Г л а в а 2. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Понятие и свойства

2.1.1. Понятие определенного интеграла

Пусть в промежутке $[\,a;b\,]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$.

1. Разобьем промежуток $[\,a;b\,]$ произвольным образом на n частей с длинами $\Delta x_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

2. В каждом частичном промежутке выберем точку ξ_i и вычислим значения функции $y = f(x)$ в каждой из этих точек. Получим значения

$$f(\xi_1),\quad f(\xi_2),\quad f(\xi_3),\quad \ldots,\quad f(\xi_n).$$

3. Эти значения $f(\xi_i)$ умножим на длины соответствующих частичных промежутков Δx_i, а полученные произведения $f(\xi_i)\,\Delta\,x_i$ сложим. Получится сумма

$$f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + f(\xi_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta\,x_i,$$

которая называется интегральной суммой функции $y = f(x)$ в данном промежутке.

О п р е д е л е н и е. Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ в интервале $[a;b]$ называется конечный предел соответствующей интегральной суммы при неограниченном увеличении числа разбиений промежутка на части $(n \to \infty)$ и стремлении длин всех частичных промежутков к нулю $(\Delta\,x_i \to 0)$ и обозначается символом

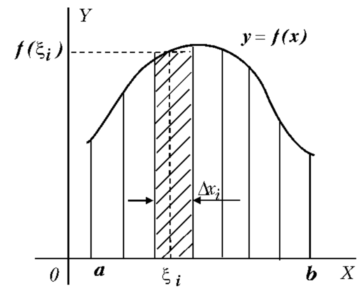
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta\,x_i.}$$

Теорема существования определенного интеграла. *Если функция $f(x)$ является непрерывной или кусочно-непрерывной в интервале $[\,a;b\,]$, (т.е. имеет в этом интервале конечное число точек разрыва 1-го рода), то определенный интеграл от этой функции в этом промежутке всегда существует.*

При выполнении этих условий определенный интеграл не зависит ни от выбора точек ξ_i, ни от способа разбиения промежутка на части. Если определенный интеграл от функции существует, т.е. существует конечный предел соответствующей интегральной суммы, то функция называется *интегрируемой* в этом промежутке. Отметим, что монотонная ограниченная функция всегда интегрируема.

Геометрический смысл определенного интеграла

Определённый интеграл от неотрицательной в промежутке функции удобно трактовать как площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком этой функции, снизу осью OX, слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$, параллельными оси OY.



Величины следующих интегралов получены на основании их геометрического смысла

$\int\limits_1^5 (x-1)\,dx = 8$ (площадь прямоугольного треугольника, ограниченного прямыми $y = x - 1$, $x = 1$, $x = 5$ и осью OX).

$\int\limits_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\pi$ (площадь полукруга $y = +\sqrt{4-x^2}$ радиуса 2).

2.1.2. Свойства определенного интеграла

1. Почленное интегрирование.

Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых

$$\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$$

2. Вынесение постоянного множителя .

Постоянный множитель выносится за знак определенного интеграла

$$\int\limits_a^b k\,f(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Свойства 1 и 2 повторяют свойства неопределенного интеграла и используются непосредственно при вычислениях.

3. Разбиение отрезка интегрирования на части.

Если промежуток интегрирования $[a; b]$ разбит точкой c на части, то определенный интеграл можно представить в виде суммы интегралов по отдельным частям промежутка

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Свойство 3 используется, в основном, при вычислениях с помощью определенного интеграла площадей фигур, объемов тел, длин дуг и т.д.

4. Смена направления интегрирования.

При перемене местами пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

5. Интеграл по промежутку нулевой длины.

Интеграл с равными пределами интегрирования равен нулю

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

6. Интеграл от нечетной и четной функций в симметричном интервале.

Определенный интеграл в симметричных пределах от нечетной функции равен нулю.

$$\text{Если} \quad f(x) = -f(-x), \quad \text{то} \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

При этом, для четной функции ($f(x) = f(-x)$,) имеем

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Свойство 6 и геометрический смысл интеграла могут быть эффективно использованы в подходящих для этого случаях.

Например, все следующие интегралы равны нулю, так как подынтегральные функции нечетные, а промежуток интегрирования симметричен

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \sin^3 x\,dx = 0, \qquad \int_{-2}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{(1+3x^2)^3}}\,dx = 0, \qquad \int_{-3}^{3} \frac{\sin x}{x^4+x^2+1}\,dx = 0.$$

7. О знаке интеграла.

$$\text{Если } f(x) \geq 0 \text{ для всех } x \in [a;\ b], \quad \text{то} \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

8. Интегрирование под знаком неравенства.

$$\text{Если } f(x) \geq g(x) \text{ для всех } x \in [a;\ b], \text{ то } \int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

9. Оценка определенного интеграла.

1) Модуль интеграла не больше интеграла от модуля функции

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int\limits_a^b |\ f(x)\ |\ dx.$$

2) Если $f(x)$ – непрерывная в интервале $[a;\ b]$ функция и $m-$ наименьшее, а $M-$ наибольшее значения функции в данном интервале, то

$$m \cdot (b-a) \ \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \ \leq M \cdot (b-a).$$

Свойство 9 может быть использовано для оценки величины трудно вычисляемого определенного интеграла.

- Оценить величину интеграла $\int\limits_{-1}^{3} \sqrt[4]{x^4 - 8x^2 + 17}\,dx.$

$$f'(x) = \frac{1}{4}\frac{4x^3 - 16x}{\sqrt[4]{(x^4 - 8x^2 + 17)^3}} = 0 \quad \text{при } x = -2, \quad x = 0, \quad x = 2.$$

Точка $x = -2$ не принадлежит данному промежутку. Имеем

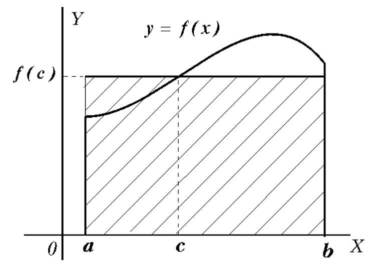
$$f(-1) = \sqrt[4]{10}, \qquad f(0) = \sqrt[4]{17},$$
$$f(2) = \sqrt[4]{1} = 1 = f_{\text{наим.}}, \quad f(3) = \sqrt[4]{26} \approx 2,25 = f_{\text{наиб.}}.$$

Длина промежутка $(b-a) = 3 - (-1) = 4$, $(b-a)m = 4 \cdot 1 = 4$, $(b-a)M = 4 \cdot 2,25 = 9$. Тогда

$$4 \leq \int\limits_{-1}^{3} \sqrt[4]{x^4 - 8x^2 + 17}\,dx \leq 9.$$

10. Теорема о среднем для определенного интеграла:
Если функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,\ b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \quad \text{где } (b-a) \text{– длина отрезка, а } c \in (a,\ b).$$



В геометрическом смысле теорема о среднем означает, что площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной значению подынтегральной функции в некоторой точке c промежутка интегрирования.

Величина $f(c)$ при этом называется **средним значением** функции в интервале и вычисляется соответственно по формуле

$$f_{\text{ср.зн.}} = f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

• Найти среднее значение функции $y = \dfrac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$ в интервале $[0;\ 16]$.

Согласно формуле для среднего значения функции находим

$$f_{\text{ср.зн.}} = f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{1}{16-0}\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} \approx 0,75.$$

Здесь не приведено само вычисление интеграла, так как методы вычисления определенных интегралов приводятся ниже.

Интеграл с переменным верхним пределом

Интегралом с переменным верхним пределом называется интеграл

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = \Phi(x), \quad \text{который является функцией верхнего предела.}$$

Т е о р е м а Барроу. **Производная интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции на этом пределе**

$$\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x).$$

Из этой теоремы вытекает одно важное следствие. *Интеграл с переменным верхним пределом является первообразной для подынтегральной функции.* Это следствие позволяет вывести основную формулу интегрального исчисления – формулу Ньютона-Лейбница.

2.1.3. Формула Ньютона –Лейбница

Вычисление определенного интеграла, следуя его определению, как предела интегральной суммы весьма трудная и громоздкая операция. Существует более легкий путь вычисления, основанный на применении следующей теоремы.

Т е о р е м а. **Величина определенного интеграла равна разности значений любой первообразной от подынтегральной функции, взятых при нижнем и верхнем пределах интегрирования**

Таким образом, если $F(x)$ есть какая-либо первообразная для функции $f(x)$, то справедливо равенство

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$$

Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница.

Введенная формула позволяет теперь сформулировать не только различие, но и сходство неопределенного и определенного интегралов.

Р а з л и ч и я.

Неопределенный интеграл есть семейство первообразных функций $F(x)+C$, и в геометрическом смысле есть семейство интегральных линий – графиков всех первообразных функций, получающихся при непрерывном параллельном перемещении любой из них по вертикали.

Определенный интеграл есть конкретное число, которое с геометрической точки зрения удобно трактовать как площадь соответствующей криволинейной трапеции.

С х о д с т в о (связь).

Несмотря на различную природу неопределенного и определенного интегралов, между ними есть много общего. Это касается не только внешнего сходства, но и свойств этих интегралов и методов их вычисления. Кроме этого, всякий определенный интеграл, согласно формуле Ньютона–Лейбница, есть приращение первообразной функции на отрезке $[a;b]:\quad \Delta F = F(b) - F(a)$.

2.2. Вычисление определенного интеграла

Формула Ньютона–Лейбница, связывающая вычисления определенного и неопределенного интегралов, позволяет сделать вывод, что все методы неопределенного интегрирования можно с определенными оговорками перенести на случай определенного интегрирования.

