

### Билет 1

1. Матрицы, действия над ними.
2. Уравнение параболы в канонической системе координат.

### Билет 2

1. Свойства матричных операций.
2. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между ними, условия параллельности и перпендикулярности

### Билет 3

1. Свойства матричных операций.
2. Типы матриц. Дельта-символ Кронекера.

### Билет 4

1. Перестановки и транспозиции.
2. Скалярное произведение векторов, его свойства.

### Билет 5

1. Понятие определителя. Вычисление определителя третьего порядка.
2. Взаимное расположение прямых. Угол между ними, условия их параллельности и перпендикулярности.

### Билет 6

1. Свойства определителей.
2. Различные формы уравнений прямой.

### Билет 7

1. Теорема о разложении определителя по элементам строки.
2. Расстояние от точки до прямой.

### Билет 8

1. Методы вычисления определителей.
2. Уравнение эллипса в канонической системе координат.

Билет 9

1. Теорема об обратной матрице
2. Расстояние от точки до плоскости.

Билет 10

1. Ранг матрицы, его вычисление.
2. Уравнение гиперболы в канонической системе координат.

Билет 11

1. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса.
2. Векторное произведение векторов.

Билет 12

1. Системы линейных уравнений. Правило Крамера.
2. Смешанное произведение векторов.

Билет 13

1. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капели.
2. Различные формы уравнений плоскости.

Билет 14

1. Однородные системы линейных уравнений, их свойства. Фундаментальная система решений.
2. Линейная зависимость между векторами.

Билет 15

1. Свойства линейных операций над векторами. Разложение вектора по базису.
2. Взаимное расположение плоскостей. Угол между ними, условия параллельности и перпендикулярности.

Билет 16

1. Преобразование координат вектора при повороте системы координат.
2. Кривые второго порядка. Общий анализ.

1. Вычислить расстояние от точки  $M_0(-3, 4, -1)$  до плоскости, проходящей через точки  $M_1(2, -3, 4)$ ,  $M_2(-1, 5, 3)$ ,  $M_3(2, -4, 1)$ .

2. Установить, какая линия описывается уравнением

$$4x^2 + 8x - 9y^2 + 18y = 30.$$

Указать характеристики этой кривой.

3. Вычислить угол между прямыми  $L_1$  и  $L_2$ , если

$$L_1: \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-4} = z-1,$$
$$L_2: \begin{cases} 2x + y - 5z + 1 = 0, \\ x + 4y - 6z + 3 = 0. \end{cases}$$

4. Вычислить угол между прямой

$$L_1: \frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-4}{-5}$$

и плоскостью, проходящей через точки

$$M_1(2, -1, 3), M_2(-1, 4, 4), M_3(2, 2, -3).$$

5. Вычислить расстояние между плоскостями

$$6x - 18y - 9z - 28 = 0 \quad \text{и} \quad 4x - 12y - 6z - 7 = 0.$$

6. Решить матричным методом систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - z = 2, \\ 2x + y + 3z = 7, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , если

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - 5\mathbf{q}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q},$$

$|\mathbf{p}| = 2$ ,  $|\mathbf{q}| = 4$ , а угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  равен  $60^\circ$ .

8. Определить, какая линия описывается уравнением

$$2x^2 + 12x + 3y^2 + 6y = 0.$$

Указать характеристики этой кривой.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(1, 2, -1)$  и  $M_2(2, -1, 3)$  перпендикулярно плоскости

$$2x - 3y + z = 8.$$

10. Треугольник ABC задан своими вершинами  $A(3, 2, -7)$ ,  $B(4, 3, 0)$  и  $C(-2, 1, 6)$ .  
Найти длину высоты, опущенной из вершины A.

11. Решить матричное уравнение  $XA = B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1, \\ 2x + y + 3z = -2, \\ x - 7y + 9z = -7. \end{cases}$$

13. Решить матричное уравнение  $AX = B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

14. Вычислить расстояние от точки  $M(2; 3)$  до прямой

$$\begin{cases} x = 1 + 4t, \\ y = 3 - t. \end{cases}$$

15. Найти общее и частное решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 1. \end{cases}$$

16. Установить, какая кривая описывается уравнением

$$2x^2 - 8x + 3y^2 + 6y + 2 = 0.$$

Указать характеристики этой кривой.

17. Определить, при каких значениях  $a$  и  $b$  система

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = b, \\ 5x - 8y + 9z = 3, \\ 2x + y + az = -1. \end{cases}$$

не имеет решения.

18. Определить, при каких значениях  $a$  и  $b$  система

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = b, \\ 5x - 8y + 9z = 3, \\ 2x + y + az = -1. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. Определить, при каких значениях  $a$  и  $b$  система

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = b, \\ 5x - 8y + 9z = 3, \\ 2x + y + az = -1. \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений.

20. Установить, какая кривая описывается уравнением

$$3x^2 + 12x - 3y^2 + 18y + 7 = 0.$$

Указать характеристики этой кривой.

21. Найти угол между гранями  $ABC$  и  $ABD$  тетраэдра с вершинами в точках  $A(4; 3; 2)$ ,  $B(1; 1; -1)$ ,  $C(-2; 0; -3)$  и  $D(3; 3; 3)$ .

22. Найти угол между прямыми, одна из которых описывается уравнениями

$$\begin{cases} x = 2z - 1, \\ y = -3z + 5, \end{cases}$$

а другая – проходит через точки  $A(1; -1; -1)$  и  $B(5; 3; 4)$ .

23. Найти длину высоты, опущенной из вершины  $D$  на грань  $ABC$  тетраэдра с вершинами в точках  $A(4; 3; 2)$ ,  $B(1; 1; -1)$ ,  $C(-2; 0; -3)$  и  $D(3; 3; 3)$ .

