Для дискретного множества X в первом случае в B найдётся единственный такой элемент b, что $\forall y \in B \setminus \{b\}\ b < y$, $O(c, b) = \varnothing$, во втором случае в A найдётся такой элемент a, что $\forall x \in A \setminus \{a\}\ \ x < a$ и $O(a, c) = \varnothing$
.

Условимся называть классы A и B разбиения X левым (нижним) и, соответственно, правым (верхним). Так что для любого разбиения дискретного множества X на левый и правый классы в левом классе есть наибольший элемент $a = \sup A$ и в правом наименьший $b = \inf B$.

Пример 3.10. Пусть $A = \{1, 2\}$ и $B = \{3, 4, ...\}$, т. е. $A \bigcup B = \boldsymbol{N}$. Тогда $2 = \sup A$, $3 = \inf B$.

Для всюду плотного множества M всякая $(a,\ c)$-окрестность не пуста и потому при любом разбиении M на левый и правый классы либо в классе A нет $\sup A$, либо в B нет $\inf B$. Более того, если разбиение всюду плотного множества M задано не с помощью элемента из M, то может не оказаться ни в классе A наибольшего элемента, ни в классе B наименьшего. Подробнее об этом скажем в главе 5.

Определение 3.17. *Дедекиндовым сечением линейно упорядоченного множества M в точке c называется такое его разбиение* $M = A \bigcup B$, $\forall (a,b) \in A \times B,\ a < b$, *когда либо в нижнем классе A есть элемент* $c = \sup A$, *но в верхнем классе B нет наименьшего, либо в верхнем классе B есть элемент* $c = \inf B$, *но в классе A нет наибольшего.*

Определение 3.18. *Линейно упорядоченное множество M называется непрерывным в точке* $c \in M$ *множеством, если разбиение его точкой c является дедекиндовым сечением. Непрерывное в каждой своей точке x множество M с линейным порядком* ρ *называется непрерывным относительно порядка* ρ.

Теорема 3.2. *Всюду плотное множество M непрерывно в каждой своей точке c.*

● Так как множество M всюду плотно, то для всякого (a,b)-интервала, где $a < c < b$, интервалы (a,c) и (c,b) не пусты. Точка c, разбивая множество M на два класса, может принадлежать лишь одному из них. Если, например, $c \in B$, где B – верхний класс разбиения, то $\forall x \in A$ и $(x,\ c)$-интервал не пуст и, следовательно, в классе A нет $a^* = \sup A$. Если $c \in A$, то $c = \sup A$. Если теперь допустить, что и в верхнем классе B есть элемент $b^* = \inf B$, то $b^* < b$, и тогда $A \bigcup B \neq M$, ибо $(c,\ b^*)$-

интервал не пуст в силу всюду плотности множества M. Таким образом, данное разбиение множества M есть дедекиндово сечение и, значит, M непрерывно в точке c. ■

Упражнение 3.8. Найти точки непрерывности множества

$$M \overset{\Delta}{=} \{a_n, b_n\colon\ a_n = 1 + (-1)^n \tfrac{n+1}{n},\ b_n = 1 + (-1)^n \tfrac{1-n}{n},\ n \in \boldsymbol{N}\}$$

относительно естественного порядка в M из $\boldsymbol{R}$.

В заключение этого параграфа введём понятие эквивалентности во множестве линейно упорядоченных множеств. Пусть ρ и φ суть линейные порядки во множествах X и Y, соответственно. Биективное отображение $\beta\colon X \to Y$ называют изоморфным отображением или *изоморфизмом*, если из $a \overset{\rho}{\prec} b$ следует $\beta(a) \overset{\varphi}{\prec} \beta(b)$ для любых элементов a и b из X. Линейно упорядоченные пространства X и Y называют *изоморфными*, если хотя бы одна биекция между ними является изоморфизмом (см. также п. 4.2).

Отношение изоморфности линейно упорядоченных множеств обладает следующими свойствами:

а) рефлексивностью, ибо тождественное отображение $I\colon X \to X$ есть изоморфизм;

б) симметричностью, ибо если $\beta\colon X \to Y$ – изоморфизм, то и $\beta^{-1}\colon Y \to X$ тоже изоморфизм;

в) транзитивностью; действительно, если $\beta\colon X \to Y$ и $\tau\colon Y \to X$ изоморфизмы, т. е. из $a < b \Rightarrow \beta(a) < \beta(b) \Rightarrow \tau(\beta(a)) < \tau(\beta(b))$, то из $a < b$ следует и $\tau(\beta(a)) < \tau(\beta(b))$.

