3.5. Отношение порядка на множестве

Структура порядка может быть задана как на всём множестве *M*, так и на некотором его собственном подмножестве $A \subset M$.

Определение 3.12. *Рефлексивное антисимметричное и транзитивное отношение* $\rho \subset M \times M$ *называется отношением нестрогого порядка на* (*во*) *множестве M, а транзитивное асимметричное отношение* φ *на множестве M назовём отношением порядка на M, если при этом отношение* φ *линейно на M, т. е. определено для всех пар* (a,b) *из* $M \times M$, $a \neq b$, *то отношение* φ *называется линейным порядком на множестве M. В противном случае множество M называется частично упорядоченным.*

Примером частичного нестрогого порядка является отношение $\subseteq$ включения (теоретико-множественного) на множестве *P*(*M)* всех подмножеств множества *M* или на всём множестве *U* рассматриваемых нами множеств.

Пример 3.6. На Рис. 3.9 построен граф отношения порядка по включению $\subset$ на множестве $P(M)$ для $M = \{a, b, c\}$

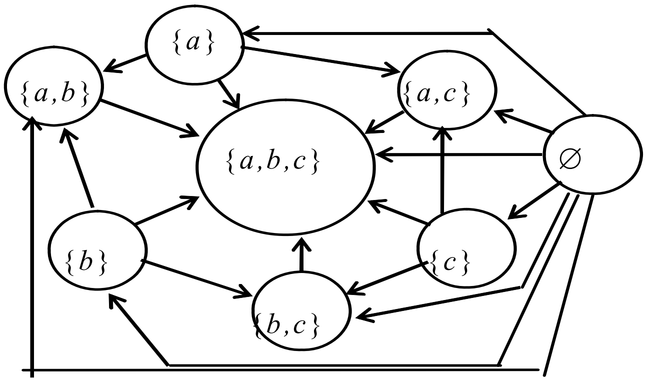

Рис. 3.9

Пусть на *M* введена структура линейного порядка ρ так, что для каждого двухэлементного подмножества $\{a,b\}$ будет либо $(a,b) \in \rho$, либо $(b,a) \in \rho$. Мы будем писать $a \overset{\rho}{\prec} b$ вместо $(a,b) \in \rho$ или ещё короче так: $a \prec b$, если речь идёт об одном порядке, и будем говорить, что *a* меньше *b* или *b* больше *a*, или *a* предшествует *b*, или *b* следует за *a* относительно порядка ρ. Каждая пара (a,b), где $a \prec b$, определяет в *M* подмножество $O(a, b)$ таких *x*, что $a \prec x$ и $x \prec b$. Множество $O(a,b)$ назовём (a,b)-окрестностью каждой его точки *x* или (a, b)-интервалом. Для множества $A \stackrel{\Delta}{=} [a,b] \stackrel{\Delta}{=} \{a, b\} \cup O(a, b)$ элементы *a* и *b* назовём крайними: *a*-наименьшим, *b*- наибольшим в *A* и будем писать $a \stackrel{\Delta}{=} \inf A$, $b \stackrel{\Delta}{=} \sup A$.

Множество M называется *вполне упорядоченным*, если каждое его непустое подмножество имеет наименьший элемент.

Подмножество $D \subset M$ назовём *дискретным*, если для каждого элемента d из D, кроме крайних в D, найдётся пара $(a,b) \in M \times M$ такая, что $O(a,b) = \{d\}$.

Определение 3.13. *Линейно упорядоченное множество **F** назовём конечным, если оно или пусто, или одноэлементно, или каждое его подмножество, кроме пустого и одноэлементных, имеет два крайних элемента: наименьший и наибольший. Линейно упорядоченное множество **In** назовём бесконечным, если хотя бы одно его подмножество имеет менее двух крайних элементов.*

Пример 3.7. Для всякого действительного числа a конечным является множество $F \triangleq \{x : |x| < |a|, x \in \boldsymbol{Z}\}$ и бесконечным будет множество $\boldsymbol{In} \triangleq \{x : |x| \geq |a|, x \in \boldsymbol{Z}\}$.

Упражнение 3.6. Доказать бесконечность множества

$$A = \{a_n : a_n = 1 + (-1)^n / n,\ n \in \boldsymbol{N}\},$$

если порядок в A есть естественный порядок из $\boldsymbol{R}$. (О множестве $\boldsymbol{N}$ см. в п. 3.6).

