ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Порядок, дискретность, непрерывность

А.1. Теорема Э. Цермело и дискретность

Введя ***аксиому выбора*** (см. Глава 3, п.п. 7. 3, 7.7) Э. Цермело доказал теорему о полном упорядочении линейно упорядоченного множества, по которой для каждого линейно упорядоченного множества M можно указать линейный порядок φ_0, относительно которого во множестве M существует такой элемент a_0, что

$$\forall x \in (M \setminus \{0\}) \stackrel{\Delta}{=} M_1 \;\; a_0 \stackrel{\varphi_0}{\prec} x .$$

По этой же теореме для множества M_1 существует порядок φ_1 и такой элемент $a_1 \in M_1$, что

$$\forall x \in M_1 \setminus \{a_1\} \stackrel{\Delta}{=} M_2 \;\; a_1 \stackrel{\varphi_1}{\prec} x .$$

По индукции множество $\Phi \stackrel{\Delta}{=} \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ порядков φ_i образует во множестве M некоторый линейный порядок φ, относительно которого M дискретно (см. Гл. 3, п. 5).

А2. Дискретный порядок во множестве чисел отрезка [0,1]

В определении действительного числа α, например, из отрезка [0,1], как некоторой бесконечной десятичной дроби (см. [28, с. 40])

$$\alpha \stackrel{\Delta}{=} 0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots \stackrel{\Delta}{=} 0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots, \;\; a_i \in \{0,1,2,\ldots,9\},$$

бесконечность не явно предполагается потенциальной.

Покажем алгоритм построения списка $S_{\omega,10}$ таких дробей.

Пусть ${}_{10}S_1$, ${}_{10}S_2$, ... означают, соответственно, множества {0,0, 0,1, 0,2, ... , 0,9}, {0,01, 0,02, 0,03, ..., 0,09, 0,11, ... , 0,19, ..., 0,21, ..., 0,99}, ... десятичных дробей, записанных в столбец. Пусть

$$S_{2,10} \stackrel{\Delta}{=} {}_{10}S_1 \cup {}_{10}S_2, \ldots, \; S_{d,10} \stackrel{\Delta}{=} \bigcup_{k=1}^{d} {}_{10}S_k ,$$

т. е. $S_{d,10}$ есть список ***всех*** d-значных десятичных дробей отрезка [0, 1]. Матрица $(S_{d,10})$ списка $S_{d,10}$, в которой строки чисел из списков ${}_kS_{10}$, $k < d$, дополнены справа необходимым количеством нулей, имеет размер $\langle S_{d,10} \rangle = \langle 10^d, \; d{+}1 \rangle$. Следовательно, матрица $(S_{d,10})$ имеет $(10)^d$ строк и $(d+1)$ столбец и не может иметь диагональ.

Положим, по определению, $S_{\omega,10}=\lim S_{d,10}$, где lim понимается как неограниченная возможность перехода от списка $S_{d,10}$ к списку $S_{d+1,10}$ приписыванием каждому числу – строке матрицы ($S_{d,10}$) каждой из цифр *i,* $0\le i\le 9$. При этом, если количество элементов множества *A* обозначить символом $|A|$, то справедливо равенство $|S_{d+1,\ 10}|=10\cdot|S_{d,\ 10}|$, которое будет справедливо при всех $d\in \boldsymbol{N}$. Таким образом,

$$S_{\omega,10}=\{\alpha_k:\ \alpha_k=\sum_i a_{k\,i}10^{-i},\ k,\,i\in \boldsymbol{N}\},$$

где для конечной десятичной дроби α_m $\exists i_0:\forall i>i_0:\ a_{m\,i}\equiv 0$, а для десятичной периодической дроби $\alpha_n=0,a_{n1}\,a_{n2}\ldots a_{nk}\ldots$ с периодом $(a_{n\,(k+1)}\cdots a_{n\,(k+p)})$ $\exists\, j_0,\ k+1\le j_0\le k+p:\ a_{n\,j_0}\ne 9$.

По традиции (см. [28, с. 40]) $S_{\omega,10}=\{x\colon 0\le x\le 1\}$.