Поэтому изоморфные множества образуют класс эквивалентных множеств, неразличимых, одинаковых по отношению к структуре линейного порядка.

Так, например, изоморфны (эквивалентны) все конечные, следовательно, дискретные множества с равным количеством элементов, для которых изоморфизм устанавливается простым перечислением соответствующих пар элементов, начиная, например, с наименьших.

Вопрос любознательному Читателю: можно ли доказать, что для каждого дискретного бесконечного множества M можно выбрать порядок ρ такой, что множество M с этим порядком ρ будет изоморфно множеству $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел?

3.7. Добавления к Главе 3

3.7.1. Парадоксы наивной Канторовской теории множеств

A. Парадокс Б. Рассела (1902 г.). Множество M состоит из элементов, некоторые из которых могут быть, в свою очередь, множествами. Например, множество $M \overset{\Delta}{=} \{1, \{2, 3\}\}$ состоит из двух элементов, один из них $\{2, 3\}$ – множество. В большинстве случаев множества не являются элементами самих себя. Рассмотрим-определим множество S всех таких множеств P, что $P \notin P$. Теперь если само $S \notin S$, то по определению множества S оно есть одно из множеств P и поэтому должно $S \in S$. Если же $S \in S$, то опять, в соответствии с определением множества S, оно не есть ни одно из P и потому $S \notin S$. Так что в любом случае одновременно $S \in S$ и $S \notin S$. Противоречие. Это пример логического парадокса.

B. Парадокс Берри (1906). Из конечного числа букв русского алфавита можно составить лишь конечное число слогов. Тогда конечным будет число фраз, которое содержит не более 60 слогов, и, значит, лишь конечное число натуральных чисел можно описать фразами, состоящими из не более чем 60 слогов. Пусть k есть *наименьшее из натуральных чисел, каждое из которых не характеризуются никакой фразой русского языка, содержащей не более шестидесяти слогов.* Выделенная фраза характеризует число k и содержит не более 60 слогов. Парадокс.

C. Парадокс лжеца. Некто говорит: “… *Я всегда лгу*”. Если этот некто действительно лжец, то он говорит правду. Если же этот некто всегда правдив, то его оговор себя ложен.

Парадокс Берри и парадокс лжеца относятся к семантическим антиномиям. Именно стремление избежать парадоксов разумным ограничением языка и набора исходных понятий привело в начале XX века к идее аксиоматизации всей математики, и в первую очередь, к аксиоматизации математической логики и теории множеств (см. [15], [37], [83] и др.). Но и в начале XXI века в этой области математики есть нерешённые проблемы.

3.7.2. Об основаниях математики

Среди математиков почти общепризнано значение теории множеств как фундамента всех математических дисциплин. Но из общепризнанности не следует необходимость построения всей математики на базе исключительно теории множеств. Для примера можно назвать работы А. А. Маркова [48], Л. С. Понтрягина [59] и др., в которых авторы минимально используют символы, терминологию и понятия теории множеств. Что касается соответствия логики и математики, роли логики в обосновании математики, то в среде математиков на этот предмет имеется много, в том числе и противоположных, точек зрения. В некотором смысле примирительной является позиция одного из ведущих специалистов XX века по математической логике американского учёного Алонза Черча (р. 1903), изложенная в его статье "Математика и логика" [49, с. 209–215]. Анализируя утверждение о приоритете логики (имеется в виду логика в широком смысле, т. е. значительно расширенная традиционная логика) перед математикой, он предлагает "… подвести итоги и даже предпринять попытку вывести решение" [49, с. 209]. Не умаляя заслуг сторонников логицизма, т. е. сторонников выводимости всей математики из логики, А. Черч резюмирует:

"*Любое обоснование математики или логики действительно в какой-то мере содержит круг, так как в нём всегда имеются необоснованные предпосылки, которые должны быть приняты на веру или интуитивно. Мы можем уменьшить число таких предпосылок, но не можем их уничтожить. Как назвать минимум предпосылок, оставшихся после такого сокращения, математикой или логикой, или и тем и другим, или ни тем ни другим – это вопрос терминологии*" [49, с. 214].

3.7.3. Теория *ZF* – аксиоматическая теория множеств Цермело–Френкеля

Теория *ZF* была разработана в начале XX века и опубликована в 1908 году (см. [1], [15], [83], [86]). Излагаемая ниже система аксиом этой теории достаточно полна, чтобы получить из неё все обычные утверждения теории множеств, и в то же время позволяет избежать известных парадоксов.

