

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
**«Томский политехнический университет»**

---

**В.А. Стародубцев, Н.Н. Заусаева**

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОЦЕССОВ ДВИЖЕНИЯ**

Учебное пособие

**Издательство Томского политехнического университета  
2008**

УДК 004.94; 371.388

С 80

С 80

**Стародубцев В.А.**

Компьютерное моделирование процессов движения: учебное пособие / В.А. Стародубцев, Н.Н. Заусаева. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 80 с.

Пособие содержит теорию и методику выполнения девяти компьютерных лабораторно-практических работ по курсу физики, включает в себя основные теоретические положения по теме работы, методические указания по выполнению экспериментальной части и задания для самостоятельной работы. Подготовлено на кафедре общей физики и предназначено для студентов очной и заочной форм обучения, изучающих указанный курс. Пособие может быть также использовано в лабораторном практикуме по курсу «Концепции современного естествознания». Для преподавателей даны практические рекомендации по методике проведения всех лабораторных работ.

УДК 004.94; 371.388

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом  
Томского политехнического университета

*Рецензенты*

Доктор физико-математических наук, профессор

*В. В. Рыжов*

Доктор педагогических наук, профессор

*М. Г. Минин*

© Томский политехнический университет, 2008

© Стародубцев В.А., Заусаева Н.Н., 2008

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью пособия является математическое моделирование и анализ линейных, нелинейных и бифуркационных процессов движения или изменения состояния простых физических систем.

Линейные процессы представлены примерами суперпозиции механических видов движения – поступательного с вращательным, двух вращательных, взаимно перпендикулярных и сонаправленных колебаний. Исследуется движение тела в поле силы тяжести и силы Архимеда, движение заряженных частиц в магнитном и сопряженном электрическом полях. Относительность движения рассматривается на примере эффекта Доплера в неподвижной и движущейся системах отсчета. Простейшие нелинейные процессы изучаются на моделях ангармонических осцилляторов с одним и двумя положениями устойчивого равновесия и при исследовании движения тела в вязкой среде, в турбулентном режиме. Процессы бифуркации и появления элементов динамического хаоса представлены моделью изолированной популяции с неперекрывающимися поколениями. Особенности неоднородных электростатических полей рассмотрены на примере системы трех точечных зарядов.

При выполнении работ обращается внимание на анализ условий возникновения критических состояний: разрушения колебательной системы, перехода её в новое положение, появления нескольких возможных состояний, возникновения резонанса, образования ударных волн. Помимо развертывания процессов движения во времени, использовано их представление на фазовой плоскости и с помощью конфигурационных кривых. Таким образом, на сравнительно простых компьютерных моделях изучаются различные типы динамики систем и методы анализа, широко используемые в современном естествознании.

Теоретические сведения, приведенные в описаниях, вполне достаточны для самостоятельной работы студентов и понимания сути процессов без обращения к дополнительной учебной литературе.

Методика выполнения нескольких работ предусматривает элементы проектной организации взаимодействия студентов, при которой из индивидуально полученных результатов формируется общая база данных, подлежащая анализу и обсуждению.

Большинство работ включают задания экспериментального и/или теоретического плана для последующего самостоятельного исследования студентами во внеурочное время.

По всем работам для преподавателей приведены практические рекомендации по методике организации занятий.

# 1. ТРАЕКТОРИИ СЛОЖЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ

**Цель работы:** Анализ формы траекторий сложения прямолинейных равноускоренных движений и прямолинейных движений с равномерным вращательным в зависимости от соотношения между линейными и угловыми кинематическими характеристиками.

## Основные положения

Абсолютно неподвижных тел в природе нет. Материальные объекты, неподвижные по отношению к одним телам отсчета, движутся по отношению к другим. Обобщающий наблюдения принцип независимости перемещений тел в пространстве утверждает, что один и тот же материальный объект может участвовать в нескольких относительных движениях, независимо одно от другого. На основании этого мы можем выделять в сложном движении более простые компоненты или поступать наоборот – из простых видов движения составлять более сложное пространственное перемещение.

В некоторых случаях можно сравнительно легко получить математическое описание траектории составного движения тела или его части. Рассмотрим, например, движение тела, опущенного за борт самолета. Без учета сопротивления воздуха движение по горизонтали будет описываться нами как прямолинейное равномерное, по вертикали – как равноускоренное без начальной скорости. Отсчитывая координату  $y$  от начальной точки (сверху – вниз), можно записать кинематический закон движения в параметрическом виде:

$$\begin{aligned}x &= V_0 t \\y &= g t^2 / 2,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где  $V_0$  – начальная скорость тела, равная скорости самолета;  
 $g$  – ускорение свободного падения;  
 $t$  – время.

