# ГЛАВА 2

# ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

## 2.1. Традиционная логика и логика математическая

Логика есть наука о правилах рассуждений, наука о доказательствах, наука о том, как из верных посылок посредством правильных выводов получать верные заключения. Именно способность, возможность и необходимость правильных рассуждений отделила человека от остальной природы.

В средние века и до середины XIX столетия изучалась и разрабатывалась логика, бытовавшая у эллинов около двух с половиной тысяч лет назад. До нас логика древних греков дошла в сочинении “Аналитики” Аристотеля (384 – 322 гг. до н.э.), и поэтому называемая ещё Аристотелевой. В Аристотелевой логике рассматриваются высказывания четырёх типов:

1) общеутвердительные: все $S$ суть $P$,
2) общеотрицательные: ни одно $S$ не есть $P$,
3) частноутвердительные: некоторые $S$ есть $P$,
4) частноотрицательные: некоторые $S$ не есть $P$.

Не имея такого мощного стимула развития как ***приложения****,* древнегреческая логика, как и вся математика и наука в целом, развивалась медленно.

Впервые возможность построения универсального математического языка и полной формализации математических доказательств была осознана Готфридом Лейбницем (1.07.1646–14.11.1716), немецким математиком, физиком и философом, который заложил основы символической логики, хотя более известен как создатель дифференциального и интегрального исчисления. Но только в середине XIX века появились первые научные работы по алгебраизации Аристотелевой логики.

Ирландский математик Джордж Буль (1.11.1815 – 8.12.1864) опубликовал в 1847 году работу о математическом анализе логики, положившую начало алгебре высказываний. В этом же году шотландский математик О. де Морган (27.06.1806 – 18.03.187) издал трактат “Формальная логика, или исчисление выводов необходимых и возможных”. К концу XIX века работами Готлоба Фреге (8.11.1848 – 26.07.1925), немецкого математика и логика, и американского учёного Чарльза Пирса (10.09.1839 – 19.04.1914) было завершено создание математической логики как одной из фундаментальных наук. В 1890 – 1895 годах немецкий математик Эрнст Шредер (15.11.1841 – 16.06.1902) издал “Лекции по алгебраической логике”, в которых систематизировал и усовершенствовал результаты предшественников.

В 1894 году итальянские математики во главе с Джузеппе Пеано (27.08.1858 – 20.04.1932) начали издавать “Formulaire de matematiques” (“Формуляр математики”), в котором все математические дисциплины должны были быть представлены в логическом исчислении. В этой попытке итальянские математики опередили более чем на 40 лет француза Н. Бурбаки.

Но как раз в это время на рубеже XIX и XX веков математический мир был потрясён открытием в теории множеств парадоксов, антиномий, то есть противоречий, получаемых с помощью верных рассуждений из верных посылок. (О парадоксах см. ниже в п. 3.7). Стремление избежать логических и языковых семантических антиномий вызвало небывалый рост исследований в области оснований математики, и в области математической логики в том числе. И в 1908 году были независимо созданы две аксиоматические теории: теория множеств Эрнеста Цермело (27.07.1871 – 21.05.1953) и теория типов Бертрана Рассела (18.05.1872 – 03.02.1970).

Известно, что область возникновения парадоксов не пересекается с основным содержанием анализа и геометрии, антиномии возникают в сфере крайних обобщений, поэтому при аксиоматизации математических теорий исходят из двух принципов:

A) Набор исходных понятий и их объём не должны быть слишком широки, чтобы избежать известных парадоксов (никакая, достаточно богатая содержанием аксиоматическая теория априори не застрахована от их появления).

B) Набор исходных понятий не должен быть слишком беден, если мы хотим описать всю (или почти всю) математику или даже только отдельно взятую, с нетривиальным содержанием, теорию.

При неформализованном описании математической дисциплины понятие о более общих методах и об аксиоматических системах даёт средство избежать, где это возможно и необходимо, двусмысленностей естественного языка.

