ГЛАВА I

АРХИТЕКТУРА МАТЕМАТИКИ И АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

1.1. Архитектура математики

Группа французских математиков, объединённых под псевдонимом Никола Бурбаки (о Н. Бурбаки читай: [23], [50], [92] – библиографический список в конце книги), пишет (по некоторым сведениям – писала в 1938–68 годах) самый грандиозный трактат XX века – “НАЧАЛА МАТЕМАТИКИ” – “Elements de mathtmatique” par Nicolas Burbaki. Цель трактата – изложение всего математического знания с единой и достаточно оригинальной точки зрения. Первая книга трактата выпущена в 1939 году, но все ускоряющееся развитие математических дисциплин, лавинообразное увеличение объёма специальной математической информации ставят под сомнение достижение поставленной цели. Тем не менее, большинство книг трактата переведено на многие языки мира, в том числе, и на русский язык. Одной из последних в этом ряду, 24-й по нашему подсчёту, стоит “Алгебра. Гомологическая алгебра”, изданная в 1987 году издательством “Мир”.

В статье “Архитектура математики” ([6], с. 245–259) автор Н. Бурбаки утверждает, что в развитии математической науки выкристаллизовалось направление, называемое аксиоматическим методом. Суть этого метода состоит в том, что каждая математическая дисциплина строится на базе теории множеств как на общем фундаменте посредством задания на множествах соответствующих структур.

Чтобы задать на множестве (на множествах) некоторую структуру Σ, определяют одно или несколько отношений, в которых находятся элементы множества (множеств). Свойства, которым удовлетворяют вводимые отношения, определяются аксиомами рассматриваемой структуры Σ. При этом у элементов исходных множеств не предполагается никакой иной изначальной реликтовой природы. Аксиоматическую теорию структуры и составляют аксиомы структуры, логические следствия из аксиом и выводы таких следствий.

Следуя Н. Бурбаки (см. [6], с. 258–259), можно выделить три основных типа структур:

1) групповые,
2) топологические,
3) порядка.

Отношения, определяющие групповые структуры, называют законами композиции и задают на тройках (a, b, c) элементов a, b и c, когда один элемент однозначно определяется парой других. Например, закон, определяющий аддитивную группу (группу по сложению), записывают так: $a+b=c$. Закон мультипликативной группы (группы по умножению) записывают, как читатель уже догадался, в виде равенства $a \cdot b=c$. При этом элементы a, b и c в каждом из этих равенств берутся из одного и того же множества. В более общем случае в закон композиции могут входить элементы из двух и трех оговоренных в аксиомах множеств.

Интуитивно ясные понятия непрерывности и разрывности линии, понятие окрестности точки числовой прямой и не так очевидное понятие предела находят точную абстрактную формулировку в аксиомах топологических структур.

Наконец, структура порядка φ, отношение порядка φ на множестве M (во множестве M) задаётся на парах (иногда не на всех парах) элементов из множества M. Свойства этого отношения φ описываются соответствующими аксиомами. Так, всем хорошо известное отношение “<” неравенства на множестве действительных чисел даёт пример отношения, определённого для всех пар (a, b) чисел a и b. Более сложный пример отношения порядка даёт “цепь включений”

$$\{\text{СТУДЕНТ}\} \subset \text{ГРУППА} \subset \text{ВУЗ} \subset \text{ГОРОД} \subset \text{СТРАНА}.$$

По Н. Бурбаки, “...в своей аксиоматической форме математика представляет скопление абстрактных форм – математических структур, и оказывается (хотя, по существу, и неизвестно почему), что некоторые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм” ([6], с. 258–259).

Многие современные теории в математике используют идею расслоенного пространства, простейшим примером которого является прямое, в иной терминологии декартово, произведение двух множеств X и Y, т. е. множество

$$X \times Y = \{(x, y): x \in X,\ y \in Y\}$$

пар (x, y).

В связи с этим профессор А. П. Норден (12.11.1905 – 15.06.1988) пришёл к мысли, “...что в число основных структур Бурбаки не попала очень важная четвёртая структура, которую мы предлагаем назвать структурой композиции” [55, с. 118]. Однако мы не будем явно использовать эту структуру, а также не будем обсуждать возможности причисления к *основным* других структур или сокращать число основных. Ибо, заменяя, например, групповую структуру подходящими отображениями множеств, мы лишь формально отказываемся от этой структуры при фактическом использовании аксиом, определяющих упомянутую структуру.