Исключив время из системы уравнений (1.1), получим для траектории уравнение параболы:

$$y = x^2 (g / 2V_0^2) = x^2 \cdot \text{const}.\tag{1.2}$$

Как видим, сложение прямолинейных движений может приводить к результирующему движению по криволинейной траектории.

Другой пример: траектория движения точки на ободке диска, который катится без проскальзывания по прямой. Координаты точки можно выразить по формуле (1.3) через величины радиуса диска  $r$  и угла качения  $\alpha = \omega t$ , где  $\omega$  обозначает угловую скорость вращения диска:

$$\begin{aligned}x &= r(\alpha - \sin\alpha) \\y &= r(1 - \cos\alpha).\end{aligned}\tag{1.3}$$

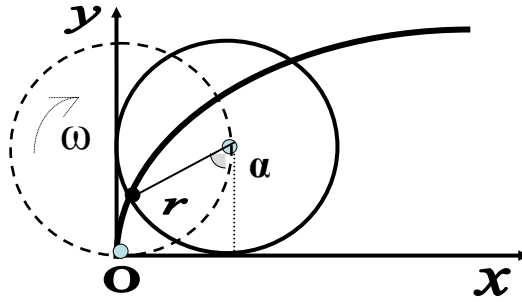


Рис. 1.1. Схема качения диска по прямой линии

Исключая угол  $\alpha$  в системе уравнений (1.3), можно получить следующее выражение для траектории точки:

$$\frac{y}{r} = -\cos \frac{x + y(2r - y)}{r} \quad (1.4)$$

Кривая, описываемая зависимостью (1.4), называется *циклоидой*. Без построения графика зависимости (1.4) трудно представить себе форму циклоиды и ее отличие от более привычной параболы.

Сложение двух вращательных движений происходит в тех случаях, когда центр диска движется по окружности (рис. 1.2). Если качение диска происходит без проскальзывания (например, зубчатое зацепление), то полярный угол между осью координат и радиусом-вектором центра колеса будет определяться зависимостью:

$$\varphi = \omega t = \frac{V_c t}{R_0 \pm R} \quad (1.5)$$

где обозначено:

$V_c$  – линейная скорость центра диска;  $t$  – время;

$R_0$  и  $R$  – радиусы большого круга и диска соответственно.

Знак плюс означает, что диск катится по внешней стороне круга, знак минус выбирается, если качение происходит внутри круга.

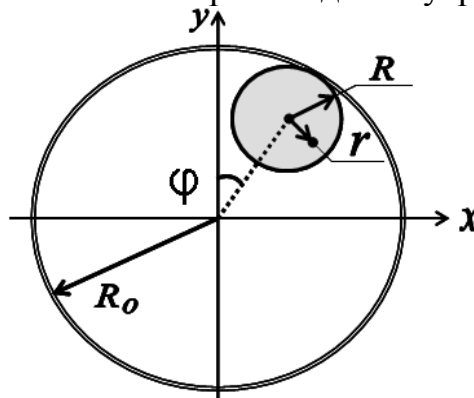


Рис. 1.2. Схема качения диска по кругу

В параметрическом виде траектория движения точки, расположенной на диске на расстоянии  $r$  от его центра, будет описана системой уравнений:

$$\begin{aligned}x &= (R_0 \pm R) \cos\left(\frac{R}{R_0} \varphi\right) - r \cos\left(\frac{R_0 + R}{R_0} \varphi\right); \\y &= (R_0 \pm R) \sin\left(\frac{R}{R_0} \varphi\right) - r \sin\left(\frac{R_0 + R}{R_0} \varphi\right).\end{aligned}\tag{1.6}$$

Использование тригонометрических функций синуса и косинуса в выражении (1.6) не случайно. Здесь проекции положения точки изменяются по закону сложения колебаний. Справедливо и обратное – в частных случаях сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний результирующая траектория может иметь вид окружности или эллипса (соответствующую лабораторную работу Вам предстоит выполнить позднее).

Для других, более сложных вариантов суперпозиции движений, математическое описание траекторий становится еще более громоздким. В таких случаях имеет смысл «поручить» компьютеру рассчитать и представить на экране дисплея (визуализовать) траекторию движения точки или тела.

## ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

В настоящей работе компьютерная модель реализует различные варианты сложения элементарных движений: двух прямолинейных равномерных или равнопеременных поступательных движений; прямолинейного равномерного или равноускоренного движения точки по радиусу вращающегося диска и двух вращательных движений.

Если задать нулевое значение угловой скорости вращения диска  $\omega=0$ , то результирующее движение будет состоять из двух взаимно перпендикулярных перемещений с различными по знаку и величине ускорениями. В отсутствие горизонтального перемещения возможно сложение равномерного вращательного движения диска с равномерным или равнопеременным прямолинейным движением точки по радиусу диска.