### 2.2. Алгебра высказываний (Булева алгебра)

Множество высказываний можно считать множеством, состоящим из функций, заданных на множестве имён со значениями в двухэлементном множестве $\{И, Л\}$. Элементы последнего множества, например в релейно-контактных и иных схемах, обозначают через $1 \triangleq И$ – истина (есть сигнал, ток) и $0 \triangleq Л$ – ложь (нет сигнала, тока). Все высказывания делят на два класса: простые, элементарные и составные, сложные. Сложные высказывания составляются из элементарных с помощью *логических связок* (*логических операций*).

**Примеры: 2.1.** 2>1 **–** простое истинное высказывание.

**2.2**. Если $|a|<1$, то $a^{2.}>1$ – составное высказывание (ложное).

Высказывания мы будем обозначать прописными буквами латинского алфавита: элементарные высказывания буквами *A, B, C*, ..., *R,* сложные, соответственно, буквами *S, T, ... , Z.*

***Операцией*** во множестве $M \triangleq \{A, B, C, ...\}$ всех высказываний называется всякая функция $f(A_1, A_2, ..., A_n)$ *n* переменных $A_1, A_2$, ..., $A_n$ со значениями в этом же множестве *M*. Если *n*=1, то операция называется ***унарной***; если *n*=2, то *f*(*A*, *B*) называется ***бинарной*** операцией, и в общем случае, функция *n* переменных называется *n*-арной операцией.

Логические операции мы будем вводить в терминах метаязыка, апеллируя к имеющемуся у читателя опыту. Значения получаемых с помощью логических связок высказываний мы будем вносить в так называемые ***истинностные таблицы.***

**1**. Единственная ***унарная логическая операция – отрицание*** “¬” в метаязыке описывается так: слово $\neg A$ читается “не *A*” и означает отрицание высказывания *A*. Истинностная таблица операции *отрицание* имеет два столбца и две строки *истинностных значений*:

| *A* | $\neg A$ |
|---|---|
| *И* | *Л* |
| *Л* | *И* |

**2**. Четыре бинарные логические операции, с помощью каждой из которых образуется новое высказывание из двух высказываний, задаются следующим образом:

**2.1**. ***Конъюнкция &:*** высказывание *A*&*B* читается и означает *A* и *B* (совмещение высказываний: и *A*, и *B*).

**2.2**. ***Дизъюнкция*** ∨: высказывание $A \vee B$ означает *или A*, *или B*, а также *и A*, *и B* (союз *или* употребляется здесь в соединительном, а не в разъединительном смысле).

**2.3**. ***Импликация*** **⇒:** высказывание $A \Rightarrow B$ означает: если *A,* то *B*;

или $A$ достаточно для $B$; или $B$ следует из $A$, или $B$ необходимо для $A$. Последнее прочтение можно уточнить так: $B$ необходимо для $A$, но, возможно, не является достаточным.

**2.4**. ***Эквиваленция*** $\Leftrightarrow$: высказывание $A \Leftrightarrow B$ означает следующее: $A$ тогда и только тогда, когда $B$, или $A$ необходимо и достаточно для $B$, и наоборот.

У бинарных логических операций отметим только несимметричность импликации и симметричность трёх остальных. Истинностные таблицы бинарных логических операций содержат $2^2$=4 строки истинностных значений:

| $A$ | $B$ | $A\&B$ | $A\vee B$ | $A\Rightarrow B$ | $A\Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *И* | *И* | *И* | *И* | *И* | *И* |
| *И* | *Л* | *Л* | *И* | *Л* | *Л* |
| *Л* | *И* | *Л* | *И* | *И* | *Л* |
| *Л* | *Л* | *Л* | *Л* | *И* | *И* |

Обратите внимание на 4-й и 5-й столбцы: из лжи следует “всё, что угодно”. Более того, справедлива

**Теорема 2.1**. $((A\Rightarrow B)\ \&\ (A\Rightarrow(\neg B))) \Rightarrow (A = Л)$.

● Предположим противное, что $A$=*И*. Пусть $B$=*И*, тогда $\neg B$ = Л. Теперь в силу $A \Rightarrow (\neg B)$ имеем $И \Rightarrow Л$, т. е. противоречие. Если же $B$ = *Л*, тогда из $A\Rightarrow B$ имеем $И \Rightarrow Л$. Противоречие. Следовательно, наше предположение, что $A$=*И*, является ложным, т. е. справедливо заключение теоремы: $A$ = *Л*. ■

Здесь и ниже символы ● и ■ означают начало и конец доказательства, соответственно.