Таким образом, во-первых, список $S_{\omega,10}$ даёт *дискретный порядок* для множества всех десятичных дробей отрезка [0, 1], во-вторых, этот список показывает *недиагонализируемость матрицы* ($S_{\omega,10}$).

Из последнего вытекает (см. [71, с. 73], [101, p. 199], ср. [92], [99, S. 463]) *несостоятельность диагонального метода* Кантора [110, с. 27] при доказательстве несчётности множества чисел отрезка [0, 1]. Наконец, из алгоритма построения списка $S_{d,10}$ очевидно, что все числа в этом списке и, следовательно, в списке $S_{\omega,10}$ различны.

А.3. Некорректность определения множества *всех* действительных чисел отрезка [0, 1] как множества бесконечных десятичных дробей

Пусть S_d есть множество $\{1\}\cup S_{d,2}\cup S_{d,3}\cup\ldots\cup S_{d,d-1}\cup \widetilde{S}_{d,d}$, где

$$\widetilde{S}_{d,d}\overset{\Delta}{=}\begin{cases} S_{d,d},\ \textit{если}\ d\ne n^k,\ n\in \boldsymbol{N},\ k>1,\\ \varnothing,\ \textit{если}\ d=n^k,\ k>1.\end{cases}$$

Таким образом, S_d есть множество всех *d*-значных чисел: двоичных, третичных, …, *d*-ичных, при $d\ne n^k,\ k>1$, из отрезка $[0,\ 1]\in \boldsymbol{R}$.

Очевидно, что при $d\ge 10$ справедливо следующее включение

$$S_d\supset S_{d,10}. \qquad (*)$$

Если при этом обозначить символом B_d разность $S_d\setminus S_{d,10}$ множеств S_d и $S_{d,10}$, тогда

$$A_{d+1} \stackrel{\Delta}{=} \left|B_{d+1}\right| > \left|B_d\right| \cdot c_d \text{, где } 2(d-2) < c_d , \qquad (**)$$

и, следовательно, последовательность (A_d), $d \in \boldsymbol{N}$, $d \neq n^k$, будет неограниченна сверху. Поэтому инъективная функция

$$f\colon S_{d,10} \to S_d \qquad (***)$$

может быть лишь вложением, но не ***биекцией***: $f(\,S_{d,10}) \subset S_d$.

Индуктивно множества S_d можно определить таким алгоритмом:

$S_1 = \{1\}$,
$S_2 = S_1 \bigcup S_{2,2}$,
$S_3 = S_2 \bigcup ({}_2S_3) \bigcup S_{3,3}$,
$S_4 = S_3 \bigcup ({}_2S_4 \bigcup {}_3S_4) \bigcup \varnothing,$,
$S_5 = S_4 \bigcup ({}_2S_5 \bigcup {}_3S_5 \bigcup {}_4S_5) \bigcup S_{5,5}$,
. . . .
$S_d = S_{d-1} \bigcup (\bigcup_{k=2}^{d-1} ({}_kS_d)) \bigcup \widetilde{S}_{d,\,d.}$.

По определению теоретико-множественной операции объединения на каждом шаге список S_d пополняется лишь новыми дробями.

Так, например, список S_5 дополнят лишь числа $\dfrac{1}{6}$ и $\dfrac{5}{6}$ из дробей $\dfrac{1}{6}, \dfrac{2}{6}, \dfrac{3}{6}, \dfrac{4}{6}$ и $\dfrac{5}{6}$, но $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \in S_2$, а числа $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ и $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ входят в список S_3.

Как и в п. 2 определим $S_\omega \stackrel{\Delta}{=} \lim S_d \stackrel{\Delta}{=} [0,1]$.

Из (*) и (**) следует, что $S_\omega \supset S_{\omega,10}$, т. е. $[0,1] \neq [0,1]$.