24. Тетраэдр задан своими вершинами

$$A(4; 3; 2), B(1; 1; -1), C(-2; 0; -3) \text{ и } D(3; 3; 3).$$

Найти высоту, опущенную из вершины  $A$  на основание  $BCD$ .

25. Установить, какая кривая описывается уравнением

$$xy = 10.$$

Указать характеристики этой кривой.

26. Проверить, лежат ли точки  $A(-1; 3; 2)$ ,  $B(3; 3; 4)$ ,  $C(-2; 0; -3)$  и  $D(3; 5; 3)$  в одной плоскости.

27. Пусть  $f(x) = 2x - x^2 + 1$  и  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Найти  $f(A)$ .

28. Установить какие из матричных произведений  $AB$  и  $BA$  определены и найти размерности этих произведений.

1)  $A$  – матрица размерности  $3 \times 5$ ;  $B$  – матрица размерности  $5 \times 2$ .

2)  $A$  – матрица размерности  $3 \times 2$ ;  $B$  – матрица размерности  $2 \times 3$ .

3)  $A$  – матрица размерности  $4 \times 2$ ;  $B$  – матрица размерности  $4 \times 2$ .

4)  $A$  – матрица размерности  $1 \times 7$ ;  $B$  – матрица размерности  $7 \times 1$ .

5)  $A$  и  $B$  – квадратные матрицы 5-го порядка.

29. Найти  $A^{50}$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

30. Найти  $B^T A^T$ , если  $AB = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

31. Найти  $B^+ A^+$ , если  $AB = \begin{pmatrix} 5i & -2 \\ 3+2i & 4-3i \end{pmatrix}$ .

32. Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  и  $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$ . Найти  $f(A)$ .

33. Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Найти матрицу  $B$ , которая обращает произведение  $AB$  в нулевую матрицу.

34. Найти ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & -10 & -5 & 14 \end{pmatrix}$ .

35. Вычислить ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 18 & 3 \\ -2 & -1 & -11 & 5 \\ 7 & -2 & 13 & 1 \\ 3 & -1 & 8 & -2 \end{pmatrix}$  методом элементарных преобразований строк и столбцов.

36. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

37. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 5x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

38. Найти общее и одно частное решение системы уравнений, заданной расширенной матрицей

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -3 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

39. Найти фундаментальную систему решений однородного уравнения  $A X = 0$ , если  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ .

40. Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

41. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 19 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

42. Установить при каких значениях параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$  система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = b \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = c \end{cases}$$

является совместной.

43. Установить при каких значениях параметров  $a$  и  $b$  система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = b \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

является несовместной.

44. Определить число решений однородной системы  $AX = 0$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

45. Установить при каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + ax_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

46. Определить число решений системы уравнений, заданной расширенной матрицей

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

47. Система линейных уравнений задана расширенной матрицей

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right).$$

Сколько решений имеет система при различных значениях параметра  $a$ ?



48. Вычислить расстояние от точки  $M(-3; 4; -1)$  до плоскости, проходящей через точки  $A(2; -3; 4)$ ,  $B(-1; 5; 3)$ ,  $C(2; -4; 1)$ .
49. Вычислить угол между прямыми  $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{-4} = z-1$  и  $\begin{cases} 2x + y - 5z + 1 = 0, \\ x + y - 8z + 3 = 0. \end{cases}$
50. Вычислить угол между прямой  $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{-5}$  и плоскостью, проходящей через точки  $K(0; 0; 0)$ ,  $L(1; 6; 6)$ ,  $M(2; 2; -3)$ .
51. Вычислить расстояние между плоскостями  $6x - 18y - 9z - 28 = 0$  и  $4x - 12y - 6z - 7 = 0$ .
52. Определить, при каких значениях параметров  $a$  и  $b$  система 
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = b, \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = -1, \end{cases}$$
 имеет единственное решение.
53. Вычислить высоту  $AD$  треугольника  $ABC$ , заданного координатами его вершин:  $A(3; 2; -7)$ ,  $B(4; 3; 0)$ ,  $C(-2; 1; 6)$ .
54. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $K(1; 2; -1)$  и  $L(2; -1; 3)$  перпендикулярно плоскости  $2x - 3y + z = 8$ .
55. Вычислить расстояние от точки  $M(2; 3)$  до прямой  $\begin{cases} x = 1 + 4t, \\ y = 3 - t. \end{cases}$
56. Решить матричное уравнение  $AXB = C$ , где 
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$
57. Найти длину высоты, опущенной из вершины  $D$  на грань  $ABC$  тетраэдра с вершинами в точках  $A(4; 3; 2)$ ,  $B(1; 1; -1)$ ,  $C(-2; 0; -3)$  и  $D(3; 3; 3)$ .
58. Найти угол между гранями  $ABC$  и  $ABD$  тетраэдра с вершинами в точках  $A(4; 3; 2)$ ,  $B(1; 1; -1)$ ,  $C(-2; 0; -3)$  и  $D(3; 3; 3)$ .
59. Найти угол между прямыми, одна из которых проходит через точки  $A(1; -1; -1)$  и  $B(3; 2; -5)$ , а другая – задана уравнениями

$$\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 3t + 4, \\ z = -5t + 7. \end{cases}$$

60. Определить, при каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = -1, \end{cases}$$

не имеет решения.

61. Составить канонические уравнения прямой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 5, \\ x + 4y - 3z = 2. \end{cases}$$

62. Решить матричное уравнение  $AX = B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

63. Найти общее и частное решения системы уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 1. \end{cases}$$

64. Найти площадь треугольника с вершинами в точках

$$A(4, -3, 1), \quad B(0, 5, 5) \quad \text{и} \quad C(2, 7, -1).$$

65. Найти общее и частное решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 1. \end{cases}$$