**Упражнение 2.1.** Составьте истинностную таблицу сложного высказывания $S \triangleq \neg\big((A \Rightarrow B) \vee (((\neg B) \Leftrightarrow A)\& B)\big)$.

**Указание.** Введите промежуточные высказывания: $T \triangleq (A\Rightarrow B)$, $U \triangleq (\neg B)$, $Y \triangleq (U\Rightarrow A)$, $W \triangleq (Y\&B)$, $Z \triangleq (T\vee B)$, тогда $S$=($\neg Z$). Подробная таблица будет содержать 2 + 6 = 8 столбцов и $2^2 = 4$ строки истинностных значений.

Количество скобок в корректной записи составного высказывания позволяет уменьшить следующая ниже договорённость.

***Соглашение*** **1** *устанавливает приоритетность выполнения логических операций в такой последовательности* $\neg$, &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Теперь $S \triangleq \neg((A \Rightarrow B) \vee (\neg B \Leftrightarrow A) \& B)$.

Очевидно, что таблица истинности составного высказывания $S$ содержит $2^m$ строк истинностных значений, если оно содержит $m$ элементарных высказываний, т. е. $S$ является функцией $m$ аргументов.

**Упражнение 2.2.** Продолжить истинностную таблицу высказывания $Z \triangleq \neg A \vee B \& C \Rightarrow B \Leftrightarrow C$:

| *A* | *B* | *C* | *S* | *T* | *U* | *W* | *Z* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *И* | *И* | *И* | *Л* | *И* | *И* | *И* | *И* |
| *И* | *И* | *Л* | *Л* | *Л* | *Л* | *И* | |
| *И* | *Л* | *И* | *Л* | *Л* | *Л* | | |
| *И* | *Л* | *Л* | *Л* | *Л* | | | |
| *Л* | *И* | *И* | *И* | | | | |
| *Л* | *И* | *Л* | | | | | |
| *Л* | *Л* | *И* | | | | | |
| *Л* | *Л* | *Л* | | | | | |

Единственным ли образом можно выбрать здесь промежуточные высказывания $S$, $T$, $U$ и $W$, если известно, что $U = S \vee T$?

Истинностные таблицы логических операций $\neg$, &, $\vee$, $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$ можно было бы принять за способ ***определения*** этих ***операций*** без обращения к чьему-либо опыту.

Переменные с двумя значениями, например *И* и *Л*, а также функции этих переменных с тем же множеством значений называются *булевыми.* Мы будем их называть для краткости ***б***-переменными и ***б***-функциями (***б***-формулами).

***Тождественно истинной*** или ***тавтологией*** называется ***б***-формула, если при любом наборе значений её ***б***-аргументов она принимает значение *И*, т. е. ***истина***.

***Тождественно ложной*** или ***противоречием*** называется ***б***-формула, если она при всяких значениях своих ***б***-аргументов принимает значение *Л*, т. е. ***ложь***.

Из этого следует, что во множестве всех ***б***-функций есть две постоянные функции: ***тавтология*** и ***противоречие.***

Две ***б***-формулы *X и Y* называются ***равносильными*** (метаязыковая запись равносильности: $X \cong Y$), если их значения совпадают при всех наборах их аргументов.

Не все пять рассмотренных логических операций независимы. Они независимы в том смысле, что любую **б-**формулу $X$ можно преобразовать в равносильную ей ***б***-формулу, содержащую не более двух логических связок. Простейший пример: $(A \Leftrightarrow B) \cong ((A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A))$.