А.4. О мощности множества действительных чисел отрезка [0, 1]

Пусть мощность множества чисел отрезка [0, 1] обозначена как $\boldsymbol{c}$. Тогда по п. 2 $\boldsymbol{c} = |S_{\omega,10}|$ и по п.3 $\boldsymbol{c} = |S_\omega|$. Но из (*), (**) и (***) в п. А.3 следует, что

1) $S_\omega \supset S_{\omega,10}$,
2) S_ω неэквивалентно $S_{\omega,10}$ (см. Теорему 6.2.5), т. е. $|S_\omega| \succ |S_{\omega,10}|$.

Итак, $\boldsymbol{c}=|S_\omega|\succ|S_{\omega,10}|=\boldsymbol{c}$, т. е. $\boldsymbol{c}\succ\boldsymbol{c}$ (см. также п. 3.7.6).

А.5. Потенциальная и актуальная бесконечность

Концепция потенциальной бесконечности в теории бесконечных дробей приводит (см. п.п. А.3, А.4) к противоречию $\boldsymbol{c}\succ\boldsymbol{c}$ с классическим представлением.

Как показано ниже, к противоречию со свойствами множества $\boldsymbol{R}$ приводит и допущение *перехода от потенциальной бесконечности к бесконечности актуальной.*

Дополним теперь алгоритм перехода от списка S_d к списку S_{d+1} (см. п. А. 3) следующей процедурой: новые числа в список S_{d+1} будем помещать не *ниже* чисел списка S_d, а вписывать их в естественном порядке из множества $\boldsymbol{R}$.

В каждом так сформированном списке S_d^* крайними будут числа 0 и 1 и все остальные дроби $S_{d,i}$ будут располагаться в порядке возрастания. Так, например, списки S_2^* и S_3^* при записи их в строку имеют вид:

$$S_2^*=(0;\tfrac{1}{4};\tfrac{2}{4};\tfrac{3}{4};1),$$

$$S_3^*=\Big(0;\frac{1}{27};\frac{2}{27};\frac{3}{27};\frac{1}{8};\frac{4}{27};\frac{1}{4};\frac{7}{27};\frac{8}{27};\frac{1}{3};\frac{3}{8};\frac{10}{27};\frac{11}{27};\ \frac{4}{9};\frac{13}{27};\frac{1}{2};\ \frac{14}{27};\frac{5}{9};$$
$$\frac{16}{27};\frac{17}{27};\frac{5}{8};\frac{2}{3};\frac{18}{27};\frac{20}{27};\frac{3}{4};\frac{7}{9};\frac{22}{27};\frac{23}{27};\frac{7}{8};\frac{8}{9};\frac{25}{27};\ \frac{26}{27};1\Big).$$

Если определить $S_\omega^*=\lim S_d^*$ и допустить возможность перехода от потенциальной бесконечности к бесконечности актуальной, то список S_ω^* содержит ***все*** числа отрезка [0, 1] в их естественном порядке. Этот порядок будет дискретным, что очевидным образом следует из построения множества S_ω^*. Но дискретность порядка противоречит тому, что множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ является всюду плотным (см. также п. 3.7.7).

Б. Об алгоритмах курса высшей математики

Б.1. Что такое алгоритм? Алгоритм – понятие такое же древнее, как и сама математика и наука вообще. Истоки традиционного понимания понятия ***алгоритм*** лежат в древнегреческой математике. Термин алгоритм происходит от слова ***Algorithm*** – латинской транскрипизации имени хорезмского учёного Мухамад бен Муса аль ***Хорезми***, жившего в

VIII–IX веках (около 783–850 годов).

Под алгоритмом в самом общем виде понимается любая регламентированная процедура. Так, в аксиоматической теории алгоритмом будет всякий вывод следствий из посылок, т. е. упорядоченное множество правил вывода (см. Глава 1, п. 1.2). Значение понятия ***алгоритм*** возросло в начале XX века в связи с решением проблем формализации математической логики. В 20-х годах прошлого века задача точной формулировки понятия ***алгоритм*** была одной из центральных в математике. В начале XXI века считается общепринятым мнение, что понятие ***алгоритм*** относится к числу основных начальных понятий математики, не допускающих определения в терминах более элементарных понятий (см. также [38, с. 211–215]).