Положив скорость и ускорение радиального движения точки равными нулю, мы получим сложение вращательного и поступательного движений, при этом, условие качения диска без проскальзывания выражается равенством:

$$V = \omega r.\tag{1.7}$$

В таком случае на экране будет представлена циклоида. Если же величина линейной скорости  $V > \omega r$ , то Вы моделируете движение диска

«юзом». Наоборот, при  $V < \omega r$ , будет представлено движение диска с проскальзыванием (колесо «буксует»).

**Задание 1.** Сложение взаимно перпендикулярных прямолинейных движений

Результат сложения прямолинейных движений с постоянными скоростями достаточно очевиден: траектория будет прямой линией в пространстве. Ее наклон определится соотношением численных значений скоростей  $V_x$  и  $V_y = V_r$ .

Случай движения с  $V_x = \text{const}$  и  $a_y = a_r = \text{const}$  рассмотрен во введении: траектория представляет собой параболу.

Что касается сложения движений с равными по величине ускорениями, то можно предвидеть прямолинейную форму результирующей траектории. Если ускорения различны, то траектория будет представлять собой кривую, отличающуюся от параболы.

### 1.1. Сложение движений с равными скоростями

Введите значения параметров моделирования:

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 100 \text{ см}; \quad V_x = 10 \text{ см/с}; \quad a_x = 0; \quad r_0 = 0; \\ V_r = 10 \text{ см/с}; \quad a_r = 0; \quad \omega = 0; \quad t_{\text{max}} = 10 \text{ с}; \quad dt = 0,1 \text{ с}.$$

*Пределы по осям координат: по оси  $x$  – от 0 до 200 см; по оси  $y$  – от 0 до 100 см; по оси  $x, y$  для временной зависимости координат – от 200 см до 200 см.*

Кнопкой «старт» запустите расчет и построение траектории на экране компьютера. Вследствие равенства скоростей  $V_y$  (она же  $V_r$ ) и  $V_x$ , траектория будет отрезком прямой линии, направленным под углом  $45^\circ$  к осям координат.

### 1.2. Случай движения с различными ускорениями

Без очистки поля экрана установите  $a_y$  (она же  $a_r$ ) =  $5 \text{ см/с}^2$  и получите на экране компьютера криволинейную траекторию как результат сложения прямолинейных перемещений. Это будет ветвь кривой, обращенная вниз. Затем введите  $a_x = 5 \text{ см/с}^2$ ,  $a_r = 5 \text{ см/с}^2$  и убедитесь, что в случае равенства ускорений траектория будет отрезком прямой с таким же наклоном, как и в случае 1.1.

1.3. Поменяйте значения ускорений:  $a_r = 0$ ,  $a_x = 5 \text{ см/с}^2$  и получите траекторию для случая  $a_x > a_y$ . Зарисуйте в отчет все траектории, полученные в заданиях 1.1–1.3, указав номера кривых и пояснив в подписи под рисунком, какие номера каким значениям скоростей и ускорений соответствуют. Обратите внимание на кривизну траекторий (в какую сторону «выгнута» траектория) в случаях неравенства ускорений по

осей координат. В начале движения (при малых значениях времени) во всех случаях траектории почти совпадают с прямой.

**Задание 2.** Сложение вращательного и радиального движений

### 2.1. Вращательное движение

Введите значения параметров:

$$x_0 = 50 \text{ см}; \quad y_0 = 50 \text{ см}; \quad V_x = 0; \quad a_x = 0; \quad r_0 = 50 \text{ см}; \\ V_r = 0; \quad a_r = 0; \quad \omega = 1 \text{ рад/с}; \quad t_{\max} = 10 \text{ с}; \quad dt = 0,1 \text{ с}.$$

*Пределы по осям координат: по оси  $x$  – от 0 до 200 см; по оси  $y$  – от 0 до 100 см; по оси  $x, y$  для временной зависимости координат – от 200 см до 200 см.*

Без движения точки по радиусу диска Вы получите траекторию в виде окружности. Обратите внимание, что зависимости координат  $x$  и  $y$  от времени (представленные на верхнем координатном поле) в данном случае представляют собой синусоиды.

### 2.2. Сложение радиального и вращательного движений

Введите значение радиальной скорости  $V_r = 10$  м/с.

Зарисуйте форму траектории движения по кругу и для случая вращения с равномерным движением по радиусу диска (спираль Архимеда).

Очевидно, что при ускоренном движении по радиусу спираль будет достигать центра диска еще быстрее, по более «крутой» спирали. Какой должна быть форма спирали для замедленного движения по радиусу диска?