Определение 3.14. *Линейно упорядоченное множество B называется всюду плотным, если для каждого его подмножества* $\{a, b\}$, $a \prec b$, *найдётся такой элемент c∈B, что* $a \prec c \prec b$.

Например, множество рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$ всюду плотно по отношению естественного порядка в $\boldsymbol{Q}$ из $\boldsymbol{R}$.

Утверждение 3.4. *Множество M, бесконечное относительно линейного порядка* ρ *на M, будет бесконечным и относительно любого иного линейного порядка на M.*

Это утверждение, которое мы оставляем без доказательства, говорит об инвариантности понятия *бесконечности множества* относительно замены порядка на этом множестве и, следовательно, о возможности определения бесконечного множества без привлечения понятия порядка. Впервые это сделано (см. [15, с. 265]) Рихардом Дедекиндом (1.10.1831–12.02.1916), однако корректность такого определения ставится под сомнение результатами автора, изложенными в Главе 6.

С другой стороны, для всюду плотного, относительно порядка ρ, множества M можно указать некоторый порядок φ, относительно которого множество M будет иметь дискретную структуру. Обо всём этом немного подробнее мы скажем в дополнительном п. 3.7.

3.6. Функция. График функции. Монотонность функции. Непрерывность функции

3.6.1. Функция и её график

В этом параграфе будем по умолчанию рассматривать функции $f\colon X \to Y$, заданные *на* X, т. е. будем считать, что $D_f = X$.

Определение 3.15. *Для функции* $f\colon X \to Y$ *множество*

$$Gr_f \triangleq \{(x,\ f(x))\colon\ x \in X\}$$

назовём графиком функции f, а равенство $y = f(x)$, $x \in X$, *назовём уравнением этого графика* (ср. [2, с. 106]).

Если, например, $X \times Y \subseteq \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$, то каждую пару (a,b), где $b = f(a)$, можно считать координатами точки $P(a,b)$ в некоторой системе координат на плоскости. Поэтому можно говорить, что график Gr_f функции f: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ в каждой системе координат представляется некоторым множеством L_f точек плоскости. Это множество L_f мы будем называть *представлением* (*изображением*) графика Gr_f функции f в данной системе координат, а уравнение $y = f(x)$, $x \in X \subseteq \boldsymbol{R}$, графика Gr_f будет при этом и уравнением множества L_f точек $P(a,b)$, $b = f(a)$, в данной системе координат. Например, функция $f\colon [0, 2\pi) \to \boldsymbol{R}$, где $f(x) = ax + b$, имеет график $Gr_f = \{(x, ax+b)\colon x \in [0, 2\pi)\} \subset \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$. В декартовой системе координат этот график представлен отрезком прямой без одной концевой точки, а в полярной системе координат – частью спирали Архимеда [1].

Для каждого $a \in X$ при отображении $f\colon X \to Y$ существует отноше-

[1] Архимед (около 287 – 212 гг. до н.э.) – древнегреческий математик, физик, механик, автор многочисленных изобретений и открытий: архимедов винт, рычаг Архимеда, военные метательные машины и т.п. Архимед первым вычислил площадь параболического сектора, предвосхитив открытое 19 столетий спустя интегральное исчисление, он же впервые в науке оценил погрешность вычисления значений числа π и опроверг мнение о существовании *самых больших чисел* аксиомой Архимеда: *отложив достаточное число раз меньший из двух отрезков, всегда можно получить отрезок, превосходящий больший из них.*

ние $f_a^{-1}: f(a) \to a$, называемое обратным к f на a, т. е. $f_a^{-1}(f(a)) = a$ и $f(f_a^{-1}(b)) = b = f(a)$. Возникает следующий вопрос: для какой функции $f\colon X \to Y$ обратное отношение $f^{-1}\colon Y \to X$ будет функцией для всех $f(x)$, $x \in X$? Из определения функции следует, что отношение f^{-1}, рассматриваемое как подмножество в $Y \times X$, должно быть функционально для всех $y = f(x)$, $x \in X$, т. е. полный образ $f^{-1}(b) \subset X$ должен быть одноэлементным множеством для каждого $b \in f(X)$.

Итак, справедливо

Утверждение 3.5. *Функция* $f\colon X \to Y$ *обратима на X, если из* $f(t) = f(x) = y$ *следует* $x = t$ *для каждого* $x \in X$.