В теории алгоритмов под алгоритмом понимается конечная система правил, описывающих действия и порядок их выполнения при решении задач данного класса. Отметим несколько признаков, признаваемых характеристическими для понятия ***алгоритм***.

1.1. Массовость алгоритма, определяемая потенциальной бесконечностью множества исходных значений параметров (необязательно всех параметров) решаемой задачи (класса задач).

1.2. Правило начала.

1.3. Дискретность алгоритма, т. е. его пошаговая упорядоченность.

1.4. Детерминированность алгоритма, по которой множество значений параметров, получаемых на каждом шаге, однозначно определяется из множества значений, полученных на предыдущих шагах.

1.5. Элементарность шагов алгоритма.

1.6. Направленность алгоритма, определяемая правилом окончания и правилом извлечения результата.

Ниже, как и вообще в курсе высшей математики (*КВМ*), понятие ***алгоритм*** используется в традиционном интуитивном смысле, не очень противоречащем всему сразу вышесказанному.

Б.2. Алгоритмы в курсе высшей математики. Курсом высшей математики для большинства студентов технического вуза заканчивается изучение математики. Это требует усиления методологической направленности изучения *КВМ*, чего можно добиться без ущерба для содержательности *КВМ* по крайней мере двумя способами:

1) повышением уровня научности *КВМ*, и в первую очередь корректностью введения основных понятий,

2) внедрением в содержание курса идей алгоритмизации.

Последнее означает следующее. Все доказанные утверждения и решённые задачи *КВМ*, между которыми *нет принципиальной разницы*, доказаны и решены много лет и веков назад. С другой стороны, *поиск алгоритма решения задачи* всякий раз является эвристическим процессом и потому якобы неподдающимся алгоритмизации из-за неограниченного количества вариантов при выборе следующего шага. Умение же искать алгоритмы создания алгоритмов уже скорее искусство, чем наука. Приобщение к этому искусству и должно быть одной из главных целей изучения математики вообще и *КВМ*, в частности. Другую информацию всегда при необходимости можно найти в справочниках или в Интернете.

Б.3. Примеры.

Б.3.1. Применение векторной алгебры в решении (в доказательстве) задач евклидовой геометрии.

I. Введение *текущего общего* элемента.

II. Перевод данных задачи в векторную форму.

III. Запись посылок в векторной форме с помощью символов

$$\in, \subset, \ \|, \perp \text{ и т. п.}$$

IV. Переход от символьной записи к векторным равенствам.

V. Извлечение результата в векторной форме.

VI. Введение подходящей или даже канонической системы координат для класса решаемых задач.

VII. Извлечение результата в координатной форме.

Замечание Б.1. Каждый шаг этого алгоритма имеет соответствующее классу решаемых задач правило вывода.

Б.3.2. Доказательство существования числа *e*, такого, что

$$a_n \overset{\Delta}{=} (1+\tfrac{1}{n})^n < (1+\tfrac{1}{n+1})^{n+1} \overset{\Delta}{=} a_{n+1} < e < b_{n+1} \overset{\Delta}{=} (1+\tfrac{1}{n+1})^{n+2} < (1+\tfrac{1}{n})^{n+1} \overset{\Delta}{=} b_n.$$

I. $(v_n \overset{\Delta}{=} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow 0<1) \Rightarrow (a_{n+1} > a_n).$ (*)

II. $(u_n \overset{\Delta}{=} \frac{b_n}{b_{n+1}} > 1 \Rightarrow 0<1) \Rightarrow (b_n > b_{n+1}).$ (**)

III. $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = a_n(1+\frac{1}{n}) > a_n \Rightarrow (a_n < b_n).$ (***)

IV. $((*)\&(**)\&(***)) \Rightarrow \begin{cases} а)\ c = \lim a_n, \\ б)\ d = \lim b_n, \\ в)\ c = d. \end{cases}$

V. $c = d \overset{\Delta}{=} e.$

Замечание Б.2. При шаге I и II дроби v_n и u_n оценивались с помощью неравенства Бернулли (см. п. 3.7.6): $(1+\alpha)^n>1+n\alpha$, $n\in\boldsymbol{N}$.

