Идентификация модели, линейной по параметрам вектора наблюдений

Цель работы

Научиться строить модель объекта, линейную по параметрам вектора наблюдения. (выполнить аппроксимацию функции по экспериментальным данным).

Задание

1. Аппроксимировать производственную функцию Кобба-Дугласа, моделирующую зависимость объёма производства *Y* от создающих его факторов производства — труда *(L)* и капитала *(K)*. Функция имеет вид

$$Y(K,\, L) = a_0 K^{a_1} L^{a_2},$$

где a_0, a_1, a_2 - параметры функции, подлежащие определению по данным функционирования производства.

Номер эксперимента *i*	Значения *K*	Значения *L*	Значения Y
1	1	2	0,5
2	2	1	0,6
3	2	2	1,1
4	3	2	1,5
5	3	3	1.8
6	4	3	2

Указание. Прологарифмируйте исходную нелинейную функция, чтобы привести её к виду функции линейной по параметрам вектора наблюдения.

2. Составить отчёт с результатами, полученными в Mathcad и ответами на вопросы.

Вопросы

1. Состав системы управления
2. Принципы управления
3. Задачи теории управления
4. Подходы к построению моделей объектов управления
5. В чём смысл задачи идентификации модели в теории управления?
6. Что означает в теории управления выражение «построить модель»?

Теоретические сведения

Аппроксимация опытных данных – это метод, основанный на замене экспериментально полученных данных аналитической функцией наиболее близко проходящей или совпадающей в узловых точках с исходными значениями (данными полученными в ходе опыта или эксперимента).

Для многих сложных и мало изученных процессов невозможно получить математическую модель, исходя только из априорных знаний. В этих условиях недостаток знаний можно компенсировать наблюдениями за функционированием процесса. *Данная информация может быть использована как для определения неизвестных параметров системы* при известной структуре модели (тогда говорят о модели как о «*сером ящике*»), так и о попытке построить модель, не обладая даже знаниями о ее структуре («*чёрный ящик*»).

Будем предполагать известной математическую модель с точностью до констант c:

$$y = f(x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_m). \tag{1}$$

Пусть имеются данные эксперимента для входных переменных $x_{k,}^{i}\ k = 1, 2, \ldots, n, i = 1, 2, \ldots, N)$, где n - размерность вектора x; N – число экспериментов и соответствующие **значения входных переменных** $\boldsymbol{x^i}$ и **выходной переменной** $\boldsymbol{y^i}$ в эксперименте i. Определим по этим экспериментальным данным значения констант, входящих в (1). Подставляя эти данные эксперимента в уравнение (1) для модели, получим систему уравнений

$$\begin{cases} y^1 = f(x_1^1, \ldots, x_n^1, c_1, \ldots, c_m), \\ y^2 = f(x_1^2, \ldots, x_n^2, c_1, \ldots, c_m), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ., \\ y^N = f(x_1^N, \ldots, x_n^N, c_1, \ldots, c_m). \end{cases} \tag{2}$$

Если $m < N$, то число условий избыточно и выбор m параметров вектора c удовлетворить всем N условиям (1) не может. Функцию *невязки (меру уклонения*) между экспериментальными данными и предсказанными по модели (1) можно представить в виде квадратичной нормы

$$Q^2(c) = \sum_{i=1}^{N} (y^i - f(x^i, c_1, \ldots, c_m))^2$$

В общем случае минимизация Q может быть осуществлена лишь численно. Для достаточно широкого класса задач минимизацию функции невязки можно осуществить аналитически. Такой класс составляют функции, линейные по параметрам c:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \phi_k(x)$$

Для такой модели функция невязки имеет следующий вид:

$$Q(c) = \sum_{i=1}^{N} (y^i - \sum_{k=1}^{m} c_k\ \phi_k(x^i))^2. \qquad (3)$$

Необходимые условия минимума этой функции

$$\frac{\partial Q}{\partial c_j} = 0,\ j = \overline{1,m}$$

приводят к определению параметров c с помощью решения системы уравнений

$$\frac{\partial Q}{\partial \tilde{n}_j} = \sum_{i=1}^{N} (y^i - \sum_{k=1}^{m} c_k\ \phi_k(x^k))\ \phi_j(x^k) = 0,\ j = \overline{1,m}. \qquad (4)$$

Введём следующие обозначения:

$$\omega_i = \sum_{i=1}^{N} y^i\ \phi_j(x^i),\ \ j = \overline{1,m}, \qquad (5)$$

$$\phi_{kj} = \sum_{i=1}^{N} \phi_k(x^i)\ \phi_j(x^i),\ k = \overline{1,m},\ j = \overline{1,m}. \qquad (6)$$

Раскрывая скобки и меняя порядок суммирования, можно с использованием (5) и (6) записать систему линейных уравнений (3) в следующем виде

$$\sum_{k=1}^{m} c_k\ \phi_{kj} = \omega_j,\ j = \overline{1,m},$$

или в векторном виде

$$\Phi c = \Omega, \qquad (7)$$

где $\Phi = \{\phi_{ki}\}$ - *информационная матрица* размером m x m; $\Omega = \{\omega_i\}$ - вектор правых частей размерности m. Из (6) видно, что матрица Φ является симметрической ($\Phi^T = \Phi$) и зависит только от значений входных переменных x^i

Решение системы

$$c = \Phi^{-1}\Omega \qquad (8)$$

даёт искомые значения параметров модели.