1. ***Аксиома объёмности*:** два множества A и B равны тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов.[1]

2. ***Аксиома пары:*** если A и B – множества, то существует множест-

[1] Из аксиомы объёмности вытекают такие два свойства множества: 1) если имеется множество $M=\{a, b\}$ и некоторое выражение с переменной $F(x)$, то после подстановки вместо x элемента a из M само множество M не изменится, 2) $\{a, a, b\}=\{a, b\}$.

во C, единственными элементами которого являются A и B: $C = \{A, B\}$.

3. ***Аксиома пустого множества*:** существует множество $\varnothing$ – пустое множество, не содержащее элементов.

4. ***Аксиома объединения*:** если M есть множество некоторых множеств M_i, т. е. $M = \{M_1, M_2, \ldots\}$, то объединение $\bigcup_i M_i$ этих множеств M_i есть множество.

5. ***Аксиома степени*:** если M – множество, то совокупность $P(M)$ всех подмножеств множества M есть множество. Множество $P(M)$ называется степенью множества M.

6. ***Аксиома регулярности*:** если M – множество, то либо $M = \varnothing$, либо в M найдется такой элемент b, что $b \cap M = \varnothing$.

7. ***Аксиома содержательности*:** если M – множество и $\varphi(x)$ – высказывательная форма языка теории, то совокупность D всех таких $a \in M$, что $\varphi(a)$ – истинное высказывание, есть множество, так что $D = \{a\colon \varphi(a) \sim И,\ a \in M\}$. Множество D называется частью множества M, определяемой высказывательной формой $\varphi(x)$.

8. ***Аксиома бесконечности*:** существует по крайней мере одно бесконечное множество, например $\boldsymbol{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

9. ***Аксиома выбора*:** для каждого множества A непустых множеств A_i, $i \in I$, $A = \bigcup_i A_i$, существует функция $f\colon I \to A$, сопоставляющая каждому i элемент $a_i = f(i) \in A_i$.

Последняя аксиома не всегда включается в список аксиом теории множеств, хотя в теории множеств есть много эквивалентных ей утверждений, а в анализе она часто присутствует в доказательствах ***неявно*** (см. [29]). Мы это иллюстрировать не будем, но докажем три теоремы.

Теорема 3.3. *Существует одноэлементное множество* $\{A\}$.

● В аксиоме пары положим $B = A$, тогда

$$C = \{A,\ A\} = (Акс.\,1) = \{A\}. \blacksquare$$

Теорема 3.4. *Пусть A – множество, тогда* $A \notin A$.

● Если $A = \varnothing$, тогда по Акс. 3 $A \notin A$. Пусть $A \neq \varnothing$, тогда к множеству $\{A\}$ – одноэлементному множеству, которое существует по Теореме

3.3, применим Аксиому регулярности 6, по которой $\exists b \in \{A\}$ такой, что $b \bigcap \{A\} = \varnothing$. Так как $\{A\}$ есть одноэлементное множество и $b \in \{A\}$, то $b = A$ по Акс. 1. Теперь из $A \bigcap \{A\} = \varnothing$ следует, что $A \notin A$. ■

Теорема 3.5. *Если A и B суть множества и если* $A \in B$*, то* $B \notin A$.

● Для доказательства вновь обратимся к Аксиоме регулярности, применив её к множеству $\{A, B\}$, по этой аксиоме $\exists b \in \{A, B\} \neq \varnothing$ такой, что $b \bigcap \{A, B\} = \varnothing$.

1) Пусть $b = B$, тогда $B \bigcap \{A, B\} = A$ (ибо по условию теоремы $A \in B$ и по Теореме 3.4 $B \notin B$). Далее пусть 1а): $A = \varnothing$. Тогда по Аксиоме 3 $B \notin A = \varnothing$. Условие 1б) $A \neq \varnothing$ противоречит Аксиоме 6. Значит,

2) $b = A$, тогда по Аксиоме 6 $A \bigcap \{A, B\} = \varnothing$, т. е. $B \notin A$. ■

Мы убедились в том, что аксиома регулярности избавляет теорию *ZF* от парадокса Б. Рассела.

3.7.4. О понятии функция

Анализ разных подходов к понятию функции проведён В.А. Успенским в предисловии [75] к книге [90], библиографию вопроса можно найти у Медведева Ф. А. [51]. Более 100 лет назад в 1899 году Эмиль Пикар (24.7.1856 – 11.12.1941) говорил, что "…общее понятие функции весьма неопределённо, и мы можем получить сколько-нибудь значительные результаты только при помощи некоторых ограничений" ([58, с. 22]). К такому типу ограничений можно отнести сложившуюся традицию, пришедшую от Н. Бурбаки [7] во все учебники и основания анализа. По этой традиции происходит отождествление функции $f: X \to Y$ с её графиком $Gr_f = \{(x, f(x): \ x \in X)\}$.