Б.3.3. (ε, δ) – алгоритм проверки существования (поиска) предела A функции f: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ в точке $x=c$.

I. Из уравнения $f(t)=A-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, находим числа $t_i(\varepsilon)$.

II. $\forall t_i(\varepsilon)$, $t_i(\varepsilon)<c$, находим числа $\alpha_i(\varepsilon)=c_i-t_i(\varepsilon)$.

III. $\delta_1(\varepsilon)\triangleq\min\{\alpha_i(\varepsilon)\}$.

IV. Из уравнения $f(v)=A+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, находим числа $v_i(\varepsilon)$.

V. $\forall v_i(\varepsilon)$, $v_i(\varepsilon)>c$, находим числа $\beta_i(\varepsilon)=v(\varepsilon)-c_i$.

VI. $\delta_2(\varepsilon)\triangleq\min\{\beta_i(\varepsilon)\}$.

VII. $\delta(\varepsilon)\triangleq\min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$.

VIII. $\begin{Bmatrix}(\{\exists t: |t-c|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(t)-A|<\varepsilon,\ \ \varepsilon>0\}\Rightarrow 0>1)\Rightarrow\lim\limits_{x\to c}f(x)\neq A,\\ (\{\forall t: |t-c|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(t)-A|<\varepsilon,\ \ \varepsilon>0\}\Rightarrow 0<1)\Rightarrow\lim\limits_{x\to c}f(x)=A\end{Bmatrix}.$

Замечание Б.3. Если число A неизвестно, то его можно найти из условия $(\forall t\,|t-c|<\delta(\varepsilon,A)\Rightarrow|f(t)-A|<\varepsilon,\ \varepsilon>0)\Rightarrow 0<1$, здесь $\delta(\varepsilon, A)$, в свою очередь, можно найти с помощью шагов I–VII.

Б.3.4. Вычисление площади плоской фигуры $D=\{M(x,\ y)\}\subset XOY$, ограниченной линиями: $x=a$, $x=b$, $y=g(x)$, $y=h(x)$.

I. $(\forall x\in[a,b]\triangleq I\ \ g(x)\geq h(x))\Rightarrow$II, иначе$\Rightarrow$VI.

II. $\min\{g(x), h(x), x\in I\}=y_0<0\Rightarrow y_1=y_0$, иначе $y_1=0$.

III. $\begin{cases}x=x^*,\\ y=y^*-y_1,\end{cases}\quad \begin{cases}g^*(x)=g(x)+y_1,\\ h^*(x)=h(x)+y_1.\end{cases}$

IV. $S_в=\int_a^b g^*(x)dx,\quad S_н=\int_a^b h^*(x)dx.$

V. $S_D=S_в-S_н=\int_a^b g^*(x)dx-\int_a^b h^*(x)dx=\int_a^b(g(x)-h(x))dx.$

VI. $g(x)=h(x)\Rightarrow(x_i=c_i,\ i=1,\ k)$.

VII. $I = \bigcup\limits_{i=0}^{k} I_i,\ I_i \overset{\Delta}{=} [c_i,\, c_{i+1}],\ c_0 = a,\ c_{k+1} = b.$

VIII. $\left(\begin{array}{l} g(x) - h(x)_{|x \in I_i} = f_i(x),\ \textit{если}\ g(x) - h(x)_{|x \in I_i} \geq 0, \\ g(x) - h(x)_{|x \in Ij} = -f(x),\ \textit{если}\ \ g(x) - h(x)_{|x \in Ij} < 0. \end{array} \right)$

IX. $S_i = \int_{c_i}^{c_{i+1}} f_i(x)dx, i = 0, k.$

X. $S_D = \sum_{i=0}^{k} S_i.$

Б.3.5. Вычисление площади $S_Э$ поверхности трёхосного эллипсоида

$$Эл \triangleq \{M(x, y, z)\colon\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$$