2.2.1. Непосредственное интегрирование

К этому методу мы отнесли такие интегралы, при решении которых используются таблицы неопределенных интегралов и подведения под знак дифференциала, свойства интегралов и формула Ньютона-Лейбница, согласно которой мы сначала находим первообразную функцию, а затем вычисляем разность ее значений в верхнем и нижнем пределах интегрирования. Рассмотрим примеры.

• **1**. $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\ \left(3-5\sqrt{x}\right)\,dx=\int\limits_0^1\left(3\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x}\right)\,dx=$

$$=\int\limits_0^1\left(3x^{1/3}-5x^{5/6}\right)\,dx=3\int\limits_0^1 x^{1/3}\,dx-5\int\limits_0^1 x^{5/6}\,dx=$$

$$=\left|\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|=3\frac{x^{4/3}}{4/3}\Bigg|_0^1-5\frac{x^{11/6}}{11/6}\Bigg|_0^1=\frac{9}{4}\ x^{4/3}\Bigg|_0^1-\frac{30}{11}\ x^{11/6}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{9}{4}\,(1-0)-\frac{30}{11}(1-0)=\frac{9}{4}-\frac{30}{11}=-\frac{21}{44}\ \approx-0,48.$$

• **2**. $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^2}=\frac{1}{5}\int\limits_{-2}^{-1}\frac{d\ (5x+11)}{(11+5x)^2}=\left|\ \int\frac{dU}{U^2}=-\frac{1}{U}\ \right|=$

$$=-\frac{1}{5}\frac{1}{11+5x}\ \Bigg|_{-2}^{-1}=-\frac{1}{5}\ \left(\frac{1}{11-5}-\frac{1}{11-10}\right)=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}-1\right)=\frac{1}{6}.$$

• **3**. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+e^x}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}\ dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)\ dx=$

$$=\int\limits_{-1}^{1}dx-\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\ (e^x+1)}{1+e^x}=\left|\ \int dx=x,\quad\int\frac{dU}{U}=\ln U\ \right|=$$

$$=x\ \Bigg|_{-1}^{1}-\ln|\ 1+e^x\ |\ \Bigg|_{-1}^{1}=1-(-1)-\left(\ln|\ 1+e\ |-\ln|\ 1+e^{-1}\ |\ \right)=$$

$$=2-\ln\left|\ \frac{1+e}{1+1/e}\ \right|=2-\ \ln\left|\ \frac{(1+e)e}{e+1}\ \right|=2-\ln e=2-1=1.$$

$$\bullet\ \mathbf{4}.\quad \int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} = \int_0^{16} \frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x}\right)}\,dx =$$

$$= \int_0^{16} \frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+9})^2-(\sqrt{x})^2}dx = \int_0^{16} \frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}{x+9-x}dx = \int_0^{16} \frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}{9}dx =$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{16}\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right)dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\left((x+9)^{3/2}+x^{3/2}\right)\Big|_0^{16} =$$

$$= \frac{2}{27}\left(25^{3/2}-9^{3/2}+16^{3/2}\right) = \frac{2}{27}\left(5^3-3^3+4^3\right) = \frac{2\cdot 34}{27} \approx 2,5.$$

2.2.2. Интегрирование по частям

Интегрирование по частям в определенном интеграле проводится по формуле

$$\boxed{\int_a^b U\cdot dV = U\cdot V\Big|_a^b - \int_a^b V\cdot dU.}$$

$$\bullet\ \mathbf{5}.\quad \int_0^1 x\cdot 3^{2x}\,dx = \left|\begin{array}{ll} U=x & dU=dx \\ dV=3^{2x}\,dx & V=\int 3^{2x}\,dx = \dfrac{1}{2\ln 3}\,3^{2x} \end{array}\right| =$$

$$= x\cdot\frac{1}{2\ln 3}\,3^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2\ln 3}\int_0^1 3^{2x}\,dx = \frac{x}{2\ln 3}\,3^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{4\ln^2 3}\,3^{2x}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2\ln 3}\,3^2 - \frac{1}{4\ln^2 3}\left(3^2-3^0\right) = \frac{9}{2\ln 3} - \frac{8}{4\ln^2 3} = \frac{9\ln 3-4}{2\ln^2 3} \approx 2,64.$$

$$\bullet\ \mathbf{6}.\quad \int_0^{1/4} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \left|\begin{array}{ll} U=\arcsin\sqrt{x} & dU=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}} \\ dV=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x}} & V=-2\sqrt{1-x} \end{array}\right| =$$

$$= -2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}\,\Big|_0^{1/4} + \int_0^{1/4} 2\sqrt{1-x}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}} =$$

$$= -2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}\,\Big|_0^{1/4} + \int_0^{1/4}\frac{dx}{\sqrt{x}} = -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}\Big|_0^{1/4} + 2\sqrt{x}\Big|_0^{1/4} =$$

$$= -2\sqrt{3/4}\cdot\arcsin(1/2) - 0 + 2(1/2) - 0 = -\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} + 1 \approx 0,1.$$

2.2.3. Замена переменной. Подстановка

Правило замены переменной в определенном интеграле требует к себе значительно большего внимания, чем аналогичное правило в неопределенном интеграле. Сформулируем его.

Правило замены переменной в определенном интеграле.
Если функция $f(x)$ непрерывна в интервале $[a, b]$, а функция $\varphi(t)$ монотонна и непрерывна вместе со своей производной в интервале $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$, то имеет место формула

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = \int_\alpha^\beta f\ [\ (\varphi\ (t)\ ] \cdot \varphi'(t) \cdot dt.}$$

Эта формула и называется формулой подстановки или замены переменной в определенном интеграле.
Схема применения способа подстановки для вычисления интеграла выглядит следующим образом.

1) Выбрать подстановку (сделать замену переменной) $x = \varphi(t)$, так чтобы функция $\varphi(t)$ была непрерывной и монотонной в интервале $[\ \alpha;\ \beta\ ]$.

2) Найти $dx = \varphi'(t) \cdot dt$, причем производная $\varphi'(t)$ также должна быть непрерывной функцией.

3) Подынтегральную функцию $f(x)$ преобразовать с учетом выбранной подстановки.

4) Сменить пределы интегрирования, т.е. в соответствии с произведенной заменой найти значения переменной t: $t_1 = \alpha$ и $t_2 = \beta$, соответствующие значениям переменной x: $x_1 = a$ и $x_2 = b$.

5) Подставить все в исходный интеграл и вычислить его.

Итак, схема действий при замене переменной в определенном интеграле та же, что и в неопределенном. Разница состоит лишь в том, что после выполненения интегрирования не нужно возвращаться к старой переменной x, а вычисления проводить для переменной t в интервале $[\ \alpha;\ \beta\ ]$.

• **7**. $\displaystyle\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{x\,\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{ll} x=\sin t & t=\arcsin x \\ dx=\cos t\ dt & x_1=1/2 \ \Rightarrow\ t_1=\pi/6 \\ \sqrt{1-x^2}=\cos t & x_2=\sqrt{3}/2 \ \Rightarrow\ t_2=\pi/3 \end{array} \right|$

$$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos t\ dt}{\sin t\cdot\cos t} = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin t} = \ln\ \left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\ \right|\ \Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\right| - \ln\left|\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}\ \right| =$$

$$= \ln 0,577 - \ln 0,268 \approx 0,77.$$

• **8**. $\displaystyle\int\limits_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}} = \left| \begin{array}{lll} \sqrt{3x+1}=t & t=\sqrt{3x+1} & \\ 3x+1=t^2, & & \\ x=\dfrac{1}{3}\,(t^2-1) & x_1=0 & t_1=1 \\ dx=\dfrac{2}{3}\ t\ dt & x_2=5 & t_2=4 \end{array} \right| =$

$$= \int\limits_1^4 \frac{\frac{2}{3}\ t\ dt}{\frac{2}{3}\ (t^2-1)+t} = \int\limits_1^4 \frac{t\ dt}{t^2+\frac{3}{2}\ t-1} =$$

Получили интеграл с квадратным трехчленом в знаменателе. Не будем приводить подробных выкладок, запишем окончательный результат

$$= \frac{1}{2}\ \ln|\ t^2+\frac{3}{2}\ t-1\ |\ \Bigg|_1^4 - \frac{3}{10}\ln\left|\frac{t-1/2}{t+2}\right|\ \Bigg|_1^4 =$$

$$= \frac{1}{2}\ \left(\ln 21 - \ln\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{10}\ \left(\ln\frac{7/2}{6} - \ln\frac{1/2}{3}\right) = \frac{1}{2}\ \ln\frac{21\cdot 2}{3} - \frac{3}{10}\ \ln\frac{7\cdot 6}{12} =$$

$$= \frac{1}{2}\ \ln 14 - \frac{3}{10}\ \ln\frac{7}{2} \approx 0,94.$$

• **9**. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} = \left| \begin{array}{lll} \mathrm{tg}\ \dfrac{x}{2}=t & t=\mathrm{tg}\ \dfrac{x}{2} & \\ x=2\ \mathrm{arctg}\ t & x_1=0 & t_1=0 \\ dx=\dfrac{2\ dt}{1+t^2} & x_2=\pi/2 & t_2=1 \\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} & & \end{array} \right| =$

$$= \int\limits_0^1 \frac{1}{2+\ \frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\ dt}{1+t^2} = 2\ \int\limits_0^1 \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\ \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \mathrm{arctg}\ 0\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0,6.$$

2.3. Несобственные интегралы

Ранее было отмечено, что, если функция $y = f(x)$ – **непрерывна** или кусочно-непрерывна в **конечном** интервале $[\,a;\ b\,]$, то определенный интеграл (как предел интегральной суммы) от данной функции в этом промежутке существует, равен определенному числу и в геометрическом смысле есть площадь криволинейной трапеции.