Даже невооружённым глазом в *этой записи* виден "*порочный круг*": функция *f* отождествляется с графиком Gr_f функции *f*, а график Gr_f функции *f* определяется через множество $\{f(x): x \in X\}$ значений функции *f*. И, по нашему мнению, здесь дело не в плохой *записи*, причины глубже. Недостатки этой традиции мы видим в следующем.

Во-первых, нет никакой необходимости в учебниках (и не только в учебниках!) смешивать два исторически сложившихся различных понятия: понятие функции и понятие графика функции.

Во-вторых, аксиома пары и аксиома степени (см. п. 3.7.3) гарантируют существование подмножества $G \triangleq \{(x, y): \ x \in X, \ y \in Y\}$, и не более.

А задать или выделить из произвольного отношения $G \subseteq X \times Y$ функциональное отношение Gr_f нельзя, не обратившись к *Аксиоме выбора*. Не постулируется существование функции и в аксиоме подстановки, гарантирующей для каждого множества X и функции f, заданной на X, существование лишь множества P, содержащего все объекты $f(x)$ для $x \in X$.

Кроме того, в-третьих, перечислением можно задать лишь конечное множество пар. Для задания счётного множества M пар $m \triangleq (n, f(n))$, нужно правило f или формула $f(n)$, $n \in N$.

Так как аксиома выбора часто игнорируется даже и не в учебных курсах, то очевидно, с нашей точки зрения, неполноценное, научно не достаточно обоснованное введение одного из основных понятий курса математики, при котором либо слушателям или читателям предлагается "круг", либо происходит апелляция к их опыту или интуиции. Наш вариант введения понятия *функция* начинается следующей аксиомой.

Аксиома существования функции (*АФ*). *Для любых двух множеств X и Y существуют два такие множества F и G, что для каждой пары $(x, y) \in X \times Y$ найдётся такая пара $(f, g) \in F \times G$, что пара (f, x) с точностью до метаязыкового символа $\triangleq$ совпадает с элементом y, а пара (g, y) – с элементом x. Элементы множества F (множества G) при этом называем функциями, заданными в X (в Y) со значениями в Y (в X).*

Множество F (множество G) обозначают обычно символом Y^X (X^Y) по традиции, идущей от теории отображений конечных множеств, где этот символ определяет количество отображений множества X (множества Y) во множестве Y (во множество X).

Вводя общепринятый символ $f(x) \triangleq (f, x)$, графиком функции f назовём множество

$$Gr_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Множество $D_f = \Pr_I(Gr_f)$ назовём областью определения функции f, а множеством значений функции f или полным образом множества D_f для f назовём множество $f(D_f) \triangleq R_f \triangleq \{y : y = f(x),\ x \in D_f\} \subseteq Y$.

Легко видеть, что $R_f = \Pr_{II}(Gr_f)$. Наконец, равенство $y = f(x)$, $x \in D_f$, мы будем называть уравнением графика функции f.

"*Однозначность*" функции $f: X \to Y$, вводимой с помощью *АФ*, является *теоремой.* Действительно, допустим противоположное, т. е. что для двух различных пар (x, y) и (x, z) из $X \times Y$ найдётся одна и та же такая пара (f, g), что $y \triangleq (f, x)$, $z \triangleq (f, x)$ и, соответственно, $x \triangleq (g, y)$, $x \triangleq (g, z)$, Тогда из аксиомы пары следует, что $y = z$ (или $y \triangleq z$, что можно понимать как два символа одного и того же элемента).

В книге [39] её авторы академик А.Н. Колмогоров и профессор А.Г. Драгалин этот способ введения понятия функции описали на стр. 21 одной краткой фразой "Для любых множеств M_1, M_2 существует множество $(M_1 \to M_2)$ всех отображений из M_1 в M_2".