I. Объём элллипсоида $V_Э \triangleq V_Э(a, b, c) = \dfrac{4\pi}{3} abc.$

II. $V_Э(a+\Delta t, b+\Delta t, c+\Delta t) = \dfrac{4\pi}{3}(a + \Delta t)(b + \Delta t)(c + \Delta t).$

III. $\Delta V_Э = \dfrac{4\pi}{3}(a + \Delta t)(b + \Delta t)(c + \Delta t) - \dfrac{4\pi}{3} abc =$

$$= \frac{4\pi}{3}\{(ab + ac + bc)\Delta t + (a + b + c)(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3\}.$$

IV. $S(t) \overset{\Delta}{=} S(t_1, t_2, t_3) \overset{\Delta}{=} \{M(t_1, t_2, t_3)\colon\ \dfrac{x^2}{t_1^2} + \dfrac{y^2}{t_2^2} + \dfrac{z^2}{t_3^2} = 1\},\ |S(t)| \triangleq S_Э(t),$

$$\exists t^* = (t_1^*, t_2^*, t_3^*)\colon\ a < t_1^* < a + \Delta t,\ b < t_2^* < b + \Delta t,\ c < t_3^* < c + \Delta t,$$

$$\Delta V_Э = S_Э(t^*) \cdot \Delta t.$$

V. $S_Э(t^*) = \dfrac{\Delta V_Э}{\Delta t} = \dfrac{4\pi}{3}((ab + ac + bc) + \ldots).$

VI. $S_Э = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta V_Э}{\Delta t} = \dfrac{4\pi}{3}(ab + ac + bc).$

Замечание Б.4. Точность результата шага IV определяется эксцентриситетами эллипсов осевых сечений.

В частности, при $a=b=c=r$ получим известную формулу для вычисления площади поверхности сферы: $S_{сф} = 4\pi r^2$.

Б.3.7. Раскрытие неопределённостей типа $0/0$ **(**∞/∞**).**

Пусть, например, $A = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ и $a \notin \{0, \infty\}$.

I. $t \overset{\Delta}{=} x - a \to 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = (x = t + a) = \dfrac{t^r \cdot f^*(t)}{t^s \cdot g^*(t)}$, $B = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f^*(t)}{g^*(t)}$.

Если $r=s$, то II.
Если $r>s$ и $|B|\neq\infty$, то III; при $r>s$ и $|B|=\infty\to$V.
Если же $r<s$ и $|B|\neq 0$, то IV; при $r<s$ и $|B|=0\to$VI.

II. $A=B$.

III. $A=0$.

IV. $A=\infty$.

V. $\dfrac{g^*(t)}{f^*(t)} \overset{\Delta}{=} h(t) = t^p \cdot h^*(t) \Rightarrow A = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^{r-s-p}}{h^*(t)} = \ldots$.

VI. $\dfrac{f^*(t)}{g^*(t)} \overset{\Delta}{=} w(t) = t^q \cdot w^*(t) \Rightarrow A = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{w^*(t)}{t^{s-r-q}} = \ldots$.

Замечание Б.5. Переход $z(t) = t^k \cdot z^*(t)$ осуществляется алгебраическими преобразованиями с использованием эквивалентности бесконечно малых, а также с помощью подходящей или необходимой замены переменных.

В. Неопределённый интеграл

Ниже будем рассматривать непрерывные с действительными значениями функции F, G, f, g, h,... заданные на некотором промежутке $I \subseteq \boldsymbol{R}$, например, $H\colon I \to \boldsymbol{R}$, $H \in \{F,\ G, \ldots\}$, а $X \overset{\Delta}{=} (x, I)$, $T \overset{\Delta}{=} (t, I)$ и др. являются переменными.

В. 1. О дифференцировании функций

Из Аксиомы равенства I.3′ (Глава 5): $(a = b) \Rightarrow (\varphi(b) \Rightarrow \varphi(a))$ следует утверждение: если две дифференцируемые функции F и G равны, то равны и их производные, т. е.

$$\forall a \in I\ F'(a) = G'(a) \overset{\Delta}{=} f(a).$$