Если промежуток бесконечен или функция неограничена в конечном интервале, то интеграл нельзя определить как предел интегральной суммы т.к.:

бесконечный промежуток нельзя разбить на конечное число промежутков конечной длины,

в случает же неограниченной функции интегральную сумму формально составить можно, но она не будет иметь конечного предела.

В соответствии со сказанным различают два типа несобственных интегралов.

2.3.1. Интеграл по бесконечному промежутку

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в полубесконечном промежутке $[a;\ \infty)$.

О п р е д е л е н и е. **Несобственным интегралом I-го рода называется конечный или бесконечный предел вида**

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

К несобственному интегралам I-го рода относится также интеграл

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Определение несобственного интеграла дает одновременно и метод его вычисления. Вычисление таких интегралов сводится к нахождению предела обычного определенного интеграла, который может быть найден по формуле Ньютона - Лейбница.

Так, если функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $[a;\infty)$, и $F(x)$– первообразная для $f(x)$, то

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a).$$

Если этот предел существует, то интеграл с х о д и т с я. В противном случае интеграл р а с х о д и т с я.

Аналогично может быть рассмотрен интеграл

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}(F(b)-F(a)) = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a).$$

Итак, при вычислении несобственных интегралов I- го типа мы заменяем бесконечный предел интегрирования переменным верхним (или нижним) пределом, решаем интеграл как обычный определенный, а затем переходим к пределу при $b \to +\infty$ (или $a \to -\infty$.)

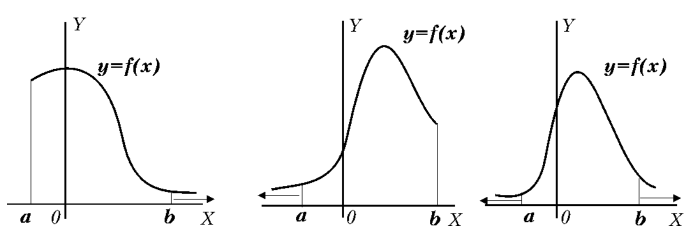
Интеграл с двумя бесконечными пределами определяется так

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx.$$

Можно не прибегать к введению промежуточной точки c и вычислять двойной предел

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a).$$

В геометрическом смысле несобственные интегралы I-го рода можно рассматривать как площади бесконечных вправо, влево или в обе стороны криволинейных трапеций.



• **1**. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b =$

$\displaystyle= \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}.$ Интеграл сходится.

• **2**. $\int\limits_{\sqrt{e}}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{\sqrt{e}}^{b} \frac{d\,(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim\limits_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{2\ln^2 x} \Big|_{\sqrt{e}}^{b} \right) =$

$= -\frac{1}{2} \left(\lim\limits_{b\to\infty} \frac{1}{\ln^2 b} - \frac{1}{\ln^2 \sqrt{e}} \right) = -\frac{1}{2}\,(0-4) = 2.$ Интеграл сходится.

• **3**. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{d(x+3)}{\sqrt{x+3}} = .\lim\limits_{b\to\infty} 2\sqrt{x+3}\,\Big|_{1}^{b} =$

$= \lim\limits_{b\to\infty} 2\sqrt{b+3} - 2\sqrt{4} = \infty.$ Интеграл расходится.

• **4**. $\int\limits_{-\infty}^{0} x\cdot\cos x\; dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \left(x\cdot\sin x\,\Big|_{a}^{0} + \cos x\,\Big|_{a}^{0} \right) =$

$= 0 - \lim\limits_{a\to-\infty} a\sin a + 1 - \lim\limits_{a\to-\infty} \cos a.$

Интеграл расходится т.к. конечного предела нет, поскольку $\sin\infty$, $\cos\infty$ хотя и ограничены, но конкретных числовых значений не имеют.

• **5**. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x\; dx}{1+x^2} = \lim\limits_{\substack{a\,\to\,-\infty\\ b\,\to\,+\infty}} \int\limits_{a}^{b} \operatorname{arctg}^2\, x\;\; \cdot d\;(\operatorname{arctg}\, x) =$

$= \lim\limits_{\substack{a\,\to\,-\infty\\ b\,\to\,+\infty}} \frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3\, x\,\Big|_{a}^{b} = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3\, b - \lim\limits_{a\to-\infty} \frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3\, a =$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{1}{3}\,\frac{\pi^3}{8} + \frac{1}{3}\,\frac{\pi^3}{8} = \frac{1}{12}\,\pi^3.$

Интеграл сходится.

Здесь при вычислении использованы значения $\operatorname{arctg}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$

В ряде случаев нахождение первообразной функции требует либо громоздких вычислений, либо первообразной в классе элементарных функций не существует (интеграл неберущийся). В таких случаях на первый план выступает решение вопроса о существовании интеграла вообще, т.е. о его сходимости. Тогда, если интеграл расходится, то и не нужно приступать к его вычислению. Если же выяснится, что интеграл сходится, тогда, при необходимости, нужно использовать все возможные приемы для его вычисления.

Остановимся подробнее на вопросе о признаках сходимости несобственных интегралов I-го рода.

Признак сравнения

Пусть для всех (по крайней мере для достаточно больших) значений x выполняется неравенство $|f(x)| \leq |g(x)|$. Тогда,

если сходится интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

Если расходится интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$, то расходится и интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$.

Или, другими словами, если сходится интеграл от большей функции, то сходится интеграл и от меньшей функции.

Если расходится интеграл от меньшей функции, то интеграл от большей функции тем более расходится.

Чаще всего на практике используется предельный вариант признака сравнения, суть которого кратко можно сформулировать следующим образом.

Если предел отношения двух функций $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \mathrm{Const} \neq 0$,

то несобственные интегралы от этих функций $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$, $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$

ведут себя одинаково – либо оба сходятся, либо оба расходятся.

При использовании признака сравнения в качестве функции, с которой сравнивается подынтегральная, используются две

$$g(x) = \frac{A}{x^k} \quad \text{и} \quad g(x) = q^x.$$

Можно доказать, что несобственные интегралы от этих функций ведут себя следующим образом:

$$\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^k} \quad \text{при} \quad \begin{matrix} k > 1, \text{ сходится} \\ k \leq 1, \text{ расходится.} \end{matrix} \qquad \Bigg| \qquad \int\limits_a^\infty q^x\,dx \quad \text{при} \quad \begin{matrix} q < 1, \text{ сходится,} \\ q \geq 1, \text{ расходится.} \end{matrix}$$

Итак, несобственный интеграл с бесконечными пределами сходится, если при $x \to \infty$ подынтегральная функция является бесконечно малой функцией, эквивалентной $\dfrac{A}{x^k}$, $k > 1$ или q^x, $q < 1$.

Исследуем на сходимость интегралы.

• **1**. $\int\limits_1^\infty \frac{(3x+2)\;dx}{x^3+4x-1}$. Интеграл сходится, т.к. при $x\to\infty$

$$\frac{3x+2}{x^3+4x-1}\sim\frac{3x}{x^3}\sim\frac{3}{x^2},\quad k=2>1.$$

• **2**. $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{(\sqrt[3]{x}+2x+5)\;dx}{4x^2+4x+10}$. Интеграл расходится, т.к. при $x\to-\infty$

$$\frac{\sqrt[3]{x}+2x+5}{4x^2+4x+10}\sim\frac{2x}{4x^2}\sim\frac{1}{2x},\quad k=1.$$

• **3**. $\int\limits_2^\infty \frac{(x+2)\;dx}{\sqrt[5]{(x^2+x+1)^4}}$. Интеграл расходится, т.к. при $x\to\infty$

$$\frac{x+2}{\sqrt[5]{(x^2+x+1)^4}}\sim\frac{x}{\sqrt[5]{x^8}}\sim\frac{1}{x^{3/5}},\quad k=3/5<1.$$

• **4**. $\int\limits_1^\infty \frac{3^x-4^x}{2^x+5^x}\,dx$. Интеграл сходится, т.к. при $x\to\infty$

$$\frac{3^x-4^x}{2^x+5^x}\sim\frac{-4^x}{5^x}\sim-\left(\frac{4}{5}\right)^x,\quad q=\frac{4}{5}<1.$$

• **5**. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+2x+e^x}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+2x+e^x}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+2x+e^x}.$$

Интеграл расходится, т.к. расходится первый интеграл:

1) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+2x+e^x}$. Интеграл расходится, т.к. при $x\to-\infty$ $\quad e^x\to0$

и $$\frac{1}{1+2x+e^x}\sim\frac{1}{1+2x}\sim\frac{1}{2x},\quad k=1.$$

2) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+2x+e^x}$. Интеграл сходится, т.к. при $x\to+\infty$ $\quad e^x\gg 2x+1$

и $$\frac{1}{1+2x+e^x}\sim\frac{1}{e^x}\sim\left(\frac{1}{e}\right)^x,\quad q=1/e<1.$$

При асимптотическом представлении функции часто используется таблица эквивалентных бесконечно малых величин.