3.7.5. Определение множества натуральных чисел

Линейно упорядоченное бесконечное множество $\boldsymbol{N}$ назовём множеством натуральных чисел, если каждое его подмножество $A_n \triangleq \{x: x \leq n,\ x, n \in N\}$ является конечным множеством. Наименьший элемент множества $\boldsymbol{N}$ будем называть нулём и обозначим символом 0. Таким образом,

$$0 \triangleq \inf \boldsymbol{N},\ 1 \triangleq \inf(N \setminus \{0\}).$$

Все последующие натуральные числа определим по индукции:

$$n+1 \triangleq \inf \{\boldsymbol{N} \setminus \{0, 1, \ldots, n\}\},\ n>0.$$

Индуктивное определение множества $\boldsymbol{N}$ составляет основу *метода математической индукции*:

если некоторое высказывание $f(k)$, $k \in \boldsymbol{N}$,

1) истинно для $k = n_0$, т. е. $f(n_0)$~*И*, и

2) из $f(n)$~*И* следует $f(n+1)$~*И*, для $n \geq n_0$, то $\forall k > n_0$ $f(k)$~*И*.

В школьном курсе математики этим методом, например, доказано *неравенство Бернулли*:

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + \alpha \cdot n,\ \alpha > -1,\ n \in \boldsymbol{N}.$$

Упражнение 3.9. Рассмотрев предварительно три частных случая: $\alpha = -1$, $\alpha = -2$ и $-2 < \alpha < 1$ для $n = 2k$, доказать неравенство Бернулли для $-2 \leq \alpha \leq -1$.

Академик А. Н. Колмогоров о значении множества натуральных чисел сказал следующее: “Математикам, по существу, нужен *один* натуральный ряд чисел, который может обслуживать все их нужды. Свойства этого натурального ряда, существенные для математиков, полностью описываются аксиомами Пеано ... .” (см. [38, с. 246]).

Аксиомы Пеано множества $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел можно записать так:

I. $1\in\boldsymbol{N}$.

II. $a\in\boldsymbol{N}\Rightarrow a'\overset{\Delta}{=}a+1\in\boldsymbol{N}$.

III. $a'=b'\Rightarrow a=b,\ a\in\boldsymbol{N}$.

IV. $a\in\boldsymbol{N}\Rightarrow a'\neq 1$.

V. $(A(1)\&A(b)\Rightarrow A(b'))\Rightarrow A(a),\ a\in\boldsymbol{N}$.

Последнюю аксиому называют *аксиомой математической индукции или аксиомой бесконечности* (*потенциальной*) *множества* $\boldsymbol{N}$ *натуральных чисел.*

3.7.6. Мощность и бесконечность множеств

Биективные отображения (биекции) разбивают множество $\boldsymbol{U}$ на классы эквивалентных множеств, а именно: *множества A и B называются эквивалентными, если существует биекция* β: $A\to B$, при этом пишут $A\sim B$ и говорят, что множество A эквивалентно множеству B или что множества A и B биективны. Покажем, что отношение биективности множеств (*а*) рефлексивно, (*б*) симметрично и (в) транзитивно. Действительно, (*а*): существует тождественное отображение $I: A\to A$, являющееся биекцией, (*б*): для каждой биекции $f: A\to B$ существует биекция $f^{-1}: B\to A$, (*в*): для биекций $f: A\to B$ и h: $B\to C$ существует биекция $h\circ f: A\to C$.

Очевидно, что среди конечных множеств F_k , $k\in N$, класс эквивалентности $\{F_n\}$ образуют множества с равным количеством (числом) n элементов, где, конечно, $n\in\boldsymbol{N}$.

Понятие биективности множеств положено в определение, по Дедекинду, *бесконечного множества*: *множество M называется бесконечным, если оно эквивалентно своему собственному подмножеству*. Например, формула $k(n)=2n$ определяет (по Дедекинду) биекцию между множеством $\boldsymbol{N}=\{1, 2, \ldots\}$ натуральных чисел и его собственным подмножеством $\boldsymbol{E}=\{2, 4,\ldots,2n,...\}$ чётных чисел ($\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{N}$). Очевидно, что любое конечное множество F таким свойством не обладает. Новейшие результаты автора (см. [103], [104], [107], п. 3.7.7 и Главу 6 этой книги) вызывают сомнения в корректности содержания этого абзаца.

Эквивалентность бесконечных множеств является инструментом градуировки бесконечных множеств по мощности, которая обобщает на бесконечные множества понятие количества элементов конечного множества. Множества A и B называются равномощными или считаются имеющими одинаковую, равную мощность если A и B эквивалентны, при этом пишут $|A|=|B|$. Естественно, для конечных множеств P и Q равномощность означает равенство количеств их элементов.

Существование неэквивалентных, не равномощных бесконечных множеств гарантирует следующее ниже утверждение.

Теорема 3.6. *Не существует биекции между множеством A и множеством $P(A)$ всех подмножеств множества A.*

● Пусть $f\colon A \to P(A)$ – любая функция. Покажем, что $f(A) \subset P(A)$, т. е. $f(A) \neq P(A) \Rightarrow |A| \neq |P(A)|$.