Обратимую функцию называют ещё *инъективной*, или *инъекцией* (из X в Y). Функцию f: $X \to Y$ называют *сюръективной* или *сюръекцией*, если $f(X) = Y$, т. е. *сюръекция* есть "отображение на Y". Наконец, функция $f{:}X \to Y$ называется *биективной* или *биекцией,* если она является обратимым отображением на Y. На Рис. 3.10 приведены графики таких функций.

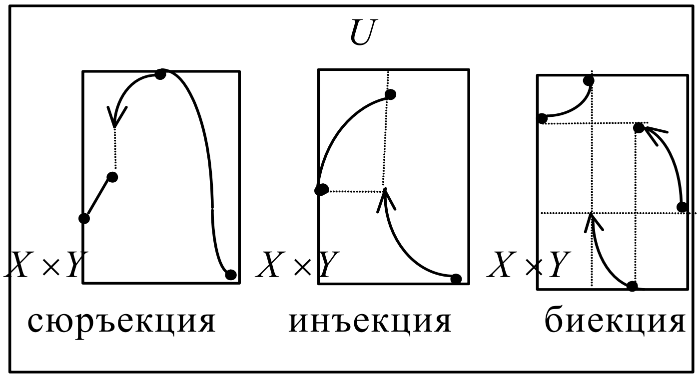

Рис. 3.10

Ещё раз подчеркнём, что график Gr_f функции $f\colon X \to Y$ определяется только самой функцией, а множество L_f зависит от употребляемой для представления графика Gr_f системы координат.

3.6.2. Композиция функций

Ниже будем обозначать символами D_f и R_f область определения и, соответственно, множество значений функции f, т. е. $f\colon D_f \to R_f$ есть сюръекция, заданная *на* множестве D_f.

Пусть даны множества A, B, C и функции $f\colon A \to B$ и $h\colon B \to C$.

Может оказаться, что $R_f \bigcap D_h$ не пусто, т. е. $\exists b \in R_f$, $R_f \bigcap D_h \subset B$ (см. Рис. 3.6), тогда определяется посредством f и h функция $g\colon \widetilde{A} \to C$, задаваемая формулой $g(a) = h(f(a))$, $a \in \widetilde{A} \subseteq A$.

Именно в связи с этой формулой принято обозначение $h \circ f$ для функции $g\colon A \to C$, называемой также композицией, произведением, суперпозицией и т. д. функций f и h. Если $A = B$, то композицию $h \circ f : A \to A \to C$ называют сложной функцией, заданной на A.

Если, например, $f\colon A \to B$ и $h\colon B \to C$ являются биекциями, тогда биекциями будут композиция $g \stackrel{\Delta}{=} h \circ f : A \to C$ и отображение $g^{-1} : C \to A$, определяемое формулой $g^{-1} = f^{-1} \circ h^{-1}$(см. Рис. 3.11).

Доказательства мы оставляем читателю в качестве упражнений.

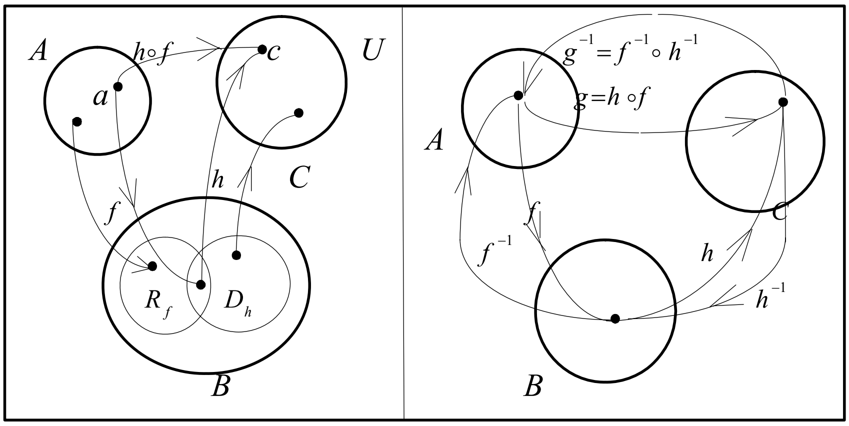

Рис. 3.11

Пример 3.8. Если отображение $f : (0, 1] \to [1, \infty)$ задано формулой $f(x) = \frac{1}{x}$, а функция $h : [1, \infty) \to [-1,\ 1]$ - правилом $h(t) = \cos t$, тогда сложная функция $g(x) = h(f(x))$ задана формулой $g(x) = \cos \frac{1}{x}$, $x \in \left(0, 1\right]$. Уравнение $y = \cos \frac{1}{x}$ представляет *график* функции *g* в декартовой системе координат *XOY* *кривой* L_g, которая является образом на полуинтервале (0, 1] косинусоиды $y = \cos t$ на бесконечном промежутке $[1, \infty)$.