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),\qquad \arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x),\qquad 1-\cos\alpha(x)\sim\frac{\alpha^2(x)}{2},$$
$$\mathrm{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x),\qquad \mathrm{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x),\qquad \ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x),$$
$$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x),\qquad \sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\frac{\alpha(x)}{n}.$$

• **6**. $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(1/x)}{2x-3}\,dx.$ Интеграл сходится, т.к. при $x \to \infty$
$\dfrac{\operatorname{arctg}(1/x)}{2x-3} \sim \dfrac{1/x}{2x} \sim \dfrac{1}{2x^2}, \quad k = 2 > 1.$

2.3.2. Интеграл от неограниченной функции

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в полуоткрытом конечном промежутке $[a;\ b)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \pm\infty$, т.е. функция на правом конце промежутка терпит бесконечный разрыв. Тогда

Определение. **Несобственным интегралом II-го рода называется конечный или бесконечный предел вида**

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Так как в промежутке $[a;\ b-\varepsilon]$ функция $y = f(x)$ является непрерывной, то интеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\ dx$ является обычным определенным интегралом и к нему применима формула Ньютона-Лейбница.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} F(b-\varepsilon) - F(a).$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в конечном промежутке $(a;\ b]$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$, т.е. бесконечный разрыв функция терпит на левом конце промежутка, то имеем интеграл вида

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\ dx.$$

Определяется он по аналогичной схеме

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{\varepsilon \to 0} \left(F(a+\varepsilon)\right).$$

Если функция терпит бесконечный разрыв во внутренней точке c промежутка, то несобственный интеграл определяется следующим образом

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

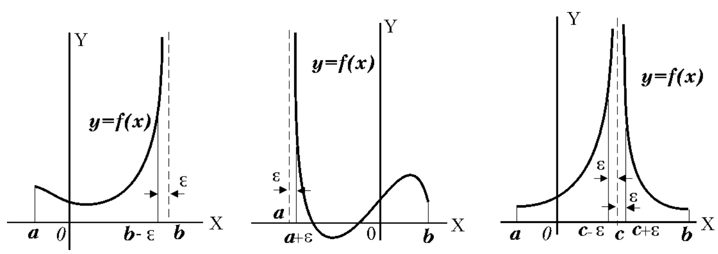
В каждом из слагаемых разрыв происходит на одном из концов промежутка и задача сводится к уже рассмотренным выше случаям

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, при рассмотрении несобственных интегралов II-го рода мы отступаем от точки разрыва внутрь промежутка на малую, стремящуюся к нулю, величину ε, вычисляем получающийся интеграл по формуле Ньютона - Лейбница, а затем переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Если предел существует, то интеграл называется сходящимся, если нет, то расходящимся.

В геометрическом смысле несобственные интегралы II-го рода есть также площади бесконечных криволинейных трапеций.



З а м е ч а н и е. Поскольку по внешнему виду несобственный интеграл II-го рода не отличается от обычного определенного интеграла, то при решении определенного интеграла необходимо прежде всего проверить, не является ли он несобственным. Для этого нужно исследовать подынтегральную функцию на непрерывность, т.е. узнать, не имеет ли она точек разрыва II-го рода в интервале интегрирования, а затем уже приступать к вычислениям соответственно ситуации. Перейдем к решению примеров.

• **1**. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$. Подынтегральная функция стремится к бесконечности при $x \to 1$, поэтому действуем по определению несобственного интеграла

$$\int\limits_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x-1}\ \Big|_{1+\varepsilon}^5 =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 2\left(\sqrt{5-1} - \sqrt{(1+\varepsilon)-1}\right) = 4 - \lim_{\varepsilon\to 0}(2\sqrt{\varepsilon}) = 4 - 0 = 4.$$

Несобственный интеграл сходится.

• **2**. $\int\limits_0^2 \frac{x\ dx}{(x^2-4)^2}$. Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв на правом конце промежутка при $x = 2$, поэтому действуем по определению несобственного интеграла

$$\int\limits_0^2 \frac{x\ dx}{(x^2-4)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{x\ dx}{(x^2-4)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2} \int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{d\ (x^2-4)}{(x^2-4)^2} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2}\ \frac{1}{x^2-4}\right)\ \Big|_0^{2-\varepsilon} = -\frac{1}{2}\ \left(\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2-\varepsilon)^2-4} - \frac{1}{-4}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\ \left(\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{4-4\varepsilon+\varepsilon^2-4} - \frac{1}{-4}\right) = -\frac{1}{2}\ \left(\frac{1}{0} - \frac{1}{-4}\right) = -\infty.$$

Несобственный интеграл расходится.

• **3**. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв во внутренней точке промежутка при $x = 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to\pm 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$, поэтому действуем по определению несобственного интеграла.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 3\sqrt[3]{x}\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0} 3\sqrt[3]{x}\ \Big|_{+\varepsilon}^1 =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 3\sqrt[3]{-\varepsilon} - 3\sqrt[3]{-1} + 3\sqrt[3]{1} - \lim_{\varepsilon\to 0} 3\sqrt[3]{+\varepsilon} = 3\sqrt[3]{1} + 3\sqrt[3]{1} = 6.$$

Несобственный интеграл сходится.

Как и для интегралов I-го типа в ряде случаев, когда непосредственное вычисление интеграла затруднительно, либо интеграл неберущийся, на первый план выступает решение вопроса о существовании интеграла вообще. Остановимся подробнее на вопросе о признаках сходимости несобственных интегралов II-го рода.

Признак сравнения

Для несобственных интегралов 2-го рода $\int\limits_a^b g(x)\ dx$ можно сформулировать признаки сравнения также, как и для интегралов 1-го рода.

На практике часто используется предельный вариант признака сравнения приэтом в качестве шаблонной функции, с которой сравнивается подынтегральная, используются функции вида

$$\frac{A}{(b-x)^k}, \qquad \frac{A}{(x-a)^k},$$

первая из них имеет бесконечный разрыв в точке $x = b$, а вторая – в точке $x = a$.

Легко показать, что несобственные интегралы от этой функций ведут себя следующим образом:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^k} \text{ и } \int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^k} \text{ при } \begin{array}{l} k < 1, \text{ сходятся,} \\ k \geq 1, \text{ расходятся.} \end{array}$$

Таким образом, при решении вопроса о сходимости несобственных интегралов II-го рода следует

– определить точку разрыва подынтегральной функции,

– подынтегральную функцию вблизи точки разрыва представить в виде $\dfrac{A}{(b-x)^k}$ или $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ (очень эффективно при этом использование таблицы эквивалентных бесконечно малых величин),

– по величине показателя степени "k" сделать вывод о сходимости исходного интеграла.

Исследуем на сходимость следующие интегралы.

• 4. $\int\limits_0^3 \dfrac{x^5\ dx}{(x^2-9)^7}$. Разложив знаменатель на множители, видим, что подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точках $x = \pm 3$. В интервал интегрирования входит только $x = 3$, при этом

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{x^5}{(x^2-9)^7} = \lim_{x\to 3-0} \frac{x^5}{(x-3)^7(x+3)^7} = -\infty.$$

Тогда, $$\frac{x^5}{(x^2-9)^7} = \frac{x^5}{(x-3)^7(x+3)^7} \sim \frac{3^5}{8^7}\frac{1}{(x-3)^7} = \frac{A}{(x-3)^7},$$

т.к. $k = 7 > 1$– интеграл расходится.

• **5**. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{-1/2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}$. Подынтегральная функция терпит разрыв на левом конце интервала интегрирования – в точке $x = -1$, так как $\displaystyle\lim_{x\to -1+0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}} = \infty$.

Запишем асимптотическое представление функции в окрестности точки разрыва

$$\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}} = \frac{x^2}{(1+x)^{2/3}(1-x+x^2)^{2/3}} \sim \frac{1}{3^{2/3}}\frac{1}{(1+x)^{2/3}} = \frac{A}{(1+x)^{2/3}},$$

т.к. $k = 2/3 < 1$ – интеграл сходится.

• **6**. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+5x)^3}}$. Подынтегральная функция терпит разрыв в точке $x = 0$ промежутка интегрирования $\displaystyle\lim_{x\to +0} \frac{1}{\sqrt{(x^2+5x)^3}} = \infty$.

Запишем $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{(x^2+5x)^3}} = \frac{1}{x^{3/2}(x+5)^{3/2}} \sim \frac{1}{5^{3/2}}\frac{1}{x^{3/2}} = \frac{A}{x^{3/2}},$

т.к. $k = 3/2 > 1$– интеграл расходится.

Приведем примеры использования таблицы эквивалентных бесконечно малых величин.

• **7**. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{e^{x+1}-1}$. Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв при $x = -1$, так как $\displaystyle\lim_{x\to -1+0} \frac{1}{e^{x+1}-1} = \infty$.

Имеем, что при $x \to -1$, $(x+1) \to 0$, $e^{x+1} - 1 \sim (x+1)$, поэтому

$$\frac{1}{e^{x+1}-1} \sim \frac{1}{(x+1)}.$$

Интеграл расходится, т.к. $k = 1$

• **8**. $\displaystyle\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt[5]{1-\cos x}}$. Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв при $x = 0 \in [-2; 0]$. $\displaystyle\lim_{x\to -0} \frac{1}{\sqrt[5]{1-\cos x}} = \infty$.

Имеем, что при $x \to 0$, $(1-\cos x) \to 0$, $1 - \cos x \sim (x^2/2)$, поэтому

$$\frac{1}{\sqrt[5]{1-\cos x}} \sim \frac{1}{\sqrt[5]{(x^2/2)}} \sim \frac{A}{x^{2/5}}$$

Интеграл сходится, т.к. $k = 2/5 < 1$.

2.4. Приложения определенного интеграла

Определенный интеграл применяется очень широко в геометрии, физике, химии, естествознании.

