Министерство образования Российской федерации
Томский политехнический университет

«Утверждаю»,
зав. каф. высшей математики
профессор К.П. Арефьев

А. М. Сухотин

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания, контрольные вопросы и зачётные билеты для студентов первого курса ФГНД, МСФ, ТЭФ и АВТФ

.

Томск-2007

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.

1.Определители 2-го, 3-го и произвольного порядков. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя.

2. Матрицы: размер, миноры, ранг матрицы. Частные матрицы. Обратная матрица.

3. Линейные операции. Линейная зависимость и линейная независимость строк (столбцов) матрицы.

4. Действия над матрицами: линейные операции над матрицами, умножение матриц, транспонирование матрицы.

5. Системы линейных уравнений (СЛУ): решение СЛУ, несовместные и совместные СЛУ, неопределённые и определённые СЛУ, однородные СЛУ, частное и общее решение неопределённой СЛУ.

6. Фундаментальная система решений однородной СЛУ, базис и размерность пространства решений однородной СЛУ, связь между решениями однородной и неоднородной СЛУ .

7. Линейное пространство: определение и примеры. Линейная зависимость и линейная независимость элементов линейного пространства. Базис и размерность линейного пространства, координаты вектора в базисе. Преобразование координат вектора при замене базиса.

8. Декартово произведение множеств как множество пар.

9. Аффинное точечное пространство. Отрезок как множество точек аффинного точечного пространства. Система координат в аффинном точечном пространстве.

10. Евклидово пространство: скалярное произведение векторов, длина вектора, угол между векторами, ортонормированный базис.

11. Линейные формы и ковекторы. Базис линейных форм.

12. Две ориентации базисов линейного пространства. Векторное произведение двух векторов. Смешанное произведение трёх векторов.

13. Геометрическая и механическая интерпретации векторных произведений

14. Подпространство и линейная оболочка элементов линейного пространства.

15. К-мерная плоскость аффинного точечного пространства. Взаимное положение двух многомерных плоскостей аффинного точечного пространства. Общие, параметрические и векторное уравнения многомерной плоскости.

16. Ковекторы и исследование системы трёх линейных уравнений в евклидовом трёхмерном пространстве.

17. Прямая на плоскости и её уравнения. Разные формы уравнения плоскости в E_3.

18. Кривые второго порядка (коники), их типы и канонические уравнения. Коники в полярной системе координат.

19. Поверхности в E_3. Поверхности второго порядка, их канонические уравнения. Конические и цилиндрические поверхности. Поверхности вращения.

20. Отображения евклидовых пространств. Линейные операторы. Действия над операторами. Матрица линейного оператора. Сопряженные операторы. Ядро и образ линейного оператора.

21. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Приводимые операторы. Ранг произведения операторов.

II. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

1. Свойства определителей (12 свойств).

2. Теорема об окаймляющих минорах.

3. Теорема о базисном миноре и два следствия из неё: теорема о небазисных рядах матрицы и теорема Кронекера-Капелли.

4. Две теоремы об обратных матрицах: а) $A^{-1} \cdot A = E$, б) единственность обратной матрицы.

5. Формулы Крамера решения СЛУ.

6. Три теоремы о решениях системы линейных однородных уравнений (две теоремы о линейности во множестве решений СЛОУ и одна о числе линейно независимых среди них).

7. Теорема о структуре общего решения неопределённой системы линейных неоднородных уравнений.

8. Теорема о ноль-векторе ($0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$) и о единственности координат вектора в данном базисе.

9. Неравенство Коши-Буняковского.

10. Теорема о координатах вектора, заданного координатами точек начала и конца.

11. Основная теорема векторной алгебры.

12. Теорема о преобразовании координат вектора при замене базиса.

13. Теорема о задании скалярного произведения симметрической матрицей и о преобразовании этой матрицы при замене базиса.

14. Теорема о двух ориентациях векторов базиса линейного пространства.

15. Свойства векторного произведения (6 свойств).

16. Свойства смешанного произведения трёх векторов (6 свойств, в том числе критерий компланарности трёх векторов).

17. Четыре теоремы о подпространствах: а) о ноль-векторе. б) о размерности подпространства, в) о пересечении двух подпространств, г) о размерности пересечения подпространств.

18. Теорема о приведении уравнения кривой второго порядка к одному из двух видов: $ax^2 + by^2 = c,\ by^2 = cx + d$.

19. Теорема о кривых второго порядка как о конических сечениях.

20. Теорема о прямолинейных образующих поверхностей второго порядка.

21. Теорема о матрице линейного оператора.

