

### Билет 1

1. Матрицы, действия над ними.
2. Числовая последовательность, свойства бесконечно малых последовательностей.
3. Вычислить расстояние от точки  $M(-1; 2; -1)$  до плоскости, проходящей через точки  $A(2; -3; 0)$ ,  $B(-1; 4; 3)$ ,  $C(2; -4; 5)$ .
4. Найти интервалы вогнутости и точки перегиба функции  $y = (1+x)e^{-x}$ .

### Билет 2

1. Свойства матричных операций.
2. Свойства пределов числовой последовательности.
3. Вычислить угол между прямыми  $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{-4} = z-1$  и  $\begin{cases} 2x + y - 5z + 1 = 0 \\ x + y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$
4. Найти асимптоты функции  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 - 4}}$  и сделать схематический набросок графика.

### Билет 3

1. Теоремы о транспозициях и перестановках.
2. Свойства бесконечно малых функций.
3. Установить, какая линия описывается уравнением  $4x^2 + 16x - 9y^2 + 18y = 45$ .
4. Подтвердите или опровергните утверждение:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

для любых вещественных  $x$ .

### Билет 4

1. Определители, их свойства.
2. Предел функции. Свойства пределов.
3. Вычислить угол между прямой  $\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+7}{-5}$  и плоскостью, проходящей через точки  $K(0; 0; 1)$ ,  $L(2; -4; 6)$ ,  $M(2; 2; -3)$ .
4. Дана функция  $y = \frac{\ln(2x+1)}{4x-5}$ .  
Вычислить ее производную 20-го порядка в точке  $x = 0$ .

### Билет 5

1. Теорема о разложении определителя по элементам строки.

2. Бесконечно малые функции, их классификация.
3. Вычислить расстояние между плоскостями  $6x - 18y - 9z - 18 = 0$  и  $4x - 12y - 6z + 4 = 0$ .
4. Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{2+x}}}$$

и найти асимптоты ее графика.

#### Билет 6

1. Методы вычисления определителей.
2. Бесконечно большие функции, их классификация.
3. Вычислить высоту  $AD$  треугольника  $ABC$ , если  $A(-1; 2; 7)$ ,  $B(5; 3; 0)$ ,  $C(-2; 1; 6)$ .
4. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}}$ .

#### Билет 7

1. Теорема об обратной матрице.
2. Первый замечательный предел.
3. Определить, при каких значениях параметров  $a$  и  $b$  система уравнений
 
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = b \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.
4. Вычислить приближенно  $\cos 9^\circ$  с точностью до 0.001 без использования калькулятора.

#### Билет 8

1. Ранг матрицы, его вычисление.
2. Вывод формулы  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ .
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $K(3; 2; -1)$  и  $L(4; -1; -3)$  перпендикулярно плоскости  $2x - 3y + z = 8$ .
4. Найти первые 3 ненулевых члена в разложении функции  $f(x) = \sqrt{x}$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $x_0 = 4$ .

#### Билет 9

1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
2. Вывод формулы  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ .

3. Вычислить расстояние от точки  $M(2; 3)$  до прямой

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 - t \end{cases}$$

4. Вычислить приближенно  $1/\sqrt{e}$  с точностью до 0.001 без использования калькулятора.

### Билет 10

1. Правило Крамера.

2. Вывод формулы  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n$ .

3. Найти длину высоты, опущенной из вершины  $D$  на грань  $ABC$  тетраэдра с вершинами в точках  $A(-2; 3; 2)$ ,  $B(3; 1; -1)$ ,  $C(-2; 0; -3)$  и  $D(3; 1; -4)$ .

4. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$ .

### Билет 11

1. Теорема Кронекера-Капели.

2. Таблица эквивалентных бесконечно малых (с обоснованием).

3. Найти угол между прямыми, одна из которых проходит через точки  $A(1; -1; -1)$  и  $B(3; 2; -5)$ ,

а другая задана уравнениями 
$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t + 4 \\ z = -5t + 7 \end{cases}$$

4. Найти первые 2 ненулевых члена в разложении функции  $f(x) = \operatorname{tg} 4x$  по формуле Маклорена.

### Билет 12

1. Однородные системы линейных уравнений, их свойства. Фундаментальная система решений.

2. Непрерывность функции. Классификация точек разрывов.

3. Найти угол между гранями  $ABC$  и  $ABD$  тетраэдра с вершинами в точках  $A(4; -5; 2)$ ,  $B(1; 3; -1)$ ,  $C(-2; 0; -3)$  и  $D(4; 3; 0)$ .

4. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5 \sin 4x)^{\frac{\cos 2x}{3 \arcsin 6x}}$

### Билет 13

1. Понятие вектора, линейные операции над векторами, модуль вектора, координаты вектора, проекция вектора на направление.

2. Производная функции, ее геометрический смысл. Правила вычисления производных.

3. Решить матричное уравнение  $AXB = C$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5 \sin 4x)^{2/x}$ .