Справедливо такое

**Утверждение 2.1**. *За базис логических операций можно принять любую из следующих пар логических связок:* $\neg$ *и* &, $\neg$ *и* $\Rightarrow$, $\neg$ *и* $\vee$**.**

Действительно, если за базис взять пару $\neg$ и $\wedge$, то

1) $(A \Rightarrow B) \cong (\neg A \vee B)$,

2) $(A \& B) \cong (\neg(\neg A \vee \neg B))$,

3) $(A \Leftrightarrow B \cong ((\neg A \vee B)) \& (\neg B \vee A))$.

Доказательство равносильности 2) даёт совпадение истинностных значений ***б***-формул $A\&B \triangleq T$ и $\neg(\neg A \vee \neg B) \triangleq S$:

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \vee \neg B$ | $T$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *И* | *И* | *Л* | *И* | *Л* | *И* | *И* |
| *И* | *Л* | *Л* | *И* | *И* | *Л* | *Л* |
| *Л* | *И* | *И* | *Л* | *И* | *Л* | *Л* |
| *Л* | *Л* | *И* | *И* | *И* | *Л* | *Л* |

**Упражнение 2.3.** Доказать равносильности 1) и 3).

Следующие четыре тавтологии выражают основные законы традиционной логики:

1) $A \Rightarrow A$ – закон тождества,

2) $\neg \neg A \Rightarrow A$ – закон двойного отрицания,

3) $\neg (A \& \neg A)$ – закон отрицания противоречия,

4) $A \vee \neg A$ – закон исключённого третьего.

Продолжим этот список перечислением равносильностей:

5) $A \& B \cong B \& A$ – коммутативность конъюнкции,

6) $A \vee B \cong B \vee A$ – коммутативность дизъюнкции,

7) $(A \& B) \& C \cong A \& (B \& C)$ – ассоциативность конъюнкции,

8) $(A \vee B) \vee C \cong A \vee (B \vee C)$ – ассоциативность дизъюнкции,

9) $A \& (B \vee C) \cong (A \& B)) \vee (A \& C)$ – первый закон дистрибутивности,

10) $A \vee (B \& C) \cong (A \vee B) \& (A \vee C)$ – второй закон дистрибутивности,

11) $\neg(A \vee B) \cong \neg A \& \neg B$
12) $\neg(A \& B) \cong \neg A \vee \neg B$ – законы О. де Моргана,

13) $A \& И \cong A$
14) $A \vee Л \cong A$ – законы поглощения.

При замене в перечисленных свойствах символа равносильности $\cong$ эквиваленцией $\Leftrightarrow$ каждый закон превратится в тавтологию.

Всякое множество $\{A, B, C, ...\}$ с операциями $\neg$, & и $\vee$, удовлетворяющими перечисленным выше равносильным высказываниям, называется *алгеброй Буля*. Дизъюнкцию $\vee$ называют иногда сложением по аналогии с арифметикой чисел, а конъюнкцию & – умножением, последнее не совсем справедливо: в арифметике чисел второй закон дистрибутивности 10) не выполняется.

### 2.3. Некоторые схемы доказательств

**I**. Простейшей схемой доказательства является ***цепь импликаций***

$$A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow ... \Rightarrow P \Rightarrow H,$$

из которой заключаем, что $A \Rightarrow H$. Здесь $A$ называется условием или посылкой, а $H$ – заключением, причём истинность посылки $A$ в этой схеме не предполагается.

**II**. Вторая схема доказательств использует ***закон контрапозиции*** – $(A \Rightarrow B) \cong (\neg B \Rightarrow \neg A)$. С каждой теоремой $A \Rightarrow B$ можно рассматривать ещё три утверждения: 1) обратную теорему $B \Rightarrow A$, 2) противоположную теорему $\neg A \Rightarrow \neg B$, 3) теорему, обратную противоположной $\neg B \Rightarrow \neg A$.

**III**. В схеме ***доказательства от противного*** используется равносильность

$$(A \Rightarrow B) \cong (A \& \neg B) \Rightarrow \neg A,$$
$$\text{или } (A \Rightarrow B) \cong ((A \& \neg B) \Rightarrow B),$$
$$\text{или } (A \Rightarrow B) \cong (A \& \neg B \Rightarrow C \Rightarrow C \& \neg C).$$

В традиционной логике такая схема доказательства называется сведением к абсурду.