22. Теорема о матрицах сопряжённых линейных операторов.

23. Теорема об ортогональности образа линейного оператора и ядра ему сопряжённого оператора.

24. Теорема о матрице произведения линейных операторов.

25. Теорема о матрице линейного оператора в базисе из собственных векторов этого оператора.

26. Теорема о ранге произведения операторов.

III. ОСНОВНЫЕ АЛГОРИТМЫ

1. Вычисления определителей.
2. Решение СЛУ: по формулам Крамера, методом Гаусса, с помощью обратной матрицы.
3. Получение обратной матрицы: а) через алгебраические дополнения, б) методом Гаусса.
4. Вычисления ранга матрицы.
5. Два способа решения матричных уравнений.
6. Приложение векторной алгебры к решению задач геометрии.
7. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду.
8. Определение формы поверхности методом сечения её плоскостями.
9. Вычисление собственных чисел и собственных векторов линейного оператора.

IV. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Исследование совместности и определённости СЛУ.
2. Решение систем линейных уравнений. Выделение частного решения СЛУ из общего.
3. Выделение линейно зависимых (линейно независимых) элементов линейных пространств. Поиск базиса и определение размерности линейных пространств.
4. Выбор канонической для данной задачи системы координат.
5. Основные метрические задачи: вычисление углов, длин, площадей и объёмов.
6. Две основные задачи аналитической геометрии: а) для данного множества K точек M, определяемого геометрическими свойствами $F(M)$, получить уравнение $\Phi(M)=0$, б) по данному уравнению $f(M)=0$ найти множество K точек M и описать свойства множества K.
7. Построение линий, плоскостей и сечений поверхностей плоскостями по уравнениям определяющими указанные множества.
8. Спектральный анализ матрицы.

V. АЛГОРИТМ ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

I.Выбор подходящей системы координат, запись данных задачи в координатной форме, *M*(*x,y,z*) - общая точка пространства.

II. Перевод данных задачи в векторную форму.

III. Запись условия задачи в векторной форме с помощью символов: $||$, $\perp$, $\in$, $\subset$ и т.п.

IV. Переход от символьной записи условия задачи к векторным равенствам.

V. Замена векторных равенств координатными.

VI. Проверка соответствия исходных данных полученному результату.

<u>Пример.</u> Получить параметрические и канонические уравнения прямой *l*, проходящей через точки *A* и *B*.

I. Пусть в декартовой системе координат точки *A*, *B* и общая точка пространства *M* имеют координаты: $A(x_A, y_A, z_A)$ $B(x_B, y_B, z_B)$ и *M*(*x,y,z*).

II. За направляющий вектор $\bar{l}$ прямой $l \overset{\Delta}{=} AB$ можно принять вектор $\overline{A}\overline{B} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \overset{\Delta}{=} (m, n, p)$ и $\overline{A}\overline{M} = (x - x_A, y - y_A, z - z_A)$ – вектор с началом в точке *A*.

III. Если точка *M*(*x,y,z*)- общая точка прямой *l,* то векторы $\overline{A}\overline{B}$ и $\overline{A}\overline{M}$ коллинеарные векторы, то есть $\overline{A}\overline{M} \; || \; \overline{A}\overline{B}$.

IV. Условие коллинеарности $\overline{A}\overline{M} \; || \; \overline{A}\overline{B}$ эквивалентно векторному равенству: $\overline{A}\overline{M} = t\overline{A}\overline{B}$, где параметр *t* определяет положение точки *M* на прямой относительно точек *A* и *B*.

V. Векторное уравнение $(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = t(m, n, p)$
равносильно системе трёх координатных уравнений:

$$\begin{cases} x - x_A = tm, \\ y - y_A = tn, \\ z - z_A = tp, \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} x = x_A + tm, \\ y = y_A + tn, \\ z = z_A + tp. \end{cases} \text{ - искомые параметрические уравнения}$$

прямой *AB*. Или из $\overline{A}\overline{M} \; || \; \overline{A}\overline{B}$ следует, что

$$\frac{x - x_A}{m} = \frac{y - y_A}{n} = \frac{z - z_A}{p}.$$

VI. Проверка. $M(t)_{t=0} = A$, $M(t)_{t=1} = B$.

VI. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. $\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$, $\quad \bar{a} = x_a \bar{i} + y_a \bar{j} + z_a \bar{k} \stackrel{\Delta}{=} (x_a, y_a, z_a)$

$$\textbf{2.}\ \bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} = t\bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_a = t\,x_b\,, \\ y_a = t\,y_b\,, \\ z_a = t\,z_b\,. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = t$$

$$\textbf{3.}\ (\bar{a}, \bar{b}) \stackrel{\Delta}{=} \bar{a}\bar{b} \stackrel{\Delta}{=} |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot cos(\bar{a} \wedge \bar{b}) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b\,,$$