3.6.3. Монотонность функции

Пусть X – множество со структурой линейного порядка ρ, и, если $(a, b) \in \rho$, мы, как и выше, будем писать $a \overset{\rho}{\prec} b$. Всякая инъекция $f\colon X \to Y$ индуцирует в $f(X) \subseteq Y$ структуру линейного же порядка φ, когда, например, $f(a) \overset{\varphi}{\prec} f(b)$, если $a \overset{\rho}{\prec} b$. Если при этом на множестве Y задана структура линейного порядка ψ, то инъекция f называется убывающей на X, если порядок ψ на Y противоположен порядку φ, индуцируемому в $f(X)$ отображением f. Инъекцию $h: X \to Y$ называют возрастающей на X, если порядки φ на $f(X)$ и ψ на Y совпадают. Таким образом, для убывающей инъекции f из $a \overset{\rho}{\prec} b$ следует $f(b) \overset{\psi}{\prec} f(a)$, а для возрастающей инъекции h из $a \overset{\rho}{\prec} b$ следует $h(a) \overset{\psi}{\prec} h(b)$.

Возрастающие и убывающие функции на интервале (a, b) составляют класс F *монотонных* функций, включаемый как подмножество во множестве *нестрого монотонных* функций, состоящее, в свою очередь, из *неубывающих* на (a, b) функций, определяемых условием $a < c < x < b \Rightarrow f(c) \le f(x)$, и *невозрастающих* функций с условием $c < x \Rightarrow f(c) \ge f(x)$. Если функция $f: X \to Y$ задана на дискретном множестве X со значениями в линейно упорядоченном множестве Y, то множество X можно разбить на подмножества, на каждом из которых функция принадлежит к одному из перечисленных ниже 9 типов функций в отношении монотонности (см. Рис. 3.12).

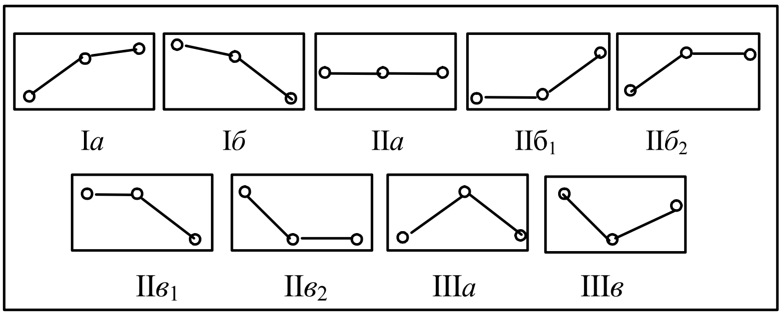

Рис. 3.12

I. *Монотонные*:

I*а*) возрастающие, когда из $a < x < b \Rightarrow f(a) < f(x) < f(b)$,

I*б*) убывающие, когда из $a < x < b \Rightarrow f(b) < f(x) < f(a)$.

II. *Нестрого монотонные***:**

II*а*) постоянные, когда $\forall x \in (a, b) \;\; f(a) = f(x) = f(b)$,

II*б*) неубывающие, когда из $a < x < c < t < b \Rightarrow$

либо II$б_1$) $f(a) \le f(x) = f(c)) < f(t) \le f(b)$,

либо II$б_2$) $f(a) \le f(x) < f(c) = f(t) \le f(b)$, II$в$) невозрастающие, когда из $a < x < c < t < b \Rightarrow$

либо II$в_1$) $f(a) \geq f(x) = f(c) > f(t) \geq f(b)$,

либо II$в_2$) $f(a) \geq f(x) > f(c) = f(t) \geq f(b)$.

III. *С экстремальным значением***:**

IIIa) с максимумом $f(c)$, когда $f(x) < f(c)$, $\forall x \in ([a, c) \bigcup (c, b])$,

III$б$) с минимумом $f(c)$, когда $f(c) < f(x)$, $\forall x \in ([a, c) \bigcup (c, b])$.