Академик А. Н. Колмогоров в лекции для учителей "Современные взгляды на природу математики", опубликованной в 1969 году, писал об архитектуре математики следующее: "Появляется много книг, излагающих начала "современной математики" ... . За "современную" при этом обычно выдаётся концепция, которая может быть охарактеризована следующими двумя тезисами:

А. В основе всей математики лежит чистая теория множеств.

Б. Специальные разделы математики занимаются структурами, принадлежащими к тем или иным родам структур. Каждый род структур определяется соответствующей системой аксиом, выраженной на языке теории множеств. ...

Современность этой концепции относительна" (см. [38, с. 227]).

1.2. Аксиоматические, формализованные теории

В этом пункте мы дадим, следуя Эллиоту Мендельсону ([53, с. 36]) краткое описание сущности ***аксиоматической теории***.

Аксиоматическая теория S считается заданной, если приняты следующие соглашения:

(**A**) Задано множество символов – алфавит теории S, конечные наборы символов теории S названы выражениями теории S.

(**B**) Дано, выделено подмножество $\{F\}$ множества выражений теории S, называемых формулами теории S, и, следовательно, определена эффективная процедура выявления формул из всех выражений теории S .

(**C**) Из множества $\{F\}$ всех формул выделено подмножество $\{A\}$ формул A, называемых аксиомами теории S, и при этом оговаривается возможность эффективно выяснить, является ли данная формула аксиомой теории S .

(**D**) Задано конечное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_k\}$ отношений между формулами, называемых правилами вывода, так что для каждой формулы F_{k_0} и каждого отношения φ_{i_o} по каждому множеству из m формул $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ эффективно решается вопрос: находятся ли данные m формул F_k в отношении φ_{i_o} с формулой F_{k_0}, и если да, то формула F_{k_0} называется непосредственным следствием данных m формул F_k по правилу φ_{i_o}.

Выводом в теории *S* называется всякая такая последовательность ($F_1, \ldots, \ \ldots, F_p$) формул F_k, что каждая формула F_k есть либо аксиома теории *S*, либо непосредственное следствие каких-либо формул по одному из правил вывода.

Формула *T* теории *S* называется теоремой теории *S*, если существует в *S* вывод ($F_1, F_2, \ldots, F_p$, T), называемый выводом формулы *T*. Множество {*T*} всех теорем есть минимальное множество, содержащее все аксиомы теории *S* и замкнутое относительно всех правил вывода.

Формула F_0 теории *S* называется разрешимой, если для этой формулы найдётся эффективная процедура выяснения, является ли данная формула F_0 теоремой теории *S*. В противном случае формула F_0 теории *S* называется неразрешимой (ср. Соглашение (B)).

Если алфавит теории *S* содержит знак отрицания “¬”, то теория *S* называется непротиворечивой, если не существует в этой теории такой формулы F_0, что F_0 и $\neg F_0$ выводимы в теории *S*.

Теория *S* называется полной, если для всякого содержательного предложения-формулы *F* в этой теории выводимо либо *F*, либо ¬*F*.

Австрийский математик Курт Гёдель доказал в 1931 году две теоремы, объединённые позднее под общим названием “Теорема Гёделя о неполноте”. Их формулировки приведены ниже.

Первая теорема Гёделя о неполноте. *Всякая, достаточно богатая содержанием теория S неполна, то есть в такой теории можно сформулировать утверждение, которое, не выходя за рамки теории S, нельзя ни доказать, ни опровергнуть.*

Вторая теорема Гёделя. *Непротиворечивость теории S не может быть доказана средствами теории S.*

Доказательства этих теорем описаны в [33]. В 1947 году работавший в США польский математик Альфред Тарский доказал, что всякое утверждение элементарной геометрии разрешимо. Кроме этого отметим, что непротиворечивыми, полными и разрешимыми являются теория линейных пространств и исчисление высказываний. Доказана также непротиворечивость арифметики, элементарной геометрии, анализа, но ни анализ, ни арифметика не являются разрешимыми теориями. Т. е. доказано, что в арифметике (в анализе) сформулированы утверждения, которые нельзя ни опровергнуть, ни доказать средствами арифметики (анализа). Примеры и доказательства смотрите в книгах: [33], [37], [48].