Проверьте Ваши ожидания, введя ускорение  $a_r = -1 \text{ см/с}^2$  и получив результат на экране компьютера. Дополните рисунок в отчете и опишите своими словами процесс движения в этом случае.

**Задание 3.** Сложение прямолинейного поступательного движения диска и его вращения

Введите значения параметров:

$$x_0 = 0 \text{ см}; \quad y_0 = 50 \text{ см}; \quad a_x = 0; \quad r_0 = 50 \text{ см}; \\ V_r = 0; \quad a_r = 0; \quad \omega = 1 \text{ рад/с}; \quad t_{\max} = 15 \text{ с}; \quad dt = 0,1 \text{ с}.$$

*Пределы по осям координат: по оси  $x$  – от 0 до 600 см; по оси  $y$  – от 0 до 100 см; по оси  $x, y$  для временной зависимости координат – от 400 см до 400 см.*

Рассчитайте по формуле (1.7) значение скорости  $V_{x0}$ , которая соответствует движению диска без проскальзывания, для  $\omega = 1$  рад/с и  $r = 50$  см. Установив это значение для горизонтальной скорости, Вы получите на экране циклоиду. Зарисуйте траекторию в отчет, начиная



от максимума кривой и обращая внимание на резкое изменение формы в самой нижней точке траектории.

Введите  $V_x$  в два раза меньшее, чем рассчитанное значение  $V_{x0}$ , и без очистки экрана постройте траекторию, которая носит название удлиненной циклоиды, или трохойды.

Затем постройте траекторию для горизонтальной скорости центра диска в полтора раза больше, чем для движения диска без проскальзывания. Движению с проскальзыванием (юзом) отвечает траектория укороченной циклоиды. Дополните рисунок в отчете полученными траекториями.

*Обратите внимание:* по подобным траекториям могут двигаться заряженные частицы в совмещенных магнитном и электростатическом полях. Форму трохойды имеет также траектория точки на реборде колеса вагона поезда. В некоторый интервал времени она движется в сторону, обратную ходу поезда.

#### **Задание 4. Сложение двух вращательных движений**

Чтобы получить сложение вращательных движений, перейдите к части 2, активировав соответствующую экранную клавишу.

4.1. Введите значения параметров:

$$R_0 = 60 \text{ см}; R = 10 \text{ см}; r = 10 \text{ см}; V_c = 1 \text{ см/с}; t_{\max} = 40 \text{ с}; dt = 0,1 \text{ с}.$$

*Пределы по осям координат: от  $-100$  см до  $100$  см.*

Последовательно изменяя значения радиуса колеса  $R$  и положения точки на радиусе колеса  $r$  по ряду значений  $R = r = 10 \text{ см}; 12 \text{ см}; 15 \text{ см}; 20 \text{ см}$ , сравните форму получаемых эпициклоид. Без зарисовки графиков опишите, как изменяются траектории в зависимости от величины отношения  $R_0 / R$ . Объясните полученные результаты, вспомнив формулу для длины окружности. Запишите в отчет, равенство каких отрезков должно выполняться, чтобы траектория представляла собой целое число эпициклоид.

4.2. Введите значения параметров:  $R_0 = 60 \text{ см}; R = 12 \text{ см}; r = 12 \text{ см}$ .

Без очистки экрана сопоставьте формы траекторий для различных значений  $r = 12 \text{ см}; 4 \text{ см}$  и  $20 \text{ см}$ . Без зарисовки графиков опишите отличие укороченной эпициклоиды от удлиненной.

#### **Самостоятельная работа**

Исследуйте изменения формы гипоциклоид от соотношения величин  $R_0, R$  и  $r$ .

*Указание.* Для получения гипоциклоид значения  $R$  должны быть отрицательными.

## 2. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА В ОДНОРОДНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

**Цель работы:** изучение закономерностей движения тела в однородном поле тяготения с учетом силы сопротивления движению и выталкивающей силы Архимеда.

### *Основные положения*

Бросание камней использовалось человеком для охоты и в военных целях с глубокой древности. Опытные пращники сбивали птиц на лету. Простейшая праща представляет собой сложенную вдвое веревку, охватывающую камень. Изображения воинов и схема бросания показаны на рис. 2.1. Более мощные античные баллисты бросали каменные ядра массой 4–8 кг с начальной скоростью до 40 м/с по той же схеме.