**IV**. Эквивалентность $A \Leftrightarrow B$ высказываний $A$ и $B$ доказывается по одной из схем:

$$(A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A) \text{ или } (A \Leftrightarrow C) \& (C \Leftrightarrow B) \text{ и так далее.}$$

## 2.4. Об исчислении предикатов

Существуют рассуждения традиционной логики, которые не могут быть обоснованы, формализованы в логике высказываний. Например, из двух высказываний-посылок: 1) *A – всякое натуральное число есть число рациональное* и 2) *B – число 5 есть число натуральное,* следует истинное высказывание-заключение *C – число 5 есть число рациональное,* т. е. $A\&B \Rightarrow C$. Но в исчислении высказываний нет средств анализа таких умозаключений. Формализация умозаключений традиционной логики относительно связей между всеобщими и частными утверждениями и анализ таких умозаключений составляют предмет исследования ***исчисления предикатов***.

В исчислении предикатов имеется три сорта переменных. Высказывательная форма (см. п. I.5) $S(x_1, x_2, ..., x_k)$ в этом исчислении называется $k$-местной предикатной переменной – предикатом. Аргументы предикатов называются предметными переменными. Множество их значений составляют имена предметов, объектов и т. п. Третий сорт переменных в исчислении высказываний составляют так называемые пропозициональные переменные, область значений которых образуют: а) высказывания, как 0-местные предикаты, и в) предикатные переменные.

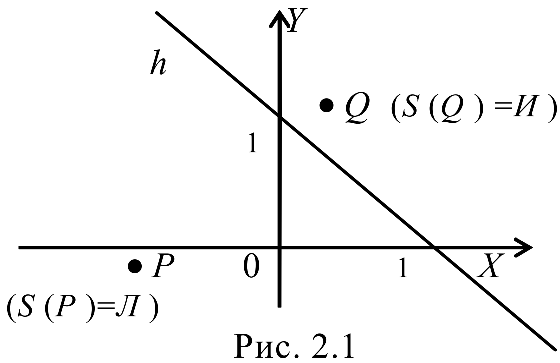

Рис. 2.1

Всякий предикат описывает некоторые свойства своих аргументов или отношений между ними.

**Пример 2.3.** Пусть двухместный предикат (иначе говоря – бинарный предикат) $S(X, Y)$ определён условием

$$S(X,Y) = \begin{cases} И, \text{ если } X + Y > 1, \\ Л, \text{ если } X + Y < 1. \end{cases}$$

Если $X$ и $Y$ суть координаты точки $M$ в плоскости $XOY$, то предикат $S(M) \triangleq S(X,Y)$ описывает свойство точек $M$ плоскости $XOY$ находиться над прямой $h$, заданной уравнением $X+Y = 1$ ($S(Q) = И$), или под этой прямой $h$ ($S(P) = Л$), как показано на Рисунке 2.1.

**Замечание 2.1.** Для точек $M_\alpha$ прямой $h$, координаты $x_\alpha, y_\alpha$ которых связаны равенством $x_\alpha + y_\alpha = 1$, бинарный предикат $S(X,Y)$ не определён.

Объектом исследования исчисления предикатов являются предложения, во множество которых входят следующие предложения:

а) простые предложения – все переменные, кроме предметных,

б) сложные предложения, образуемые из простых предложений тремя способами:

1) Если $S(x_1, x_2, ..., x_k, x)$ – $(k+1)$-местный предикат и $a$ есть имя предметной переменной $x$, тогда $S(x_1, x_2, ..., x_k, a)$ есть $к$-местный предикат.

2) Если $S$ и $T$ суть предложения, тогда предложениями будут слова: $\neg S$, $S \& T$, $S \vee T$, $S \Rightarrow T$, $S \Leftrightarrow T$, при этом в бинарных связках свободные переменные входят в $S$ и $T$ одновременно.