Пример

Пусть в результате экспериментов получена следующая таблица данных, и мы хотим получить модель в виде функции

$$y(x_1, x_2) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 \sqrt{x_2}.$$

Номер эксперимента i	Значения x_1^i	Значения x_2^i	Значения y^i
1	0	0	0,5
2	0	1	1,2
3	1	0	1,6
4	1	1	2,4
5	2	1	3,4
6	2	4	4,7

Для выполнения задания воспользуемся средствами пакета Mathcad.
1. Ввод исходных данных представлен в приложениях 1 и 2. Вектора наблюдений для удобства расчётов сводятся в одну матрицу, что потребовало введение дополнительного вектора. Элементы этого вектора содержат значения константы модели, не связанной с наблюдаемыми переменными.

2. В соответствии с (3) имеем;

$$\phi_1(x) = 1,\ \ \phi_2(x) = x_1,\ \ \phi_3(x) = \sqrt{x_2}\,.$$

Тогда по формуле (6) можно посчитать элементы информационной матрицы Φ = **{ϕ_{kj}} (**приложение 3).

3. Вектор правых частей Ω определяется из (5) **(**приложение 4).

4. Вектор искомых констант c определяется согласно (8) **(**приложение 5).

5. Выходные значения y^i, подсчитанные для модели с найденными константами для i–го эксперимента, можно увидеть в приложении 6.

Приложение 1

Исходные данные.

Векторы наблюдений

Дополнительный вектор входа | **Векторы входов модели** | **Вектор выхода модели** | **Вектор-функция модели**

$$x^{\langle 0\rangle} := \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad x^{\langle 1\rangle} := \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\2\\2\end{pmatrix} \quad x^{\langle 2\rangle} := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\4\end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix}0.5\\1.2\\1.6\\2.4\\3.4\\4.7\end{pmatrix} \quad \phi(x) := \begin{pmatrix}1\\x_1\\\sqrt{x_2}\end{pmatrix}$$

$$m := \mathrm{last}\left[\phi\left[\left(x^T\right)^{\langle 0\rangle}\right]\right] \quad N := \mathrm{last}(y) \quad k := 0..m \quad j := 0..m \quad i := 0..N$$

Приложение 2

Объединение векторов входов во вспомогательную матрицу $\{a_{ij}\}$

$$a_{i,j} := \left(x^{\langle j\rangle}\right)_i \qquad a = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\\1&2&1\\1&2&4\end{pmatrix}$$

Приложение 3

Программа для вычисления информационной матрицы $\Phi=\{\phi_{kj}\}$

$$\phi_{kj} = \sum_{i=1}^{N} \phi_k(x^i)\,\phi_j(x^i), \quad k=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,m}.$$

$$\phi1(x) := \left|\begin{array}{l}\text{for } i \in 0..m\\ \quad \text{for } j \in 0..N\\ \quad\quad b^{\langle j\rangle} \leftarrow \phi\left[\left(x^T\right)^{\langle j\rangle}\right]\\ b\end{array}\right. \qquad b := \phi1(a)^T \qquad b = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\\1&2&1\\1&2&2\end{pmatrix}$$

$$\Phi_{k,j} := b^{\langle k\rangle}\cdot b^{\langle j\rangle} \qquad \Phi = \begin{pmatrix}6&6&5\\6&10&7\\5&7&7\end{pmatrix}$$

Приложение 4

Получение вектора Ω

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{N} y^i \phi_j(x^i), \quad j = \overline{1,m},$$

$$\Omega_k := y \cdot b^{\langle k \rangle}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 13.8 \\ 20.2 \\ 16.4 \end{pmatrix}$$

Приложение 5

Получение вектора с

$$c := \Phi^{-1} \cdot \Omega$$

$$c = \begin{pmatrix} 0.391 \\ 1.136 \\ 0.927 \end{pmatrix}$$

Приложение 6

Модель Ym

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k(x).$$

$$Ym_i := c \cdot \phi\left[\left(x^T\right)^{\langle i \rangle}\right]$$

$$Ym = \begin{pmatrix} 0.391 \\ 1.318 \\ 1.527 \\ 2.455 \\ 3.591 \\ 4.518 \end{pmatrix}$$