*Рис. 2.1. Изображения воинов с пращей и схема бросания*

Появление огнестрельного оружия стимулировало исследование траектории движения пуль и пушечных ядер. Предшественником Галилео Галилея в изучении движения тел в поле тяготения Земли был Николо Тарталья, экспериментально изучавший в 1537 г. дальность полета ядер в зависимости от величины угла, под которым направлялся к горизонту ствол пушки. Г. Галилей первым установил независимость ускорения свободного падения тел на Землю от величины массы тела. Но только с появлением динамики И. Ньютона оказалось возможным теоретическое описание движения тел, брошенных под углом к горизонту.

Это движение рассматривается как частный случай движения в однородном силовом поле – поле силы тяжести. В нем в каждой точке пространства на тело действует постоянная по величине и направлению сила  $F = mg$ . При этом ускорение свободного падения  $g$  приобретает физический смысл напряженности гравитационного поля.

В общем случае движения тела, брошенного под углом к горизонту, на него действуют также выталкивающая сила Архимеда  $F_a$  и сила сопротивления движению  $F_t$  (см. рис. 2.2). Вследствие кратковременности процессов полета брошенных тел, по сравнению с периодом суточного вращения Земли, действие силы Кориолиса здесь не учитывается.

В процессе движения в каждой точке траектории вектор скорости направлен вдоль касательной к траектории по направлению движения. Сила сопротивления движению  $\vec{F}_t$  имеет обратное направление и изменяется как по величине, так и по направлению в соответствии с изменением вектора скорости.

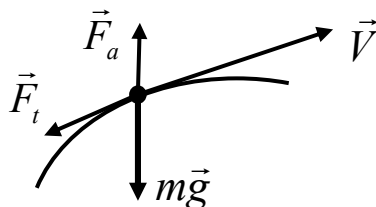


Рис. 2.2. Схема действующих сил

Величина силы Архимеда определяется плотностью среды, в которой происходит движение, величиной объема среды (жидкости или газа), вытесненной телом, и значением ускорения свободного падения. Если объем тела выразить через его массу  $m$  и плотность  $\rho_t$ , то можно записать:

$$F_a = \rho_c \frac{m}{\rho_t} g, \quad (2.1)$$

где  $\rho_c$  – плотность среды, в которую тело считается погруженным полностью.

Как и для силы тяжести, поле силы Архимеда вблизи поверхности Земли можно считать однородным. При этом, согласно *принципу независимости действия сил различной физической природы на тело*, можно рассматривать суммарное силовое поле. Для суперпозиции двух полей ускорение падения будет определяться выражением:

$$a_y = \frac{mg - F_a}{m} = \frac{mg - mg(\rho_c / \rho_t)}{m} = g\left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_t}\right). \quad (2.2)$$

Если выполняется условие  $\rho_t = \rho_c$ , то тело оказывается в условиях невесомости; когда  $\rho_t > \rho_c$ , тело падает вниз; в противном случае тело будет всплывать. Для газовых сред  $\rho_t \gg \rho_c$  и величина ускорения  $a_y \cong g$  практически мало отличается от ускорения свободного падения в вакууме.

В отсутствие сил сопротивления движению сложение двух прямолинейных движений, равномерного по горизонтали и равноускоренного по вертикали, приводит к симметричной криволинейной траектории – параболе.

При относительно небольших скоростях движения тела сферической формы величина силы сопротивления движению в среде  $F_t$  прямо пропорциональна величине скорости движения  $V$ , радиусу сферы  $r$  и коэффициенту кинематической вязкости  $\eta$  (коэффициенту внутреннего трения):

$$F_t = 6\pi\eta Vr . \quad (2.3)$$

Формула Стокса (2.3) остается справедливой, если выполняется условие ламинарного режима обтекания тела средой, в альтернативном случае турбулентного режима сила сопротивления движению становится пропорциональна квадрату скорости тела. Нелинейные эффекты турбулентного режима сопротивления движению тела можно описать зависимостью вида

$$F_t = F_S (1 + K_{m\bar{o}} F_S) , \quad (2.4)$$

где  $F_S$  – сила Стокса, определяемая по формуле (2.3),

$K_{m\bar{o}}$  – коэффициент турбулентности, характеризующий режим обтекания тела средой. Очевидно, что при  $K_{m\bar{o}} = 0$  режим обтекания будет ламинарным.

Под действием значительной силы сопротивления  $F_t$ , особенно в турбулентном режиме, движение по горизонтали становится замедленным, с переменной величиной ускорения  $a_x < 0$ . Ускорение падения (или подъема) также становится переменным, и тогда сложно получить аналитическое выражение для несимметричной криволинейной траектории. В таких случаях для расчета траекторий движения тел необходимо использовать компьютер.

## ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

В настоящей работе производится компьютерное моделирование движения тел сферической формы, изготовленных из различных материалов: углерода, алюминия и железа.