2.4.1. Общая схема применения интеграла

Решение любой задачи геометрии, химии или физики, которая сведётся, в конечном счёте, к вычислению интеграла, должно, строго говоря, осуществляться по стандартной схеме. Эта схема повторяет схему построения определённого интеграла, т.е. деление промежутка на части, выбор точек в пределах каждого частичного промежутка, составление интегральной суммы, переход к пределу. Однако, при решении задач, каждый раз эту полную схему повторять нет необходимости. Достаточно выполнить правильно лишь одно звено этой схемы – составить выражение для общего члена интегральной суммы. Задача решается по следующей упрощенной схеме.

Пусть требуется определить некоторую величину Q (площадь фигуры, длина дуги, работа силы, количество тепла, кинетическая энергия и т.д.), связанную с промежутком $x \in [a;b]$.

1) Выделяем элемент ΔQ искомой величины Q, соответствующий элементарному промежутку Δx.

2) Составляем приближённое равенство для элемента величины $\Delta Q \simeq q(x)\ \Delta x$, (при этом используются известные геометрические формулы, физические законы, соотношения и т.д.) которое не должно отличаться от точного значения величины ΔQ более, чем на бесконечно малую высшего порядка малости. Далее приближённое равенство можно заменить точным в дифференциальной форме $dQ = q(x)\ dx$.

3) Значение искомой величины Q определится как интеграл от dQ : $Q = \int\limits_a^b q(x)\ dx$.

2.4.2. Некоторые физические задачи

Задача 1. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 3t^2 + \dfrac{2}{t+1} + 5$ м/сек Найти путь, который пройдет тело за время от $t_1 = 2c$ до $t_2 = 5c$.

Р е ш е н и е. Тело движется с переменной скоростью, поэтому выделим малый промежуток времени dt, в пределах которого можно считать скорость неизменной. Тогда пройденный за этот промежуток времени путь равен $dS = v(t) \cdot dt = \left(3t^2 + \dfrac{2}{t+1} + 5\right) \cdot dt$.

Весь пройденный путь за заданный интервал времени

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} dS = \int\limits_2^5 v(t) \cdot dt = \int\limits_2^5 \left(3t^2 + \frac{2}{t+1} + 5\right) \cdot dt =$$

$$= \left(t^3 + 2\ln|t+1| + 5t\right) \Big|_2^5 = 114 + 2\ln 2 + 15 \approx 130,4 \text{ м}.$$

Задача 2. Найти работу, совершаемую синусоидальным током $I = I_0 \sin \omega t$ в проводнике сопротивлением R за период времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 20\pi/\omega$.

Решение. Напомним: **работа, совершаемая постоянным током I в проводнике сопротивлением R за время t определяется** $A = I^2 \cdot R \cdot t$.

В пределах бесконечно малого промежутка времени $\triangle t$ переменный ток можно считать постоянным и, поэтому, для произвольного $\triangle t$ из рассматриваемого временного промежутка ток совершит элементарную работу

$$\Delta A \simeq I^2(t) R \Delta t \quad \text{или} \qquad dA = I^2(t) R\, dt = I_0^2 \sin^2 \omega t \cdot R\, dt.$$

Так как время от $t_1 = 0$ до $t_2 = 20\pi/\omega$ представляет собой время 10 полных периодов, или 20 полупериодов, в каждом из которых совершается одна и та же работа, имеем окончательно

$$A = \int\limits_0^{20\pi/\omega} I_0^2 \sin^2 \omega t\, R\, dt = 20\, I_0^2\, R \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right) \Bigg|_0^{\pi/\omega} = \frac{10\pi\, I_0^2\, R}{\omega} \text{ (дж.)}$$

Задача 3. Найти момент инерции однородного стержня массой M и длиной l относительно одного из его концов.

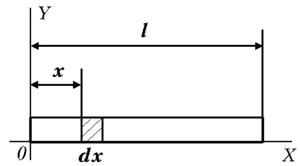
Решение. Напомним: **момент инерции тела массой m относительно точки или оси, равен произведению массы тела на квадрат расстояния от него до точки** $I = mr^2$.

Выделим элемент длины стержня $\triangle x$, находящийся на расстоянии x $(0 \le x \le l)$ от его левого конца.

Так как стержень однородный, то масса единицы длины (плотность) определится как $\dfrac{M}{l}$, то масса выбранного элемента будет равна произведению плотности на длину $\triangle m = \dfrac{M}{l} \triangle x$.

В силу малости участка Δx можно полагать, что расстояния от начала координат до всех точек этого элемента одинаковы и равны x. (Рис. 2.5.) Тогда, используя приведенную формулу для момента инерции, получим приближенное равенство для момента инерции элемента Δx $\triangle I \simeq \triangle m\, x^2 = \dfrac{M}{l} \triangle x \cdot x^2$, или точное равенство в дифференциалах

$$dI = dmx^2 = \frac{M}{l}dx{\cdot}x^2 = \frac{M}{l}x^2{\cdot}dx.$$

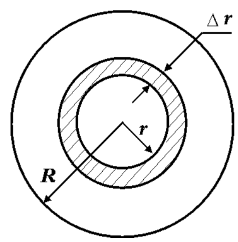


Окончательно имеем

$$I = \int\limits_0^l \frac{M}{l}x^2\,dx = \frac{M}{l}\frac{x^3}{3}\Big|_0^l = \frac{Ml^2}{3}.$$

Задача 4. Найти кинетическую энергию однородного диска массы M и радиуса R, вращающегося вокруг центральной оси с постоянной скоростью ω.

Р е ш е н и е . Напомним: **кинетическая энергия материальной точки массой m, движущейся со скоростью v равна половине произведения массы точки на квадрат её скорости $K = \frac{1}{2}\,m\,v^2$.**



Выделим элемент диска $\triangle S$ в виде бесконечно узкого кольца шириной $\triangle r$, и радиусом r $(0 \le r \le R)$. Так как масса единицы площади диска (поверхностная плотность) равна $\dfrac{M}{\pi\,R^2}$,
а площадь выбранного элемента (кольца) $\triangle S = 2\pi\,r\,\triangle r$, то масса элемента запишется $\triangle m = \dfrac{M}{\pi R^2}\triangle S = \dfrac{M}{\pi R^2}2\pi r \triangle r$.
Линейную скорость всех точек кольца можно считать одинаковой в силу малости величины $\triangle r$ и равной $v(r) = \omega\,r$.

Кинетическая энергия элемента

$$\triangle K \simeq \frac{1}{2}\triangle m\,v^2(r) = \frac{1}{2}\frac{M}{\pi R^2}2\pi r\triangle r\cdot(\omega\,r)^2 = \frac{M\omega^2}{R^2}r^3\triangle r, \quad \text{или}$$

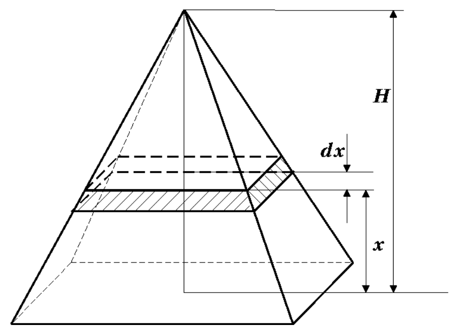
$$dK = \frac{1}{2}\,dm\,v^2(r) = \frac{1}{2}\frac{M}{\pi R^2}2\pi r\,dr\cdot(\omega\,r)^2 = \frac{M\omega^2}{R^2}r^3\,dr.$$

Окончательно получим

$$K = \int\limits_0^R \frac{M\omega^2}{R^2}r^3\,dr = \frac{M\omega^2}{R^2}\frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{1}{4}M\omega^2R^2.$$

Задача 5. Вычислить работу, которая была затрачена на постройку пирамиды Хеопса. (Пирамида Хеопса – правильная четырехугольная пирамида, сторона основания 200м, высота 140м, удельный вес камня $\gamma = 2.5 \frac{\text{т}}{\text{м}^3}$).

Р е ш е н и е. В задаче требуется определить работу, затраченную на преодоление силы тяжести. Выделим слой толщиной dx на высоте x от основания. В качестве элемента работы примем работу, которая была затрачена на возведение этого слоя. Она вычисляется как произведение веса этого слоя $dP = \gamma \cdot dV$, (где dV =– объем этого слоя,) на высоту x, на которую его нужно было поднять
$dA = dP \cdot x = \gamma \cdot dV \cdot x$.
Так как объем слоя
$dV = S(x) \cdot dx$, то
$dA = \gamma\, S(x)\, dx \cdot x = \gamma\, x\, S(x) \cdot dx$.
Необходимо теперь выразить площадь слоя $S(x)$ как функцию расстояния x от основания пирамиды до этого слоя.