Как показывает Рис 3.12, график Gr_f функций каждого типа может быть представлен тремя точками.

Допущение возможности “скачков графика” функции (точные формулировки см. ниже) в (a, b)-интервале увеличивает до 25 количество различных типов поведения в отношении монотонности функции $f\colon X \to Y$, где X и Y суть дискретные множества.

Если множества X и Y всюду плотны, то в области определения X функции $f\colon X \to Y$ могут быть точки “неопределённости типа функции” в отношении монотонности, т. е. когда для $x = c$ нельзя указать (a,b)-интервал, $a < c < b$, на котором функцию f можно было бы отнести к какому-то одному определённому из девяти типов.

Пример 3.9. Пусть функция f: $\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R}$ определена на множестве $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел следующей формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad x = 0, \\ x \cdot \sin x^{-1}, & \textit{если} \quad 0 < |x| < \pi. \end{cases}$$

Для этой функции у точки x=0 не существует (a,b)-окрестности, в которой она имела бы конечное количество экстремумов.

Упражнение 3.7. Описать поведение в (a, b)-окрестности точки c в отношении монотонности функции h: $X \to Y$, где X – дискретно, а Y – всюду плотно.

Для функции $f\colon X \to Y$, где X, Y суть дискретные множества, наличие скачка графика функции f в точке $x = c$, $c \in O(a, b)$ и $\{a, c, b\} = O(p, q)$, $\{p, q\} \subset X$, определяется условием $A \neq B$, где $A \triangleq \{f(x)\colon x \in [a,b] \subset X\} \subset Y$ и $B \triangleq \{y\colon v \leq y \leq w,\ v = \inf A,\ w = \sup A\}$.

Скачок графика функции $f\colon X \to Y$ в точке x=c может быть “слева или справа” (в отношении порядка ρ на X) от точки x=c. Скачок графика может быть “вверх или вниз” от точки (в отношении порядка ψ на Y).

Замечание 3.1. Понятие конечности-бесконечности множества относительно порядка во множестве *M* и понятие конечности-бесконечности относительно нормы, метрики, расстояния (см. п. 4.6), на множестве *M* характеризуют разные структуры на множестве и потому несравнимы. Они несравнимы до тех пор, пока это как-то не оговорено (см. также [3, с. 33-43]).

3.6.4. Непрерывность

Элементарное рассмотрение графика функции завершит *фундаментальное* в анализе функций

Определение 3.16. *Функция* $f\colon X \to Y$, *где X и Y суть линейно упорядоченные множества, называется непрерывной в точке* $x = c$, *если в X существует такая* (a,b)-*окрестность точки c, что для каждого* (p,q)-*интервала,* $a < p \le c \le q < b$, *множество* $A = \{f(x)\colon p \le x \le q\} \subset Y$ *совпадает со множеством*

$$B = \{y : v \le y \le w,\ v \triangleq \inf A,\ w \triangleq \sup A\} \subset Y .$$

Непрерывная в каждой точке из X функция f называется непрерывной на X. Функция $f\colon X \to Y$, *не являющаяся непрерывной в точке* $x = c$, *называется разрывной в этой точке.*

Если в Определении 3.16 допустить $c = q = b$ $\left(c = p = a\right)$, то получим определение *непрерывности* в точке $x = c$ *слева* (*справа*).

Контрпример. Функция $f\colon X \to Y$, заданная на дискретном множестве *X* со значениями во всюду плотном множестве *Y*, будет разрывной в каждой точке из *X*.

Обратите внимание, наш читатель, на то, что понятие непрерывности и разрывности функции введены вне связи с непрерывностью самих множеств *X* и *Y*. Непрерывность множества *X* мы опишем, как сделано выше с таковым понятием для функции, сначала в точке $x = c$.

Всякая точка $c \in O(a,b)$ линейно упорядоченного множества *X*, $X \supset O(a,b)$, разбивает это множество на два непустых подмножества *A* и *B* такие, что $A \bigcup B = X$ и $A \bigcap B = \varnothing$ (см. Определение 3.6). При этом сама точка *c* может входить либо в *A*, либо в *B*, т. е. либо $A = \{x : x \le c\}$ и $B = \{y : c < y\}$, либо $A = \{x : x < c\}$ и $B = \{y : c \le y\}$, так что в первом случае $c = \sup A$ и $c = \inf B$ – во втором.