Режим обтекания тела средой задается значением коэффициента  $K_{m\bar{o}}$ . Сравниваются три среды: воздух, минеральное масло и вода. Вещества и среды приведены в перечнях по возрастанию их плотности. Минеральное масло обладает большим значением коэффициента кинематической вязкости, чем вода, при сравнимом с водой значении плотности.

При анализе формы траекторий движения, представленных на экране компьютера, и при их зарисовке в отчет обращайтесь внимание на величины максимального подъема, радиуса кривизны в области максимума, горизонтального перемещения до падения на поверхность Земли, а также на симметрию (или несимметрию) кривой относительно точки максимального подъема.

### **Задание 1.** Мысленный эксперимент (подготовка к работе)

Представьте себе ситуацию, когда одно и то же тело бросают с одинаковой начальной скоростью под одинаковым углом к горизонту в перечисленных трех средах. Запишите в отчет, в какой из сред тело поднимется на наибольшую высоту и пролетит на максимальное расстояние по горизонтали. Как повлияет материал, из которого изготовлен шар, на величину его подъема и перемещения по горизонтали в этих средах? Поясните Ваш выбор.

### **Задание 2.** Компьютерный эксперимент

#### 2.1. Движение в газообразной среде

Введите следующие численные значения параметров моделирования:

Среда – воздух,  $\rho_c = 1,27 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$ ;  $\eta = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$ ;  $\sigma = 0$ ;

Тело – уголь,  $\rho_T = 1,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ; радиус тела  $r = 0,1 \text{ м}$ ;

$V_0 = 20 \text{ м/с}$ ;  $\alpha = 65^\circ$ ;  $H_0 = 0$ ;  $K_{mб} = 0$ ;  $MT = 20 \text{ с}$ ;  $dT = 0,02 \text{ с}$ .

Кнопкой «старт» запустите расчет и построение траектории на экране компьютера. Без очистки поля экрана выберите тело «алюминий»,  $\rho_T = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , и получите траекторию движения. Затем повторите действия для материала «железо»,  $\rho_T = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Как видно из результатов моделирования, траектории тел одинакового размера совпадают, независимо от величины их массы.

Обратите внимание на линейное изменение вертикальной компоненты скорости (представленное на нижнем координатном поле) и на равенство вертикальной скорости в момент падения на поверхность Земли (по модулю) вертикальной компоненте скорости броска тела с поверхности Земли. Это следствие закона сохранения механической энергии в данной среде.

#### 2.2. Движение в жидкой среде

Измените среду, выбрав воду,  $\rho_c = 1000 \text{ кг/м}^3$ ;  $\eta = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$ .

Повторите расчет, меняя последовательно уголь на алюминий и на железо. Зарисуйте в отчет все траектории, полученные в задании 2.1 и 2.2, указав номера кривых и пояснив в подписи под рисунком, какие номера каким материалам и средам соответствуют. Зарисовку графиков начинайте от положения максимума кривой, отражая симметрию или отклонения от нее двух ветвей траектории. Обратите внимание на то, что графики изменения вертикальной скорости в жидкости идут с меньшим наклоном, чем в воздухе.

#### 2.3. Движение в жидкой вязкой среде

Выберите среду – минеральное масло,  $\rho_c = 980 \text{ кг/м}^3$ ;  $\eta = 0,66 \text{ Па}\cdot\text{с}$ .

Очистите поле экрана и получите последовательно семейство траекторий движения для трех заданных материалов. Зарисуйте полученные зависимости в отчет по работе, указав номера кривых и пояснив в подписи под рисунком, каким конкретным материалам соответствуют номера кривых.

#### 2.4. Обсуждение полученных результатов

Прежде всего, опишите своими словами форму наблюдаемых траекторий, оценивая их подобие для различных условий движения и сопоставляя форму траекторий с формой параболы. В каких условиях согласуются полученные результаты с заключением Г. Галилея о независимости движения тел от их массы в поле тяготения Земли?

Объясните, к каким результатам приводит действие силы Архимеда и силы сопротивления движению. Обратите внимание на то, что в воде наблюдается равенство вертикальных компонент скоростей бросания и падения на поверхность Земли. Какие выводы следуют из этого сравнения в отношении величины кинетической энергии тела в данной среде? Каким выражением будет определяться максимальная высота подъема тела для движения в воде?

Поясните, почему для железа наблюдаются наименьшие изменения формы траектории движения в разных средах.

Сравнив формулы зависимости сил сопротивления движению и выталкивающей силы от величин скорости движения и от размеров тел, сделайте вывод о том, как можно изменить для данной среды их соотношение.