1.3. Алфавит, грамматика и метаязык аксиоматической теории

Назначение языка аксиоматической (формализованной) теории – однозначное понимание при записи и чтении текстов теории. Каждый естественный язык (русский, английский, немецкий и т.д.) имеет алфавит и грамматику, то есть набор правил построения грамматически правильных предложений. Но само понятие “правильное предложение” и полный список правил построения правильных предложений не сформулированы ни для одного естественного языка, а если они и будут сформулированы для какого-нибудь из этих языков, то окажутся чрезвычайно сложными, что отражает сложность природы естественных языков. Поэтому каждая формализованная теория имеет свой точный формальный язык.

Прежде всего, отметим, что каждый формальный язык есть язык письменный. Это означает, что каждое слово, предложение формального языка реализуется на бумаге, на доске, на экране и т. п. Далее, каждый формальный язык имеет три составляющих: алфавит, синтаксис, семантику. Алфавит A формального языка L состоит из символов – букв, т. е. неделимых лексикографических знаков, различных и различимых и не имеющих никакого изначального смысла.

Конечные упорядоченные наборы букв алфавита A, например записанные слева направо в одну линию, образуют множество W слов языка L. Из слов по правилам, образующим синтаксис языка L, составляют предложения-формулы. Наконец, в семантику C языка L входят соглашения C_i, i=1, 2,..., о смысле, который вкладывается в формулы.

При изучении естественного иностранного языка используется естественный родной язык, называемый в этой ситуации по отношению к иностранному языку ***метаязыком.*** Так и при изучении формального языка L используются средства некоторого другого языка, называемого ***метаязыком языка L.*** В качестве такого метаязыка обычно служит тот или иной естественный язык, дополненный специальными, соответствующими формальному языку L техническими терминами и символами, и несколько ограниченный. Например, в метаязыке нет необходимости использовать междометия, восклицательные предложения, прямую речь и т. п. Так, в приведённом выше описании формального языка L метаязыком служит русский язык, а в роли дополнительных символов выступают буквы L, F, W, C.

1.4. Уровень формализации математических дисциплин

Каждая математическая дисциплина есть наука точная, что обусловлено как предметом исследования, так и методом и, в первую очередь, языком. Язык математики, как и язык всякой науки – это язык понятий и отношений между ними. Для краткости изложения, в том числе и в метаязыке формализованной теории, понятию присваивается термин, обычно отождествляемый с некоторым символом.

Можно выделить две крайности в использовании языка и метаязыка теории. В первом случае при точном следовании схеме *понятие – термин – символ* количество метаязыковых символов становится практически неограниченным. Достаточно хорошо формализованная теория – “Теория множеств” Н. Бурбаки [7] содержит более 1700 понятий-терминов.

С другой стороны, минимальное число символов языка можно принять равным двум (в однобуквенном алфавите каждое слово пишется в отдельную строку, что эквивалентно наличию второй буквы – пробела). В этих крайних случаях возникают непреодолимые трудности технического и психологического характера при записи и чтении текста.

Вот что говорят по этому поводу А. А. Френкель и И. Бар-Хиллел: “Не существует никакого пригодного для математики вполне надёжного языка, свободного от двусмысленностей разговорного языка и застрахованного от ошибок памяти, этот недостаток рассматривается как довод в пользу точки зрения, противостоящей формализму, и согласно которой точность математики следует искать не “на бумаге”, а “в человеческом разуме” [83, с. 257].

Мы придерживаемся более мягкой оценки возможностей формализации математики, изложенной в замечательной книге [1] Г. П. Акилова и В. Н. Дятлова: “Поскольку идея об абсолютной формализации математики, по-видимому, совершенно бесплодна, возникает вопрос об уровне её формализации, то есть о проведении границы между “общепонятным” и “точно формулируемым ...” [1, с. 5]. И эту границу они выбирают в своей книге не без юмора: “В нашем случае решение этого вопроса осложняется тем, что мы не предполагаем у читателя никаких специальных, точных знаний в какой-либо области математики, и в частности в математической логике. Отдавая отчёт в непрочности занятой нами позиции, мы будем исходить из предпосылки, что читатель лишь в области практической логики математики обладает интуицией, достаточно богатой для того, чтобы истинность высказывания “*все черти зелёные*” не была для него ни неожиданной, ни тем более спорной... .”