3) Если $S(x)$ есть предложение со свободной переменной $x$, то предложениями, но уже со связанной переменной $x$ будут слова: $\forall x\ S(x)$ и $\exists x$ $S(x)$, значения которых определяются следующими двумя аксиомами:

$$\forall x\ A(x) \Rightarrow A(t) \text{ и } A(t) \Rightarrow \exists x\ A(x).$$

В логике предикатов к правилам вывода исчисления высказываний добавляются два связанных с кванторами $\exists$ и $\forall$ правила вывода

$$\frac{A \Rightarrow B(a)}{A \Rightarrow \forall x B(x)} \text{ и } \frac{B(a) \Rightarrow A}{\exists x B(x) \Rightarrow A},$$

где переменная $x$ не входит в $B(a)$. В этих правилах в числителе стоит посылка, а в знаменателе – заключение.

**Пример 2.4.** (См. [15, с. 125]). Пусть $S(a,b)$ есть бинарный предикат, определяющий отношение неравенства во множестве $\boldsymbol{R}$ действительных чисел, т. е. $a < b$. Предикат $S(a,b)$ удовлетворяет, в частности, двум аксиомам:

Аксиома 1. $\neg S(a,a)$, т. е. $a < a$ ложно,

Аксиома 2. $S(a,b) \& S(b,c) \Rightarrow S(a,c)$, т. е. $(a < b\ и\ b < c) \Rightarrow a < c.$

Доказать, что $\neg S(b,a)$, т. е. $b < a$ ложно.

Для доказательства будем использовать пять правил вывода:

1. Правило замены предметной переменной.

2. Правило разъединения посылок:

$$(A \& B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)).$$

3. Тавтологию $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

4. Правило перестановки посылок:

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C)).$$

5. Схему заключения $(A \& (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$.

Каждое из четырёх последних правил вывода относится к исчислению высказываний и может быть доказано составлением соответствующих истинностных таблиц, что мы оставляем читателю в качестве упражнений.

● 1-й шаг доказательства. Заменив в Аксиоме 2 $c$ на $a$, получим импликацию $S(a,b) \& S(b,a) \Rightarrow S(a,a)$.

2-й шаг. Заменив в Правиле 2 $A$ на $S(a, b)$, $B$ на $S(b, a)$ и $C$ на $S(a, a)$, получим следующие две импликации:

$$S(a,b) \Rightarrow (S(b,a) \Rightarrow S(a,a)). \qquad (*)$$

3-й шаг. Приняв в Правиле 3 $S(b, a)$ за $A$ и $S(a, a)$ за $B$, из условия (*) получим условие

$$S(a,b) \Rightarrow (\neg S(a, a) \Rightarrow \neg S(b, a). \qquad (**)$$

4-й шаг. Применив Правило 4 к условию (**), получим

$$\neg S(a,a) \Rightarrow (S(a,b) \Rightarrow \neg S(b,a)).$$

5-й шаг. Подставив в Схему заключения 5 $\neg S(a,a)$ вместо $A$, $(S(a,b) \Rightarrow \neg S(b,a))$ вместо $B$, и учитывая Аксиому 1, получим доказываемую формулу $S(a,b) \Rightarrow \neg S(b,a)$.■

Этот пример показывает, что получение даже простых заключений интерпретируемых теорий непосредственным применением правил вывода есть процедура громоздкая. Но именно с помощью таких процедур исчисления предикатов решаются в математической логике основные проблемы обоснования математики. Из других областей приложения математической логики можно назвать теорию алгоритмов, теоретическую кибернетику, теорию кодирований, теорию контактно-релейных схем и т.д.

Подробности можно найти в книгах [10], [15], [19], [21], [22], [33], [37], [39], [48], [49], [53], [65], [76], [78, [88], [93].

### Вопросы Читателю

**1.** Можно ли доказать основные законы традиционной логики? Если Ваш ответ *да*, тогда скажите, как это сделать?

**2**. Что общего у тавтологии и противоречия?

**3.** Какое значение должно принять высказывание $B$, чтобы высказывание $(A \Rightarrow B) \& (\neg A \Rightarrow B)$ стало истинным?

**4.** Можно ли сократить число независимых логических связок до одной? Ответ на этот очень трудный вопрос можно найти, например, в книге Э. Мендельсона [53].