#### **Задание 3.** Исследование соотношения действующих сил

3.1. Выберите среду – минеральное масло,  $\rho_c = 980 \text{ кг/м}^3$ ;  $\eta = 0,66 \text{ Па}\cdot\text{с}$ . Тело – углерод;  $V_0 = 25 \text{ м/с}$ . Получите на экране семейство траекторий для значений радиуса тела:

$$r = 0,2 \text{ м}; \quad r = 0,15 \text{ м}; \quad r = 0,1 \text{ м}; \quad r = 0,05 \text{ м}.$$

Для сравнения получите траекторию движения в воздухе, где при заданной скорости практически нет зависимости формы траектории от размеров тела. Зарисуйте полученные результаты в отчет.

3.2. Опишите изменения формы траекторий при уменьшении размера движущегося тела. Сравните положения максимумов, крутизну роста и спада ветвей траекторий, углы падения.

Отметьте практически линейное уменьшение  $V_y$  на нижнем экранном поле, что свидетельствует о постоянстве величины ускорения  $a_y$  (торможения для восходящей ветви траектории). Сравните наклон графиков скорости, полученных для движения в масле при различных раз-

мерах тела, с наклоном для свободного падения тела с ускорением  $a_y = g$  в воздухе.

Обратите внимание, что для самого малого радиуса тела наклон графика вертикальной скорости оказывается круче, чем для свободного падения. Это значит, что в таком случае величина  $a_y > g$ .

3.3. Для обсуждения полученных результатов изобразите в отчете схему действующих сил для точки на восходящей ветви траектории (см. рис. 2.2) и разложите силу трения на вертикальную и горизонтальную компоненту.

Затем запишите выражение для вертикальной составляющей ускорения с учетом силы Архимеда и вертикальной компоненты силы сопротивления движению. Сформулируйте условия, при которых величина  $a_y$  может стать больше величины ускорения свободного падения  $g$ .

3.4. Методом подбора найдите такое значение радиуса тела, при котором график его вертикальной скорости будет идти точно по графику, полученному для случая свободного падения тела в воздухе. Запишите в отчет это критическое значение, при котором выталкивающая сила и сила сопротивления движению взаимно компенсируют друг друга (при подъеме тела).

#### **Задание 4.** Исследование влияния скорости бросания

4.1. Выберите среду – минеральное масло.

Тело – углерод. Радиус тела  $r = 0,1$  м;  $\alpha = 45^\circ$ .

Получите на экране семейство траекторий для значений начальной скорости тела:

$$V_0 = 10 \text{ м/с}; V_0 = 20 \text{ м/с}; V_0 = 30 \text{ м/с}; V_0 = 40 \text{ м/с}.$$

4.2. Без зарисовки траекторий опишите словами изменение формы кривых при увеличении скорости. Ответьте письменно на вопрос: можно ли из асимметрии формы траектории сделать вывод, что падение тела после прохождения максимума происходит с большей скоростью, чем при подъеме к максимуму?

4.3. Обратите внимание на графики изменения вертикальной скорости тела в рассматриваемых случаях. Все графики изменения вертикальной скорости идут с меньшим наклоном, чем для случая свободного падения. Какой вывод из этого следует в отношении величины  $a_y$  по сравнению с величиной  $g$ ?

Сделайте сравнения величин вертикальных компонент скорости в моменты броска и падения на поверхность Земли. Объясните, почему не выполняется закон сохранения механической энергии в данном случае.

**Самостоятельная работа** (в асинхронном режиме, по выбору студентов)

- Исследование дальности полета в зависимости от угла бросания

Методом проб найдите величину угла бросания, при котором для значения коэффициента турбулентности  $K_{тб} = 0$  и при фиксированном значении начальной скорости  $V_0$  дальность полета тела в минеральном масле будет наибольшая.

- Исследование дальности полета в зависимости от режима обтекания тела средой

Исследуйте зависимость геометрической формы траекторий от величины коэффициента турбулентности  $K_{тб}$  для движения тела (материал – углерод) в машинном масле.

Рекомендуемые параметры: радиус тела  $r = 0,1$  м;  $\alpha = 45^\circ$ ;

$V_0 = 50$  м/с;  $MT = 20$  с;  $dT = 0,02$  с;  $K_{тб} = 0; 0,1; 0,2; 0,5$ . Максимальное значение шкалы скорости  $V_y = 64$  м/с.

Обратите внимание на график изменения вертикальной компоненты скорости в случае отличного от нуля значения коэффициента турбулентности. На каком этапе движения тела величина скорости изменяется во времени нелинейно?

Опишите в отчете, как переход к турбулентному режиму обтекания тела изменяет размеры траектории и ее форму.

Как быстро турбулентный режим сменяется ламинарным?

В каком случае – ламинарном или турбулентном режиме – больше выражена асимметрия формы траектории движения тела в вязкой среде?