Как известно из геометрии, площади параллельных сечений в пирамиде относятся как квадраты их расстояний до вершины

$$\frac{S(x)}{S_{.}} = \frac{(H-x)^2}{H^2} \;\Rightarrow\; S(x) = \frac{S_{\text{осн.}}}{H^2}\,(H-x)^2.$$

Окончательно элемент работы примет вид

$$dA = \gamma\, x\, \frac{S_{\text{осн.}}}{H^2}\,(H-x)^2\, dx = \frac{\gamma\, S_{\text{осн.}}}{H^2}\, x\,(H-x)^2\, dx.$$

Вся работа $A = \int dA = \dfrac{\gamma\, S_{\text{осн.}}}{H^2} \displaystyle\int_0^H x\,(H-x)^2\, dx =$

$$= \frac{\gamma\, S_{\text{осн.}}}{H^2} \int_0^H (H^2 x - 2Hx^2 + x^3)\, dx = \frac{\gamma\, S_{\text{осн.}}}{H^2} \left(H^2 \frac{x^2}{2} - \frac{2H}{3} x^3 + \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^H =$$

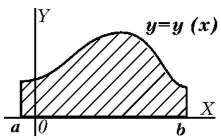
$$= \frac{\gamma\, S_{\text{осн.}}}{H^2} \left(\frac{H^4}{2} - \frac{2H^4}{3} + \frac{H^4}{4} \right) = \frac{\gamma\, S_{\text{осн.}}}{H^2}\, H^4\, \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \gamma\, S_{\text{осн.}}\, H^2.$$

Итак, работа: $A = \dfrac{1}{12} \gamma\, S_{\text{осн.}}\, H^2$. Вычислим ее, используя исходные данные: $A = \dfrac{1}{12} \cdot 2,5 \cdot 10^4 \dfrac{\text{н}}{\text{м}^3} \cdot 4 \cdot 10^4\ \text{м}^2 \cdot 1,96 \cdot 10^4\ \text{м}^2 = 1,63 \cdot 10^{12}$ Дж.
Эта энергия соизмерима с энергией толчка при разрушительном землетрясении.

2.4.3. Вычисление площадей плоских фигур

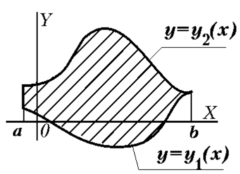
Ниже приведены формулы для вычисления площадей плоских фигур, охватывающие практически все возможные ситуации. При решении задачи необходимо нарисовать фигуру, сопоставить со случаями, указанными в таблице и подобрать нужную формулу.

Таблица 2.1.

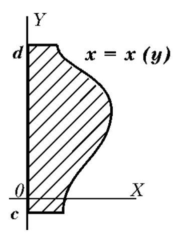


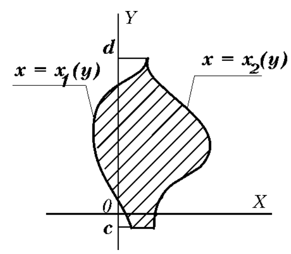
1.a) $S = \int\limits_a^b y(x)\, dx$

1.b) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\, x'(t)\, dt$



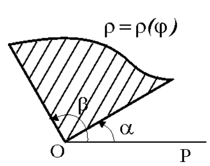
2. $S = \int\limits_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\, dx$



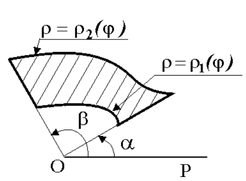


3. $S = \int\limits_c^d x(y)\, dy$

4. $S = \int\limits_c^d [x_2(y) - x_1(y)]\, dy$



5. $S = \dfrac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\, d\varphi$



6. $S = \dfrac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta [\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)]\, d\varphi$

● **1.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: параболой $y = 16 - x^2$ и прямой $x + y + 4 = 0$.

Строим фигуру. Наилучшим образом в данном случае подходит формула 2 таблицы 2.1. Находим абсциссы точек пересечения линий

$-4 - x = 16 - x^2 \implies$
$x^2 - x - 20 = 0 \implies x_1 = -4, \ x_2 = 5.$

В пределах изменения аргумента $-4 \leq x \leq 5$ верхней границей служит $y_2(x) = 16 - x^2$, а нижней $y_1(x) = -4 - x$.

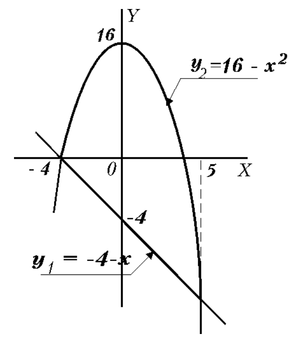


Рис. 2.8.

Площадь фигуры $S = \int\limits_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\, dx = \int\limits_{-4}^{5} \left[(16 - x^2) - (-4 - x)\right]\, dx =$

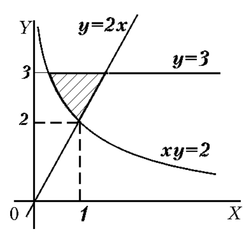
$$= \int\limits_{-4}^{5} (20 - x^2 + x)\, dx = \left(20x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-4}^{5} = 180 - \frac{189}{3} + \frac{9}{2} = 121,5.$$

● 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$xy = 2, \qquad y = 2x, \qquad y = 3.$$

Строим фигуру. Видим, что наиболее подходит для решения задачи формула 4 в таблице 2.1.

$S = \int\limits^{d} [x_2(y) - x_1(y)]\, dy.$



В нашем случае
$x_2(y) = 2/y, \ \ x_1(y) = y/2,$
$c = 2, \ \ d = 3.$
(Значение $c = 2$ получили как точку пересечения графиков функций $xy = 2, \quad y = 2x$). Итак,

$$S = \int\limits_2^3 \left(\frac{y}{2} - \frac{2}{y}\right)\, dy = \left(\frac{y^2}{4} - 2\ln y\right)\Big|_2^3 = \frac{5}{4} - 2\ln\frac{3}{2}.$$

• **3.** Найти площадь петли кривой $x = t^2 - 1, \quad y = t^3 - t.$

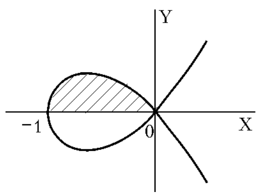


Рис. 2.10.

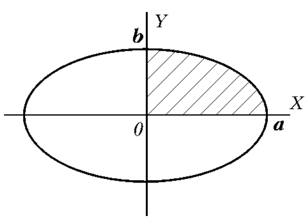
Строим кривую. Видим, что фигура симметрична относительно оси OX. Найдем площадь верхней половинки и результат умножим на 2. Это криволинейная трапеция. Изменению x от -1 до 0 соответствует изменение параметра t от 0 до -1.

Следовательно, площадь, ограниченная петлей, может быть найдена по формуле 1.b) таблицы 2.1.

$$S = 2\int_0^{-1}(t^3 - t)\cdot(t^2-1)'\,dt = 2\int_0^{-1}(t^3-t)\cdot 2t\,dt = -4\int_{-1}^{0}(t^4-t^2)\,dt = -4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{15}.$$

• **4.** Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$



Строим фигуру. В силу симметрии можно вычислить площадь заштрихованной области, а затем результат умножить на 4. Для вычисления площади используем формулу 1.b) таблицы 2.1. $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, x'_t\, dt.$

В нашем примере $y = b\sin t, \quad x'_t\, dt = -a\sin t\, dt.$
Пределы изменения переменной t найдем из условий

$$x = a\cos t, \quad \text{при} \quad x_1 = 0 \quad t_1 = \pi/2, \quad \text{при} \quad x_2 = a \quad t_2 = 0.$$

Тогда для изменения x от $x = 0$ до $x = a$ параметр t будет изменяться от $t_1 = \pi/2$ до $t_2 = 0$.

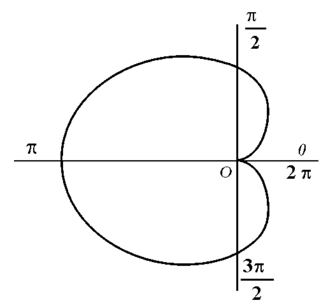
$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, x'_t\, dt = -4\cdot\int_{\pi/2}^{0} b\sin t\cdot a\sin t\, dt = 4\cdot a\, b\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\, dt =$$

$$= 4\cdot a\, b\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 4\cdot a\, b\,\frac{\pi}{4} = \pi\, a\, b.$$

Итог : площадь фигуры, ограниченной эллипсом равна $S_{\text{эл.}} = \pi\, a\, b.$

• **5.** Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 1 - \cos\varphi$.

Строим линию в полярных координатах. Площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, будем вычислять по формуле 5 таблицы 2.1.



Функция $\rho(\varphi) = 1 - \cos\varphi$. При определении пределов интегрирования учтем симметрию фигуры. Можно взять интеграл по φ в пределах от 0 до π, и результат удвоить. Тогда площадь фигуры

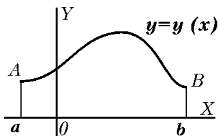
$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2\ (\varphi)\ d\varphi = \int_0^{\pi} (1-\cos\varphi)^2\ d\varphi = \int_0^{\pi} (1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\ d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)\ d\varphi = \int_0^{\pi} \left(3/2 - 2\cos\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\ d\varphi =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\ \varphi - 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\ \Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\ \pi.$$

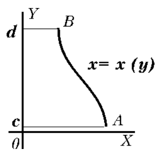
2.4.4. Вычисление длин дуг плоских кривых

Таблица 2.2.



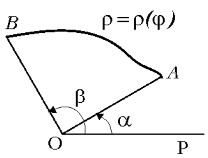
1. $y = y(x)$, $\qquad L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y_x'^2}\ dx.$

2. $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \qquad L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\ dt.$



3. $x = x(y)$,

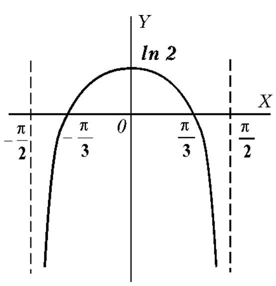
$$L = \int\limits_c^d \sqrt{1 + x_y'^2}\ dy.$$



4. $\rho = \rho(\varphi)$,

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\, d\varphi.$$

• **1.** Найти длину линии $\quad y = \ln(2\cos x) \quad$ между соседними точками пересечения с осью OX.