Очевидно, что $\forall a \in A \;\; f(a) \in P(A)$, т. е. $f(a)$ – некоторое подмножество в A, и потому либо $a \in f(a)$, либо $a \notin f(a)$.

Обозначим через B множество $\{x\colon x \notin f(x),\ x \in A\}$, $B \subset A$ и потому $B \in P(A)$, но $B \notin f(A)$.

Действительно, если $a \notin f(a)$, то $a \in B$ и поэтому $B \neq f(a)$, если $b \in f(B)$, то $b \notin B$ и потому $B \neq f(b)$, из чего следует $B \notin f(A)$.

Итак, функция $f\colon A \to P(A)$ не является биекцией. ■

Множества, равномощные множеству $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел, называют счётными и пишут $|\boldsymbol{N}| = \omega = \aleph_0$ (алеф-нуль). Мощность множества чисел единичного отрезка $[0,1] \subset \boldsymbol{R}$ называют континуумом и пишут $|[0,\ 1]| = c = \aleph_1$ (алеф-один).

Так как $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{R}$ и, как легко доказать, $|\boldsymbol{N}| \neq |\boldsymbol{R}|$, то пишут $|\boldsymbol{N}| \prec |\boldsymbol{R}|$, т. е. $\omega \prec c$.

Детали любознательный читатель найдёт в книгах [1], [3], [4], [22], [29], [54], [62], [83] и др., а также в [100], [103], [104].

3.7.7. Об отображениях бесконечных множеств

Следуя [39, Гл. 1.3.4], мы будем считать, что для любых множеств A и B существует множество $(A \to B)$ всех отображений из A в B. Отображение $\varphi\colon A \to B$ называется (см. п. 3.6.1) сюръективным, если

$\varphi(A)=B$, если для любых элементов a и q множества A справедлива импликация ($\varphi(a)=\varphi(q)$)$\Rightarrow$(a=q), тогда отображение φ называется инъективным. Инъективное и сюръективное отображение $\varphi: A\to B$ называется биективным отображением или биекцией в этом случае говорят, что множества A и B биективны (см. п. 3.7.6) и пишут A~B. В силу этих определений справедлива

Теорема 3.7. *Пусть* $\boldsymbol{F}(A,\ B)\overset{\Delta}{=}\{\varphi\,|\,(\varphi: A\to B,\ \varphi(a)=\varphi(q))\Rightarrow(a=q)\}$. *Если* $\forall\varphi\in\boldsymbol{F}(A,\ B)$ $\varphi(A)\subset B$, *тогда множества A и B не биективны, т. е.* $A\nsim B$.

Следующее утверждение также очевидно, но мы его докажем.

Теорема 3.8. *Пусть отображение* φ *будет произвольной функцией* $\varphi: A\to B$, *и для любого разбиения множества A на непересекающиеся подмножества:*

$$A=\cup A_i,\ i\in I\subset \boldsymbol{N},\ A_i\cap A_j=\varnothing \text{ при } i\neq j, \tag{3.7.1}$$

ограничение $\varphi_{|A_i}\overset{\Delta}{=}\varphi_i$, $i\in I$, *отображения* φ *на каждое из подмножеств* A_i *будет отображением* $\varphi_i: A_i\to B$. *Если* $B_i\overset{\Delta}{=}\varphi_i(A_i)$ *и* $\exists(i,j)$, $i\neq j$: $B_i\cap B_j\neq\varnothing$, *тогда отображение* $\varphi: A\to B$ *не будет инъективным.*

• Если существует такой индекс $i\in I$, что отображение $\varphi_i: A_i\to B$ не инъективно, тогда, очевидно, и отображение $\varphi: A\to B$, не будет инъективным. Пусть $\forall i\in I$ отображение $\varphi_i: A_i\to B$ есть инъекция, и по-прежнему для некоторых i и j, $i\neq j$, $B_i\cap B_j\neq\varnothing$. Тогда, $\exists b\in B_i\cap B_j$. Значит, существует такое подмножество $\{a,\ q\}\subset A$, $a\in A_i$, $q\in A_j$, что $\varphi(a)=\varphi(q)=b$ при $a\neq q$, т. е. функция $\varphi: A\to B$ не инъективна. ■

Теорема 3.9. (Критерий биективности). *Множества A и B биективны, т. е.* $\exists\varphi\in\boldsymbol{F}(A,B)$ *и* $\varphi(A)=B$, *тогда и только тогда, когда для некоторого разбиения* $A=\cup A_i$ *множества A будут выполняться следующие три условия:* 1) $\varphi_i\overset{\Delta}{=}\varphi_{|A_i}\in\boldsymbol{F}(A_i,B_i)$, *где* $B_i\overset{\Delta}{=}\varphi_i(A_i)$, 2) *при* $i\neq j$ $B_i\cap B_j=\varnothing$ *и* 3) $B_i\cup B_j=B$.