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}\bar{b} = 0, \qquad \bar{a}\bar{b} = 0 \Leftrightarrow x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$$

$$a \stackrel{\Delta}{=} |\bar{a}| \cdot = \sqrt{\bar{a}\bar{a}} = \sqrt{x_a x_a + y_a y_a + z_a z_a}\,,$$

$$Пр_{\bar{a}}\bar{b} = b \cdot cos(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{\bar{a}\bar{b}}{a}\,,$$

$$cos(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{\bar{a}\bar{b}}{ab}\,,$$

$$\textbf{4.}\ \bar{c} \stackrel{\Delta}{=} \bar{a} \times \bar{b} \stackrel{\Delta}{=} [\bar{a}, \bar{b}] \Leftrightarrow \begin{cases} |\bar{c}| = ab\,sin(a \wedge b) = S_{ab}\,, \\ \bar{c} \perp \bar{a},\ \bar{b} \perp \bar{c}, \\ (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) - \text{правая тройка векторов..} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}, \qquad S_{ABCD} = mod\ \vec{AB} \times \vec{AC}$$

$$\textbf{5.}\ \bar{a}[\bar{b}, \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{b}]\bar{c}\,,\ \bar{a}[\bar{b}, \bar{c}] \stackrel{\Delta}{=} \bar{a}\bar{b}\bar{c} \Rightarrow \bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix},$$

$$\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} \Rightarrow \bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0,$$

$$|\bar{a}\bar{b}\bar{c}| = V_{abc} \ \Rightarrow\ V_{ABCS} = \tfrac{1}{6}\left|\vec{AB}\ \vec{AC}\ \vec{AS}\right|.$$

VII. ЗАЧЁТНЫЕ БИЛЕТЫ

Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 9 1. Декартово произведение множеств как множество пар. 2. Теорема о базисном миноре и следствие из неё: теорема о небазисных рядах матрицы. 3. Определение формы поверхности методом сечения её плоскостями. 4. Найти ядро, образ и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.		Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 10 1 К-мерная плоскость аффинного точечного пространства. 2. Теорема о базисном миноре и следствие из неё: теорема Кронекера-Капелли. 3. Получение обратной матрицы: б) методом Гаусса. 4. Вычислить расстояние до отрезка PQ от прямой AB, если P(0, 1, 0), Q(0, 0, 1), A(1, 1, 1) и B(2, 0,0)
Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 7 1 Базис и размерность линейного пространства, координаты вектора в базисе. 2. Теорема об ортогональности образа линейного оператора и ядра ему сопряжённого оператора. 3. Решение СЛУ: методом Гаусса. 4. Построить линию L, по её уравнению $y = -2 - \sqrt{2 - x}$.		Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 8 1 Фундаментальная система решений однородной СЛУ, базис и размерность пространства решений однородной СЛУ. 2. Критерий компланарности трёх векторов. 3. Вычисления ранга матрицы. 4. Назвать тип и определить форму поверхности S, заданной уравнением $x^2 = 2y + 2z^2$.

Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 1

1. Отображения евклидовых пространств. Линейные операторы, действия над ними.
2. Теорема о задании скалярного произведения симметрической матрицей и о преобразовании этой матрицы при замене базиса.
3. Решение СЛУ: по формулам Крамера,
4. Найти собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 2

1 Фундаментальная система решений однородной СЛУ, связь между решениями однородной и неоднородной СЛУ.
2. Теорема о преобразовании координат вектора при замене базиса.
3. Получение обратной матрицы: а) через алгебраические дополнения.
4. Вычислить расстояние до прямой PQ от прямой AB, если P(0, 1, 0), Q(0, 0, 1), A(1, 1, 1) и B(2, 0,0).

Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 3

1. Две ориентации базисов линейного пространства. Векторное произведение двух векторов.
2. Теорема об окаймляющих минорах.
3. Решение СЛУ с помощью обратной матрицы
4. Назвать тип и определить форму поверхности S, заданной уравнением $x^2 = 2y^2 + 2z^2$.

Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 4

1. Линейные операции над матрицами, умножение матриц, транспонирование матрицы.
2. Неравенство Коши-Буняковского.
3. Приложение векторной алгебры к решению задач геометрии.
4. Построить линию L, по её уравнению $y = -1 + \sqrt{2 - x^2}$.

Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 5

1.Подпространство и линейная оболочка элементов линейного пространства.
2, Теорема о кривых второго порядка как о конических сечениях.
3. Вычисления определителей.
4. Решить матричное уравнение AX+B=C-X, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 6

1. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.
2. Основная теорема векторной алгебры.
3. Два способа решения матричных уравнений.
4. Вычислить угол между прямой PQ и плоскостью ABC, если P(1, 1, 0), Q(0, 1, 1), A(1, 0, 1), B(1, 0,0) и C(1, 1, 1).

Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 11	Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 12
1 Декартово произведение множеств как множество пар. 2. Теорема о базисном миноре и следствие из неё: теорема о небазисных рядах матрицы. 3. Определение формы поверхности методом сечения её плоскостями. 4. Найти ядро, образ и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.	1 К-мерная плоскость аффинного точечного пространства. 2. Теорема о базисном миноре и следствие из неё: теорема Кронекера-Капелли. 3. Получение обратной матрицы: б) методом Гаусса. 4. Вычислить расстояние до отрезка PQ от точки A, если P(0, 1, 0), Q(1, 0, 1) и A(1, 1, 1) .

Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 13	Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 14
1 Базис и размерность линейного пространства, координаты вектора в базисе. 2. Теорема об ортогональности образа линейного оператора и ядра ему сопряжённого оператора. 3. Решение СЛУ: методом Гаусса. 4. Найти базис пространства решений СЛОУ AX=0, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.	1 Фундаментальная система решений однородной СЛУ, базис и размерность пространства решений однородной СЛУ. 2. Критерий компланарности трёх векторов. 3. Вычисления ранга матрицы. 4. Записать уравнение проекции прямой l$\leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1, \\ x + 2z = 3 \end{cases}$ на плоскость $\alpha \leftrightarrow$ $y + 3z = 0$.

Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 15

1. Отображения евклидовых пространств. Линейные операторы, действия над ними.
2. Теорема о задании скалярного произведения симметрической матрицей и о преобразовании этой матрицы при замене базиса.
3. Решение СЛУ: по формулам Крамера,
4. Решить матричное уравнение

$B-2AX=CX$,

если $A=\begin{pmatrix}0\,1\,0\\0\,0\,1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0\,1\,0\\0\,0\,1\end{pmatrix}$.

Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 16

1 Фундаментальная система решений однородной СЛУ, связь между решениями однородной и неоднородной СЛУ.
2. Теорема о преобразовании координат вектора при замене базиса.
3. Получение обратной матрицы: а) через алгебраические дополнения.
4. Вычислить расстояние до прямой PQ от прямой AB, если P(0, 1, 0), Q(0, 0, 1), A(1, 1, 1) и B(2, 0,0).

Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 17

1. Две ориентации базисов линейного пространства. Векторное произведение двух векторов.
2. Теорема об окаймляющих минорах.
3. Решение СЛУ с помощью обратной матрицы
4. Назвать тип и определить форму поверхности S, заданной уравнением

$x^2-2y^2-2z^2=1$.

Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 18

1. Линейные операции над матрицами, умножение матриц, транспонирование матрицы.
2. Неравенство Коши-Буняковского.
3. Приложение векторной алгебры к решению задач геометрии.
4. Построить линию L, по её уравнению

$2y=3-\sqrt{4-x^2}$.

Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 19	Зачёт по ЛАиАГ. Билет № 20
1.Подпространство и линейная оболочка элементов линейного пространства. 2, Теорема о кривых второго порядка, как о конических сечениях. 3. Вычисления определителей. 4. Решить матричное уравнение AX+B=C-X, если $A=\begin{pmatrix}0\,1\,0\\1\,0\,0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\,0\\1 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0\,1\,0\\1\,0\,1\end{pmatrix}.$	1. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. 2. Основная теорема векторной алгебры. 3. Два способа решения матричных уравнений. 4. Вычислить угол между прямой PQ и плоскостью ABC, если P(2, 0, 0), Q(0, 0, 1), A(1, 0, 2), B(1, 0,0) и C(0, 1, 1).

УДК 517

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ: Методические указания, контрольные вопросы и зачётные билеты для студентов первого курса ФГНД, МСФ, ТЭФ и АВТФ.-Томск: Изд ТПУ, 2002.-11 с.

Автор-составитель доцент каф. ВМ
к.ф.-м.н. А.М. Сухотин

Рецензент доцент каф. ВМ
к.ф.-м.н. В.В. Ласуков

Методические указания рассмотрены и рекомендованы
методическим советом кафедры высшей математики ТПУ
21 марта 2007 г.