Линия задана в декартовой системе координат, поэтому используем формулу 1 таблицы 2.2. Пределы интегрирования - точки пересечения кривой с осью OX находим из условия

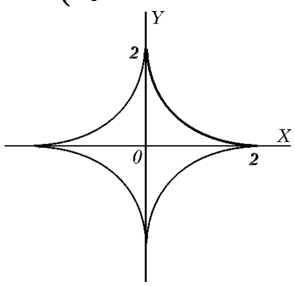
$$y = 0 \implies \ln(2\cos x) = 0 \implies$$
$$2\cos x = 1, \qquad \cos x = 1/2, \implies$$
$$x_1 = -\frac{\pi}{3}, \qquad x_2 = \frac{\pi}{3}.$$

Найдем $\quad y_x' = \dfrac{1}{2\cos x}\,(-2\sin x) = -\mathrm{tg}\ x, \quad 1 + y_x'^2 = 1 + \mathrm{tg}^2\ x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Итак, $\quad L = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{1/\cos^2 x}\ dx = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\mathrm{tg}\left|\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right|\ \Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} =$

$$= \ln\ \left|\mathrm{tg}\ \frac{5\pi}{12}\right| - \ln\ \left|\ \mathrm{tg}\ \frac{\pi}{6}\right| \approx 2{,}62.$$

• **2.** Найти длину части астроиды
$\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ от значения $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi/2$.



Линия задана параметрически:
$x = x(t)$, $y = y(t)$. Длину дуги вычисляем по формуле 2 таблицы 2.2.

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt$$

(параметр t должен меняться от меньшего значения к большему.)

Найдем отдельно $x_t' = -6\cos^2 t \sin t$, $y_t' = 6\sin^2 t \cos t$,

$$x_t'^2 + y_t'^2 = 36\cos^4 t \sin^2 t + 36\sin^4 t \cos^2 t = 36\sin^2 t\cos^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) =$$
$$= 36\sin^2 t \cos^2 t = 9\sin^2 2t.$$

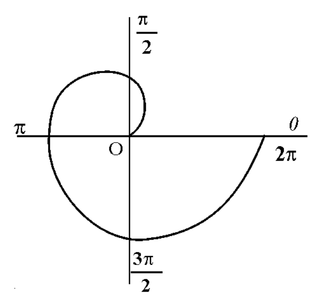
$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{9\sin^2 2t} = 3\,|\,\sin 2t\,|\,.$$

Так как $\cos t$ и $\sin t$ положительны в первой четверти, получим

$$L = 3\int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt = -\frac{3}{2}\ \cos 2t\ \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{3}{2}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{3}{2}(-1-1) = 3.$$

• **3.** Найти длину первого витка спирали Архимеда $\rho = 3\varphi$.

Линия $\rho = 3\varphi$ задана в полярной системе координат уравнением вида $\rho = \rho(\varphi)$, длина дуги вычисляется по формуле 4 таблицы 2.2.



$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\, d\varphi.$$

Чтобы вычислять длину дуги, необходимо определить пределы изменения угла φ, соответствующие крайним точкам дуги.

В рассматриваемой задаче первый виток спирали соответствует изменению угла φ от 0 до 2π. Находим предварительно

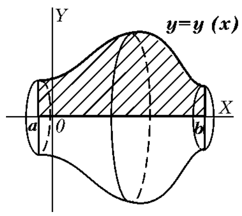
$$\rho_\varphi' = (3\varphi)' = 3, \qquad \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2} = \sqrt{(3\varphi)^2 + 3^2} = 3\sqrt{1+\varphi^2}.$$

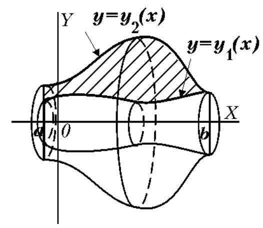
Тогда $\displaystyle L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\, d\varphi = 3\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi.$

Данный интеграл можно взять из таблицы интегралов

$$L = 3\left(\tfrac{1}{2}\ \varphi\ \sqrt{1+\varphi^2} + \tfrac{1}{2}\ \ln\left|\,\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\,\right|\right)\ \Big|_0^{2\pi} =$$
$$= 3\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \tfrac{3}{2}\ln\left|\,2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\,\right| \approx 63,7.$$

2.4.5. Вычисление объемов тел вращения и площадей поверхности вращения Таблица 2.3.

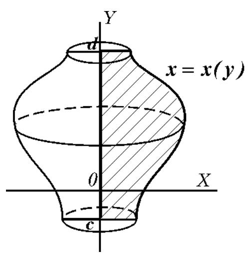


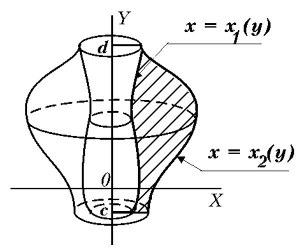


1.a) $V_{ox} = \pi \int\limits_a^b y^2(x)\, dx$

2. $V_{ox} = \pi \int\limits_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)]\, dx$

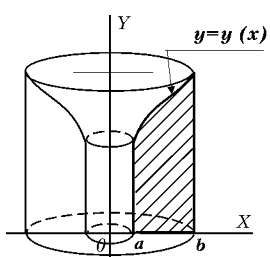
1.b) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\qquad V_{ox} = \pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y^2(t)\; x'(t)\; dt$

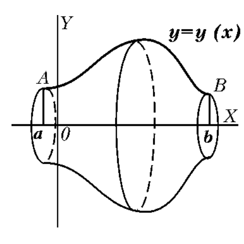




3. $V_{oy} = \pi \int\limits_c^d x^2(y)\; dy$

4. $V_{oy} = \pi \int\limits_c^d [x_2^2(y) - x_1^2(y)]\; dy$



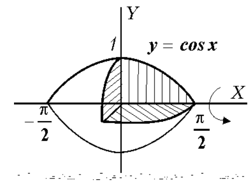


5. $V_{oy} = 2\pi \int\limits_a^b x \cdot y\; (x)\; dx$

6. $F_{\text{вр.}}^{ox} = 2\pi \int\limits_a^b y(x)\sqrt{1 + y_x'^2}\; dx.$

Отметим, что при решении задачи необходимо нарисовать фигуру, сопоставить со случаями, указанными в таблице 2.3, и подобрать нужную формулу.

• **1.** Найти объем тела вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$, $y = 0$.



Делаем рисунок и видим, что данный случай соответствует случаю 1.а) таблицы 2.3.

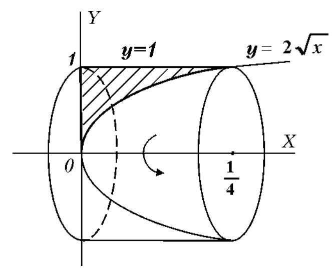
Исходная формула $V_{ox} = \pi \int\limits_a^b y^2(x)\, dx$.

Пределы интегрирования находим из равенства $\cos\ x = 0$, $\Longrightarrow$ $x_1 = -\pi/2$, $x_2 = \pi/2$. Тогда

$$V_{ox} = \pi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx =$$

$$= \pi \int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2x)\, dx = \pi \left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) \Bigg|_0^{\pi/2} = \pi \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

• **2.** Найти объем тела вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sqrt{x}$, $y = 1$, $x = 0$.



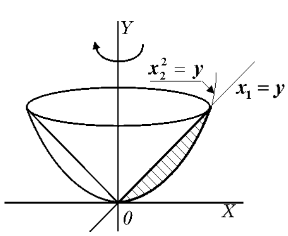
Делаем рисунок и видим, что данный случай соответствует случаю 2 таблицы 2.3. Причем $y_2(x) = 1$, $y_1(x) = 2\sqrt{x}$.

$$V_{ox} = \pi \int\limits_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)]\, dx.$$

Пределы интегрирования находим из равенства $2\sqrt{x} = 1$, $\Longrightarrow$ $x = 1/4$. Тогда

$$V_{ox} = \pi \int\limits_0^{1/4} [1^2 - (2\sqrt{x})^2]\, dx = \pi \int\limits_0^{1/4} (1-4x)\, dx = \pi(x - 2x^2) \Bigg|_0^{1/4} = \frac{\pi}{8}.$$

• **3.** Найти объем тела вращения вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x$.



Делаем рисунок и видим, что данный случай соответствует случаю 4 таблицы 2.3.

$$V_{oy} = \pi \int\limits_c^d [x_2^2(y) - x_1^2(y)]\, dy.$$

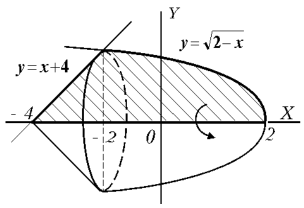
Пределы интегрирования находим из равенства $x^2 = x$ $\Longrightarrow$ $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

$y_1 = c = 0$, $y_2 = d = 1$.

Тогда, учитывая, что $x_2^2(y) = y$, $x_1(y) = y$, $x_1^2(y) = y^2$, получим

$$V_{oy} = \pi \int\limits_0^1 (y - y^2)\, dy = \pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right) \Bigg|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

• **4.** Найти объем тела вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $\quad y=\sqrt{2-x}, \quad y=x+4, \quad y=0.$



Делаем рисунок и видим, что данный случай соответствует случаю 1.а) таблицы 2, но с той разницей, что при изменении x от -4 до 2 фигура сверху ограничена двумя линиями, и объем тела вращения будет равен сумме объемов.

Найдем координаты точки пересечения прямой и параболы

$$x+4=\sqrt{2-x} \quad \Longrightarrow \quad x^2+8x+16=2-x \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad x^2+9x+14=0 \quad \Longrightarrow \quad x_1=-7, \quad x_2=-2$$

($x_1=-7$ - посторонний корень.)