•<u>Достаточность.</u> Пусть условия теоремы выполнены для некоторого разбиения множества A. Так как $\forall a \in A\ \exists i \in I:\ a \in A_i$ и $\varphi_i(a) \overset{\Delta}{=} b \in B_i \subset B$, то определено отображение $\varphi: A \to B$. Покажем инъективность отображения $\varphi: A \to B$. Действительно, во-первых, в силу условия 1) теоремы $\forall \text{i} \in I$ отображение $\varphi_i: A_i \to B$ будет инъективно. Во-вторых, при $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \varnothing$ по условию (3.7.1) разбиения множества A и $B_i \cap B_j = \varnothing$ по условию 2) теоремы; теперь инъективность отображение $\varphi: A \to B$ следует из этих трёх условий. Наконец, по условию 3) теоремы $\cup B_i = B,\ i \in I$, т. е. отображение φ будет и сюръекцией: $\varphi(A) = B$.

<u>Необходимость</u>. Пусть отображение $\varphi: A \to B$ является биекцией, т. е. $\varphi(A) = B$ и $\varphi \in \boldsymbol{F}(A, B)$. Тогда для произвольного разбиения множества A ∀i ограничение $\varphi_i: A_i \to B$ отображения φ на подмножество A_i будет инъективным отображением и, следовательно, при $i \neq j$ и $B_i \overset{\Delta}{=} \varphi_i(A_i)$ $B_i \cap B_j = \varnothing$. Осталось показать, справедливость равенства $\cup B_i = B,\ i \in I$. Предположим противное, что $\text{C} \overset{\Delta}{=} \cup B_i \subset B$. Тогда $\exists b \in B \setminus C$ и, значит, $\exists a = \varphi^{-1}(b) \in A$. Далее, $\exists i \in I: a \in A_i$ и, следовательно, $b = \varphi_i(a) \in B_i \subset C$. Это противоречит тому, что $b \in B \setminus C$.■

Ниже идёт непосредственное и очевидное следствие Теоремы 3.9.

Теорема 3.10. *Если* $A = C \cup D,\ C \cap D = \varnothing$, $B = E \cup F,\ E \cap F = \varnothing$ и *C~E*, *D~F*, тогда *A~B*.

Теорема 3.11. *Если даны два разбиения множества A*:

$$A = C \cup D,\ C \cap D = \varnothing \ \textit{и}\ A = E \cup F,\ E \cap F = \varnothing,$$

тогда из условия C~E следует D~F.

● Если C~E, т. е. существует биекция $\xi : C \to E$, $\xi(C) = E$, тогда и $\xi^{-1}(E) = C$. При построении биекции $\theta : F \to D$ возможны следующие четыре ситуации: 1) $C \cap F = \varnothing$, 2) $C \cap F = F_1 \neq F$, 3) $F \subset C$, 4) $F \supset C$. В первом случае $\forall f \in F \Rightarrow f \notin C$, и так как $f \in A \setminus C = D$, то F=D и утверждение теоремы очевидно. 2) Пусть $C \cap F \stackrel{\Delta}{=} F_1 \neq F$ и $F_2 \stackrel{\Delta}{=} D \cap F$, тогда $\theta_{|F_2 \subset D} \stackrel{\Delta}{=} id_{|F_2}$ и $\theta_{|F_1} \stackrel{\Delta}{=} \xi_{|F_1 \subset C}$. 3) Пусть $F \subset C$, тогда $C \cap E \neq \varnothing$ и, следовательно, $D \subset E$. Тогда $\forall f \in F \subset C$ $\exists e \in E$: $e = \xi(f)$. Если $e \in D$, то $\theta_{|f} \stackrel{\Delta}{=} \xi_{|f \in C}$. Если $e \notin D$, то $e \in C$ и $\exists e_1 \in E$: $e_1 = \xi(e) \in E$. Если $e_1 \in D$, то $\theta_{|f} \stackrel{\Delta}{=} \xi(\xi)_{|f}$ и т. д. длина суперпозиций в $\theta_{|f} \stackrel{\Delta}{=} \xi(\xi(\cdots))_{|f}$ функций ξ зависит от этой функции $\xi : C \to E$ и от выбора элемента $f \in F$. Вопрос о конечности такой длины мы здесь не обсуждаем. Пусть, наконец, 4) $F \supset C$ и $F_1 \stackrel{\Delta}{=} F \setminus C$, тогда $E \subset D$ и $D_1 \stackrel{\Delta}{=} D \setminus E$. Легко показать, что $F_1 = D_1$. Теперь $\theta_{|C \subset F} \stackrel{\Delta}{=} \xi_{|C}$ и $\theta_{|F_1} \stackrel{\Delta}{=} id_{|F_1}$. ■