Мы, уважаемый читатель, не будем предъявлять к метаязыку каких-либо жестких ограничений и будем широко использовать общеизвестные тексты содержательной математики. И, более того, границу между языком математики и метаязыком будем обозначать лишь в некоторых случаях.

1.5. Соглашение об языке этой книги

Соглашение А. Метаязыком будет служить русский язык с его алфавитом и синтаксисом. Кроме того, будут использоваться следующие символы:

а) буквы латинского алфавита,

б) буквы греческого алфавита,

в) римские и арабские цифры: I, II, ..., X, 0, 1, 2, ..., 9,

г) логические знаки: $\neg, \cdots, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$,

д) специальные математические символы, значение и способ употребления которых будет оговариваться как для всех впервые вводимых определяемых, так и для некоторых общеизвестных. Иногда способ употребления символов и, тем самым, соответствующих понятий будем определять аксиомами.

Пример 1.1. Буква = читается “равно” и означает отношение равенства, которое определяется следующими свойствами-аксиомами равенства (эквивалентности):

1) $a = a$ – рефлексивность равенства,

2) если $a = b$, то и $b = a$ – симметричность равенства,

3) если $a = b$ и $b = c,$ тогда $a = c$ – транзитивность равенства.

Пример 1.2. Метаязыковый символ присваивания $\triangleq$ будем использовать вместо фраз: равно по определению, равно с точностью до символа:

$$1 + 3 \triangleq 4\,,\ a^0 \triangleq 1,$$

$$\text{если } \alpha \neq 90^\circ + 180^\circ \cdot n, \text{ то } \tfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \triangleq tg\alpha,$$

$$e \triangleq \lim\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n.$$

В некоторых, не вызывающих недоразумений, случаях знак дефиниции Δ над буквой = будем опускать: 2+1=3 (вместо $2+1\overset{\Delta}{=}3$).

Пример 1.3. Буква $n!$ – единый символ – читается *эн-факториал* и определяется равенствами

$$0!\overset{\Delta}{=}1, 1!\overset{\Delta}{=}1, 2!\overset{\Delta}{=}1\cdot 2, \ldots,\ \ n!\overset{\Delta}{=}1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n \ \ (n \text{ множителей}).$$

Пример 1.4. Символ $\forall$ (перевернутая первая буква английского слова *Any* – любой, всякий, какой-нибудь) называется *квантором общности* и заменяет слова *любой, всякий, каждый* и фразы *для любого*, *для всякого, для каждого*.

Пример 1.5. Символ $\exists$ (перевёрнутая первая буква английского слова *Existence* – существование, наличие) называется *квантором существования* и заменяет слова *существует, имеется, найдётся*.

С помощью кванторов $\forall$ и $\exists$ метаязыковая фраза $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ записывается в формализованном виде так:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:((\forall x:0<|x-a|<\delta)\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon), \qquad (*)$$

что означает: для всякого положительного ε существует *такое* положительное δ, что для всех *таких x*, что выполняется неравенство $0<|x-a|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Слова *буква, символ, знак* мы считаем синонимами без учёта оттенков значений этих слов в русском языке.

В тексте (*) метаязыковый символ «:», означающий в первом случае *такое* и во втором случае – *таких*, можно заменить на две пары скобок – символы формализованного языка. Однако соглашение о том, что действие квантора $\forall(\exists)$ может отменить лишь квантор $\exists(\forall)$, позволяет в тексте (*) опустить и двоеточие, и все круглые скобки. Но это затруднит понимание текста.

Так как ниже у нас будет мало формализованное изложение, то множество символов изначально не фиксировано.

Соглашение В. Из букв алфавита по правилам грамматики русского языка и общепринятым правилам математики будем составлять слова и предложения.

Пример 1.6. $x+2=y$.

Пример 1.7. Из неравенств $a>b$ *и* $b>0$ следует неравенство $a\cdot b>b\cdot b$.