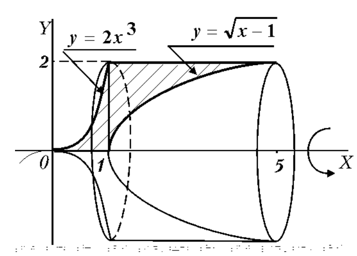
Таким образом, имеем $\quad y(x)=\begin{cases} x+4, & x\in[-4;\ -2],\\ \sqrt{2-x}, & x\in[-2;\ 2]. \end{cases}$

При нахождении объема по формуле $\quad V_{ox}=\pi\int\limits_a^b y^2(x)\ dx \quad$ необходимо разбить интеграл на два интеграла, в каждом из которых будет своя подынтегральная функция

$$V_{ox}=\pi\int\limits_{-4}^{-2}(x+4)^2\ dx+\pi\int\limits_{-2}^{2}(\sqrt{2-x})^2\ dx=\pi\int\limits_{-4}^{-2}(x^2+8x+16)\ dx+$$
$$+\pi\int\limits_{-2}^{2}(2-x)\ dx=\pi(\frac{x^3}{3}+4x^2+16x)\ \Big|_{-4}^{-2}+\pi(2x-\frac{x^2}{2})\ \Big|_{-2}^{2}=\frac{32\pi}{3}.$$

• **5.** Найти объем тела вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $\quad y=2\ x^3, \quad y=\sqrt{x-1}, \quad y=0, \quad y=2.$

Из рисунка видно, что в данном случае объем тела вращения также будет равен сумме объемов, первый из которых V_1 находится по формуле 1 таблицы 2.3, а второй объем V_2- по формуле 2. Найдем координаты точек пересечения прямой и парабол



$$2x^3=2 \quad \Longrightarrow \quad x=1,$$
$$\sqrt{x-1}=2 \quad \Longrightarrow \quad x=5.$$

Таким образом, имеем

$$V_{ox} = V_1 + V_2 = \pi \int\limits_0^1 (2x^3)^2\ dx + \pi \int\limits_1^5 \left(2^2 - (\sqrt{x-1})^2\right)\ dx =$$

$$= \pi \int\limits_0^1 4x^6\ dx + \pi \int\limits_1^5 (4 - (x-1))\ dx = \pi \int\limits_0^1 4x^6\ dx + \pi \int\limits_1^5 (5 - x)\ dx =$$

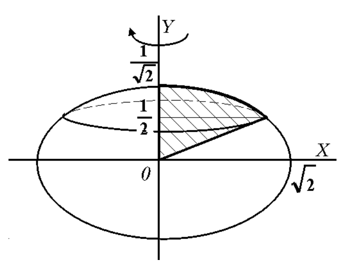
$$= \pi \frac{4x^7}{7} \Big|_0^1 + \pi \left(5x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_1^5 = \frac{4}{7} + 25 - 5 - \frac{25}{2} + \frac{1}{2} = \frac{60\pi}{7}.$$

• **6.** Найти объем тела вращения вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $x^2 + 4y^2 = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, $(x \geq 0, \quad y \geq 0)$.

Сверху фигура ограничена эллипсом, каноническое уравнение которого $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{1/2} = 1$, полуоси $a = \sqrt{2}$, $b = 1/\sqrt{2}$

Делаем рисунок и видим, что данный случай соответствует случаю 3 таблицы 2.3 с той лишь разницей, что интеграл

$V_{oy} = \pi \int\limits_c^d x^2(y)\ dy$ необходимо разбить на два, так как



$$x(y) = \begin{cases} 2y, & y \in [0;\ \frac{1}{2}\ ], \\ \sqrt{2 - 4y^2}, & y \in [\frac{1}{2};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ]. \end{cases}$$

Точки пересечения эллипса и прямой находятся из равенства

$$\sqrt{2 - 4y^2} = 2y \implies$$

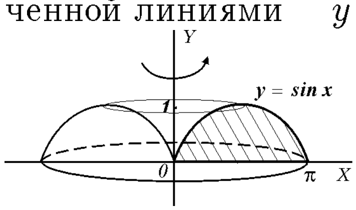
$$2 - 4y^2 = 4y^2, \quad 8y^2 = 2, \qquad y = 1/2.$$

Итак, искомый объем будет складываться из двух объемов: объема V_1 от вращения прямой $x = 2y$ и объема V_2 от вращения дуги эллипса

$$V_{oy} = V_1 + V_2 = \pi \int\limits_0^{1/2} (2y)^2\ dy + \pi \int\limits_{1/2}^{1/\sqrt{2}} (2 - 4y^2)\ dy = \pi \int\limits_0^{1/2} 4y^2\ dy + \pi \int\limits_{1/2}^{1/\sqrt{2}} (2 - 4y^2)\ dy =$$

$$= \pi \frac{4y^3}{3} \Big|_0^{1/2} + \pi \left(2y - \frac{4y^3}{3}\right) \Big|_{1/2}^{1/\sqrt{2}} = \pi \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{4}{3}\ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{1}{6}\right) \approx 0,86.$$

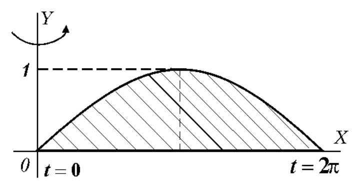
• **7.** Найти объем тела вращения вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $\quad y = \sin x, \quad y = 0, \quad 0 \le x \le \pi.$



При нахождении объема тела вращения по формуле $V_{oy} = \pi \int\limits_c^d x^2(y)\ dy$ нам потребуется решать интеграл $\int \arcsin^2 y\, dy$, что является довольно трудоемкой задачей, поэтому воспользуемся формулой 5, таблица 2.3

$V_{oy} = 2\pi \int\limits_a^b x \cdot\ y(x)\ dx = 2\pi \int\limits_0^\pi x \cdot\ \sin x\ dx = \ \Big|$ Интегрируя по частям, получим $\Big| \quad = -x \cdot \cos x\ \Big|_0^\pi + \sin x\ \Big|_0^\pi = -\pi \cdot \cos(\pi) = -\pi \cdot (-1) = \pi.$

• **8.** Найти объем тела вращения вокруг оси OY фигуры, ограниченной циклоидой



$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad \text{и осью} \quad OX: \quad y = 0.$$

Здесь также удобнее использовать формулу 5 для вычисления объема

$V_{oy} = 2\pi \int\limits_a^b x \cdot\ y(x)\ dx,$ в которой делаем замену переменной

$x = t - \sin t, \qquad y = 1 - \cos t, \qquad dx = x'_t \cdot dt = (1 - \cos t)\ dt$

Приравнивая $\quad y = 1 - \cos t \quad$ и $\quad y = 0$, находим пределы интегрирования $\quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$

Тогда $\quad V_{oy} = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} (t - \sin t) \cdot (1 - \cos t)\ (1 - \cos t)\ dt =$

$$= 2\pi \int\limits_0^{2\pi} (t - \sin t) \cdot (1 - \cos t)^2\ dt = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} (t - \sin t) \cdot (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\ dt =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{2\pi} (t - \sin t - 2t\cos t + 2\sin t \cos t + t\cos^2 t - \sin t \cos^2 t)\ dt =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{2\pi} (t - \sin t - 2t\cos t + 2\sin t\cos t + \frac{t}{2} + \frac{t\cos 2t}{2} - \sin t\cos^2 t)\ dt =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{2\pi} (t + \frac{t}{2})\ dt = 2\pi \frac{3}{2} \cdot \frac{t^2}{2}\ \Big|_0^{2\pi} = 6\pi^3.$$

Интегралы отостальных слагаемых будут равны нулю.

2.4.7. Неберущиеся интегралы

Наряду с рассмотренными классами интегрируемых функций существует большой класс неинтегрируемых функций, т.е. функций, интегралы от которых не выражаются в элементарных функциях. Например, к неберущимся относятся интегралы

$$\int e^{x^2}\,dx,\quad \int \cos(x^2)\,dx,\quad \int \sin(x^2)\,dx,\quad \int \frac{dx}{\ln x},\quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

$$\int \frac{\cos x}{x}\,dx,\quad \int \mathrm{arctg}^2 x\,dx,\quad \int x\mathrm{tg}\ x\,dx,$$

а также случаи неинтегрируемости дифференциальных биномов и др.

Однако, если интегралы от таких функций являются определенными, а также, если нахождение первообразной является очень трудоемкой задачей, прибегают к приближенным методам вычисления определенных интегралов, среди которых наиболее точным является метод Симпсона, который легко реализовать на ЭВМ.

Приближенное равенство $\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx$

$$\frac{b-a}{6n}\cdot[\,y_0+y_{2n}+2(y_2+\ldots+y_{2n-2})+4(y_1+\ldots+y_{2n-1})\,],$$

называется **формулой парабол или формулой Симпсона**.

Согласно этой формуле промежуток интегрирования делится на четное число частей $2n$ и вычисляются значения подынтегральной функции во всех точках

$$x_0,\quad x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_{2n-2},\quad x_{2n-1},\quad x_{2n}.$$

Полученные значения функции

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1,\quad y(x_2)=y_2,\quad \ldots,$$

$$\ldots,\quad y(x_{2n-2})=y_{2n-2},\quad y(x_{2n-1})=y_{2n-1},\quad y(x_{2n})=y_{2n}$$

подставляются в формулу, в которой, как легко заметить, сгруппированы значения с нечетными и четными номерами. Метод легко реализовать даже вручную, взяв не очень большие значения $2n$, однако точность метода возрастает при увеличении числа разбиений промежутка. Поэтому для достижения большой степени точности используется ЭВМ.