#### Билет 14

1. Линейная зависимость между векторами. Разложение вектора по базису.
2. Вывод формул дифференцирования степенной, показательной и логарифмической функций.
3. Определить, при каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \end{cases}$$

не имеет решений.

4. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 7x + \ln(1 - 3x)}{2x + \sin 6x - xe^{-5x}}$ .

#### Билет 15

1. Скалярное произведение векторов, его свойства.
2. Вывод формул дифференцирования тригонометрических функций.
3. Решить матричное уравнение  $AX = B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^2 - 4}{(x+1)\ln x}.$$

#### Билет 16

1. Векторное произведение векторов, его свойства.
2. Вывод формул дифференцирования обратных тригонометрических функций.
3. Найти общее и частное решения системы уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_4 + 7x_5 = 1 \end{cases}$$

4. Вычислить приближенно  $\sqrt[3]{68}$  с точностью до 0.001.

### Билет 17

1. Смешанное произведение векторов, его свойства.
2. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Правила вычисления дифференциалов.
3. Найти общее и частное решения системы уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 1 \end{cases}$$

4. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x^2 + 2x - 8} \right)$ .

### Билет 18

1. Преобразование координат вектора при повороте при повороте системы координат вокруг оси  $z$ .
2. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.
3. Составить канонические уравнения прямой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 5 \\ x + 4y - 3z = 2 \end{cases}$$

4. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 7}{x^3 + 4x - 5}$ , не используя правило Лопиталья.

### Билет 19

1. Уравнения прямой (различные формы).
2. Теорема Ролля.
3. Найти площадь треугольника с вершинами в точках  $A(4, -3, 1)$ ,  $B(0, 2, 5)$  и  $C(-2, 7, 1)$ .

4. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$ .

### Билет 20

1. Расстояние от точки до прямой в плоскости  $xy$ .
2. Теорема о среднем.
3. Решить матричным методом систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y + 3z = 7 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

4. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ .

### Билет 21

1. Уравнения плоскости (различные формы).
2. Теорема Коши.
3. Найти общее и частное решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 1 \end{cases}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к линии  $y^2 = x - 1$  в точке  $M(2, 1)$ .

### Билет 22

1. Расстояние от точки до плоскости.
2. Правило Лопиталю раскрытия неопределенностей вида  $0/0$ .
3. Матрица  $A$  имеет порядок 3, а ее определитель равен 5. Найти  $\det(2A^3 A^T)$ .
4. Найти интервалы вогнутости графика функции  $y = x \ln x + x$  и составить уравнения касательных в точках перегиба.

### Билет 23

1. Взаимное расположение прямых. Угол между ними, условия их параллельности и перпендикулярности.
2. Правило Лопиталю раскрытия неопределенностей вида  $\infty/\infty$ .
3. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 19 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

4. Найти точки экстремума и интервалы монотонного возрастания функции

$$f(x) = (2 + x^2)e^{-x^2}.$$

#### Билет 24

1. Взаимное расположение плоскостей. Угол между ними, условия параллельности и перпендикулярности.
2. Раскрытие неопределенностей вида  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$  с помощью правила Лопиталя.
3. Установить, при каком значении параметра  $\lambda$  векторы  $\mathbf{a} = \{3, -1, 4\}$ ,  $\mathbf{b} = \{2, 5, 0\}$  и  $\mathbf{c} = \{\lambda, -2, 1\}$  являются линейно зависимыми.
4. Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 4}.$$

#### Билет 25

1. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между ними, условия их параллельности и перпендикулярности.
2. Формула Тейлора.
3. Установить, какая линия описывается уравнением

$$2x - 3y^2 + 9y = -4.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^3 - 6x^2 - 15x + 1$$

на промежутке  $[0, 6]$ .

#### Билет 26

1. Уравнение эллипса в канонической системе координат.
2. Исследование функций: экстремумы, интервалы возрастания и убывания.
3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , если

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - 5\mathbf{q}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}, \quad |\mathbf{p}| = 2, \quad |\mathbf{q}| = 4,$$

а угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  равен  $60^\circ$ .

4. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[4]{19-x} - 2}{x-3}.$$

### Билет 27

1. Уравнение гиперболы в канонической системе координат.
2. Исследование функций: точки перегиба, интервалы вогнутости и выпуклости.
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(1,2,-1)$  и  $M_2(2,-1,3)$  перпендикулярно плоскости  $2x - 3y + z = 8$ .
4. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 3} (4 - x)^{\frac{2}{x-3}}$ .

### Билет 28

1. Уравнение параболы в канонической системе координат.
2. Асимптоты функции.
3. Проверить, лежат ли точки  $A(-1, 2, 2)$ ,  $B(3, 3, 4)$ ,  $C(2, 6, 10)$  и  $D(0, 2, 2)$  в одной плоскости.
4. Исследовать на непрерывность функции

$$f(x) = \frac{1}{1 + 5^{\frac{2}{3+x}}} \quad \text{и} \quad g(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x < 0 \\ x^2, & \text{если } 0 \leq x < 3 \\ 11 - x, & \text{если } x \geq 3 \end{cases}$$