Пример 1.8. 2>3 – *ложное высказывание.*

Пример 1.9. $q \in M$ или $M \ni q$. Оба эти слова означают одно и то же: элемент q принадлежит множеству M, или, множество M содержит элемент q. Здесь $\in$ – символ принадлежности, происходящий от первой буквы ε –эпсилон греческого слова $\varepsilon\sigma\tau\iota$ – есть, быть.

Это второе **соглашение В** исключает из нашего рассмотрения слова, фразы и предложения, лишённые смысла. При этом концевую фразу *лишенные смысла* мы в надежде на интуицию читателя уточнять не будем.

Математические слова, фразы и предложения мы будем называть общим для них и для всех привычным термином *выражение* (см. п. 1.2**.** *Определение аксиоматической теории*). Уточнением этого понятия будет следующее ниже соглашение.

Соглашение С. Все буквы, входящие в выражение, мы будем делить на 4 типа.

1. *Имена,* т. е. символы, значение которых не меняется во всех выражениях, например:

$$+, -, \sin, 0, 1, 2, ..., 9, \pi, \sqrt[3]{\ }, \neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists, (,), [,] \text{ и т.д.}$$

2. *Постоянные,* т. е. символы, значения которых в выражении не меняются в некоторых, особо оговоренных или “по умолчанию” подразумеваемых, условиях. Например, слово $P_1(x) \stackrel{\Delta}{=} a_0 \cdot x + a_1$ определяет двучлен первой степени относительно буквы x с коэффициентами a_0 и a_1*, являющимися постоянными* для этого двучлена $P_1(x)$.

3. *Переменные,* точнее сказать, *свободные переменные* – символы, вместо которых в выражение можно ставить буквы-имена, множество которых для каждого выражения оговаривается или считается известным по умолчанию.

Пример 1.9. $f(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$**.**

Пример 1.10. $f(x_0)$, $f \in F \stackrel{\Delta}{=} \{g: \boldsymbol{R} \xrightarrow{g} \boldsymbol{R}\}$.

В первом примере f и во втором x_0 считаются, ***по умолчанию***, постоянными. И, наоборот, в первом примере вместо x можно ставить любое действительное число, а во втором примере f может быть любой функцией $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, что явно оговорено.

Так что, строго говоря, переменная в выражении – это всегда *пара* (x, X), где X есть множество, элементы которого можно ставить в выражение, содержащее символ x (см. Определение 3.7, с. 36). В такой трактовке становится очевидным следующий факт: $x \notin X$, если (x, X) есть переменная (ср. [29, с. 106]).

Наконец, в некоторых ситуациях переменную (x, X) наделяют ещё некоторым порядком φ в X, то есть под переменной подразумевают тройку (x, X, φ), несколько подробнее об этом будем говорить ниже.

4. *Связанные переменные* образуют четвёртый тип букв в выражениях и выделяются условием своего вхождения в выражение, лишающим смысла всякую замену переменной на символ-имя.

Замечание 1.1. В неформализованных математических текстах без явной оговорки принимается следующее соглашение: первые буквы алфавита (латинского, русского и др.) использовать для обозначения произвольных, но конкретных элементов множеств, т. е. постоянных. Последними же буквами алфавита обозначать ''текущие" элементы множеств, т. е. переменные. Например, в выражении $y = a^x$, $0 < a \neq 1$, буквой a обозначено какое-то определённое число, но вместо x можно ставить любое действительное число, то есть $x \in (x, \boldsymbol{R})$ по нашему соглашению С. Однако обычно пишут $x \in \boldsymbol{R}$, что короче, но менее точно.

Пример 1.11. $\int f(x)\,dx \stackrel{\Delta}{=} \{F(x) : F'(x) = f(x),\ x \in X \subseteq \boldsymbol{R}\}$.

В левую часть этого равенства бессмысленно ставить вместо x какое-либо $a \in X$, так как x входит в $\int f(x)dx$ связанно. Но в равенство $F'(x) = f(x)$ переменная x входит свободно, если $F'(a) \stackrel{\Delta}{=} F'(x)_{|x=a}$.

Пример 1.12. $\lim\limits_{t \to 0} h(t)$, здесь t – связанная переменная.

Пример 1.13. $\int\limits_0^x f(x)dx$, $x \in X$, в этом примере, как и в Примере 1.11, x входит и свободно, и связанно.

