежат истинные высказывания, ко второму – ложные. В Примере

3.4 пять классов эквивалентности, а в Примере 3.3 каждая точка S плоскости принадлежит своему классу эквивалентности, к определяемому этой точкой классу – прямой l', проходящей через точку S параллельно данной прямой l.

Утверждение 3.3. Всякое разбиение множества M на непересекающиеся подмножества определяет на M некоторое отношение эквивалентности.

● Пусть $M = \bigcup_i M_i$, $M_i \cap M_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Отношение ρ на M определим следующим образом: будем считать $a\rho b$ тогда и только тогда, когда $\exists i_0$: $\{a, b\} \subseteq M_{i_0}$. Очевидно, что

1) $a\rho a$, ибо $\forall x \exists k_0 \;\; x \in M_{k_0}$;

2) если $a\rho b$, то и $b\rho a$, ибо оба эти условия означают одно и то же: для некоторого k $\{a,b\} \subseteq M_k$;

3) если $a\rho b$ и $b\rho c$, то это означает, что $\{a,b\}$ и $\{b,c\}$ входят в некоторое M_{i_0} и, следовательно, $\{a,c\} \subset M_{i_0}$, т. е. $a\rho c$.

Таким образом, отношение ρ на M является 1) рефлексивным, 2) симметричным и 3) транзитивным. Следовательно, это отношение на M есть отношение эквивалентности. ■

Упражнение 3.5. Пусть $M=\{1, 2, 3, \ldots, 7\}$. Выберите одно из возможных разбиений множества M на три подмножества M_1, M_2 и $M_3 = \{1, 7\}$. На квадрате 7×7 постройте график отношения эквивалентности ~ на M в соответствии с Вашим выбором разбиения множества M.

Интересный пример даёт применение понятия эквивалентности при формализованном определении множества Q^+ положительных рациональных чисел. Для этого на множестве $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ определим отношение эквивалентности правилом $(a, b) \sim (x, y)$, если $ay = bx$. Класс эквивалентности, определяемый парой (a,b), обозначим символом $[(a, b)]$ и назовём положительным рациональным числом. Например, каждая из эквивалентных пар (1, 3), (2, 6), (3, 9), …, $(n, 3n)$ ... определяет один и тот же класс эквивалентности [(1,3)], записываемый в привычных символах как $\frac{1}{3}$. При этом очевидно, что $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ – это различные имена одного и того же рационального числа, и потому $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, например.