Теорема 3.11 имеет следующее обобщение, доказательство которого мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Теорема 3.12. *Если даны разбиения множеств A:* $A = C \cup D$, $C \cap D = \varnothing$ *и* $B = E \cup F$, $E \cap F = \varnothing$, *тогда из условий A~B и C~E следует D~F.*

Очевидно, что справедливость Теорем 3.8 и 3.9 не нарушится, если одно из подмножеств A_i, $A_i \subset A$, и, соответствующее подмножество B_i, $B_i \subset B$, будет пустым.

Теорема 3.13. *Если* $\varphi : A \to B$, $B \subset A$, *и* $\varphi(A) = B$, *то* $\varphi \notin \boldsymbol{F}(A, B)$.

● Допустим противное, что функция $\varphi : A \to B$ является инъекцией и, следовательно, A~B. Пусть в условии Теоремы 3.12 $C \stackrel{\Delta}{=} E \stackrel{\Delta}{=} B$ и $F \stackrel{\Delta}{=} \varnothing$. Тогда $A = D \cup B$, $D \cap B = \varnothing$ и $D \neq \varnothing$. Так как $B = B \cup F = B \cup \varnothing$, то по Теореме 3.12 из A~B и B~B должно следовать, что $\varnothing \neq D \sim F = \varnothing$, т. е. $\varnothing \nsim \varnothing$. Поэтому предположение A~B является ложным. Так как по условию теоремы $\varphi(A) = B$, то, следовательно, $\varphi \notin \boldsymbol{F}(A, B)$. ■

3.7.7. Переменная

Определение 3.19. *Переменной $\mathcal{X}$ назовём тройку* $(x,\ A,\ \varphi)$, *где x – символ переменной, A – некоторое множество, элементы которого можно ставить вместо x в некоторое выражение* $F(x)$, φ *– порядок во множестве A.*

В этой формулировке фраза "элементы которого … $F(x)$" может быть опущена (см. Глава 1, стр. 14–16). Но в неформализованном изложении понятие переменной, свободной переменной формулируется в связи с понятием "*выражение с переменной*".

Порядок φ в переменной (x, A, φ), вообще говоря, не может быть нелинейным и чаще всего устанавливается процедурой "*вставить вместо символа переменной элемент множества A*".

Традиционно по умолчанию за порядок φ переменной принимается некоторый естественный порядок множества M, $A \subseteq M$. Так, например, в теории последовательностей и теории рядов за порядок принят естественный порядок множества $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел. Иначе пусть, например, $A=\{1,2,3\}$, и $F(x)$ есть слово "$x<3$", а порядок φ в A задаёт последовательность (2,1,3). Пусть $A=\boldsymbol{Z}$, тогда для $|x-2|<10$, $x \in \boldsymbol{Z}$, порядок φ во множестве A определим условием: $x_1 \overset{\varphi}{\prec} x_2$, если $|x_2|>|x_1|$ или $-x_1=|x_2|$.

Более подробно об этом написано Г.М. Фихтенгольцом в Дополнении к III тому его Курса дифференциального и интегрального исчисления [81, с. 632-639 и 643-649].

В математической статистике (ещё один интересный пример) порядок *случайной переменной* задают с помощью таблиц или иных алгоритмов получения случайных чисел.

Вопросы Читателю

1. Как возникла необходимость построения математических дисциплин на аксиоматической основе?

2. Что такое *алгебра множеств* и чем она отличается от *алгебры целых чисел?*

3. Как можно описать линейный порядок для точек $M(X,Y)$ *числовой плоскости XOY?*

4. При каких условиях произведение $g \circ f$ двух функций $g: B \to C$

и f: $A \to B$ будет *сюръекцией, но не инъекцией?* Постройте соответствующую диаграмму.

5. Является ли *монотонность* на интервале (a,b) функции f: $X \to Y$ *необходимым условием непрерывности* этой функции на этом интервале, если X и Y суть линейно упорядоченные множества?