Пример 1.14. В предложения $x^2 - a^2 = (x-a)\cdot(x+a)$ и $x + b = c$ переменная x входит свободно. Но в следующих предложениях с кванторами:

$$\forall x\,(x^2 - a^2 = (x-a)\cdot(x+a)) \text{ и } \exists x\,(x + b = c)$$

переменная x уже связана.

Обратите внимание на роль кванторов: первое условие утверждает не только правило разложения разности квадратов на линейные множители, но и справедливость его *для всех x,* а второе условие говорит о *существовании* решения уравнения $x+b=c$.

Пример 1.14 иллюстрирует не только значение и роль кванторов $\forall$ и $\exists$, но и силу их действия: если переменная попадает в область действия одного из кванторов, то эта переменная входит в выражение связанно.

Замечание 1.2. Так как выражение с переменной инвариантно относительно замены символа переменной (примите, читатель, это утверждение как аксиому), то мы будем стараться не допускать там, где это возможно, одновременно свободного и связанного вхождения переменной в одно и то же выражение. Так, Примеры 1.11 и 1.13 можно (см. Приложение В) записать, соответственно, следующим образом:

$$^{x}\!\!\int f(t)dt \stackrel{\Delta}{=} F(x)+C(F,G), \text{ где } G'=F'=f \text{ и } C(F,G)\in \boldsymbol{R},$$

$$\int_{0}^{x} f(t)\,dt, \;\; x\in X, \;\; t\in(t,X).$$

Последнее **Соглашение D** – *семантическое соглашение.* Из всех предложений, в том числе и состоящих из одного слова-выражения, мы будем выделять *предложения-высказывания*, в отношении которых можно ставить вопрос: *истинны* они или *ложны.* Не уточняя ответа на вечный вопрос "*что есть истина?",* мы вернёмся к этой теме в следующей главе. А сейчас введём два понятия.

Выражение с переменной мы будем называть *именной формой,* если замена переменной на имя превращает данное выражение в имя.

Например, $x+3$ при замене x на + 2 превращается в имя 2 + 3.

Выражение с переменной назовём *высказывательной формой,* если замена переменной на имя превращает это выражение в высказывание. Например, выражение $x+3>0$ при замене $\boldsymbol{x}$ на – 4 превращается в *ложное высказывание* $-4+3>0$.

Ещё **Примеры:**

1.15. Быть или не быть?

1.16. Да здравствует солнце!

1.17. Квадратом называется ромб, имеющий прямой угол.

1.18. $2 < \sqrt{a},\ \sqrt{a} < 3,\ a \in \boldsymbol{R}$.

1.19. $x+2, x\in\boldsymbol{R}, x<1$.

Первые два предложения, как и все вопросительные и восклицательные, не составляют высказываний. Третье предложение вводит новое понятие – термин *квадрат*, и, как всякое определение, не может быть ни ложным, ни истинным. Пример°1.18 представляет собой высказывательную форму. Если в неё вместо a вставить число из интервала (4, 9), то получим истинное высказывание, при иных действительных значениях a высказывание получится ложным. Наконец, последнее предложение даёт пример именной формы. При каждом из явно указанных значений переменной x эта именная форма превращается в имя соответствующего действительного числа.

С использованием понятий (см. Определение°3.7) пары $z \overset{\Delta}{=} (x, y)$ и n-ки $u \overset{\Delta}{=} (x_1, x_2, ..., x_n)$ понятия именной и высказывательной форм распространяются на выражения с двумя и с n переменными.

В математической логике имена и именные формы объединяют в одно множество – множество *термов,* а высказывания и высказывательные формы, соответственно, во множество *формул*. Более близкое знакомство с высказываниями – в следующей главе.

Вопросы Читателю

1. Каковы четыре соглашения, определяющие сущность аксиоматической теории? Нельзя ли уменьшить их число?

2. Каковы составляющие формального языка?

3. На какие четыре типа делятся буквы математических выражений?

4. Может ли *имя* в выражении быть *переменной*?

5. Что имеют общего и чем отличаются два следующие предложения:

1) если $x < -3$, то $|x+3| = 3 - x$;

2) $\forall x \in (\infty, -3)\ |x+3| = 3 - x$.

6. Можно ли получить следствие из одной отдельно взятой аксиомы? Если Ваш ответ *да*, то приведите пример.