- Аналитическое описание движения тела в жидкости для случая ламинарного обтекания тела средой ( $K_{тб} = 0$ )

С учетом силы сопротивления движению найдите выражение для высоты вертикального подъема тела в вязкой жидкости, полагая, что при этом скорость тела сферической формы линейно уменьшается от значения, соответствующего начальной скорости  $V_0$ , до нуля (это видно на графиках изменения вертикальной компоненты скорости тела). Поэтому при расчете работы такой силы на пути  $h$  можно взять среднее арифметическое значение из указанных величин.



### 3. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЯХ

**Цель работы:** установить закономерности движения заряженных частиц в однородных магнитном и электрическом полях.

#### Основные положения

В однородном стационарном магнитном поле на движущуюся заряженную частицу действует сила Лоренца  $F = q [V\mathbf{B}]$  или в скалярной форме записи

$$F = q V B \sin(\alpha) = q V_{\perp} B, \quad (3.1)$$

где  $q$  – заряд частицы;

$V$  – скорость влета частицы в область магнитного поля;

$V_{\perp}$  – составляющая скорости влета, перпендикулярная вектору  $\mathbf{B}$ ;

$B$  – индукция магнитного поля;

$\alpha$  – угол между векторами  $V$  и  $\mathbf{B}$ .

Сила Лоренца всегда играет роль центростремительной силы, удерживающей тело на криволинейной траектории, в самом общем случае имеющей форму спирали. Шаг спирали определяется составляющей скорости влета  $V_{\parallel}$ , которая направлена параллельно вектору индукции поля  $\mathbf{B}$ :

$$V_{\parallel} = V \cos(\alpha) = V \sin(90 - \alpha). \quad (3.2)$$

Как известно, Земля обладает магнитным полем, поэтому заряженные частицы, попадающие из космического пространства в область магнитосферы, движутся по различным траекториям, в зависимости от массы и электрического заряда частицы, от величины и направления скорости движения и от величины индукции магнитного поля в разных частях магнитосферы Земли (рис. 3.1).

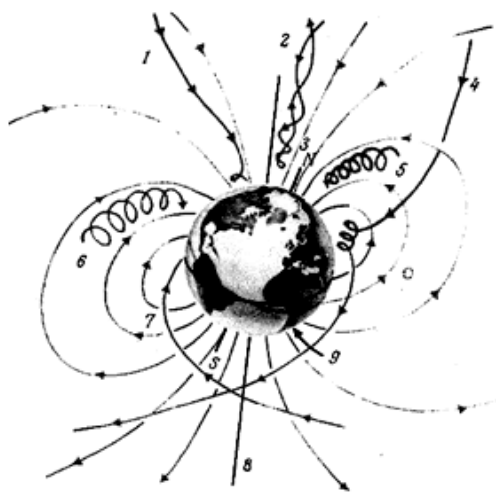


Рис. 3.1. Траектории движения протонов различных энергий в магнитосфере Земли

В электрическом поле на заряженную частицу действует сила пропорциональная заряду частицы и величине напряженности поля,

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}, \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{E}$  – величина вектора напряженности электрического поля.

В однородном электрическом поле заряженные частицы движутся прямолинейно и ускоренно, причем отрицательно заряженные движутся против направления вектора  $\mathbf{E}$ .

В области суперпозиции магнитного и электрического полей заряженные частицы движутся под действием двух независимо действующих сил и траектория движения зависит от направления вектора скорости  $\mathbf{V}$  по отношению к векторам  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , а так же от взаимной ориентации векторов напряженности и индукции.

### ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

В данной работе вычисляются и отображаются на экране компьютера в координатных осях  $XOZ$  траектории движения двух заряженных частиц, вторая из которых (ее траектория выделяется красным цветом) несет в два раза больший заряд, чем первая. Вследствие малости массы частиц силами гравитации пренебрегаем. Движение рассматривается в условиях вакуумной камеры, без потерь на сопротивление движению и излучение электромагнитных волн.

**Задание 1.** Определение зависимости радиуса траектории от величины заряда частицы

Установите, переходя от одного параметра к другому с помощью клавиш «вверх» и «вниз», численные значения следующих параметров:

$$q = 1e; \quad m = 8 \text{ а.е.м.}; \quad V_0 = 1 \cdot 10^5 \text{ м/с}; \quad \alpha = 90^\circ; \quad B_0 = 10 \text{ мТ};$$

$$KB = 0; \quad E_y = 0; \quad E_z = 0; \quad MG = 1; \quad MV = 1; \quad DT = 1 \text{ нс}; \quad T_m = 0,5 \text{ мкс.}$$

1.1. Устанавливая последовательно значения электрического заряда  $q = 1, q = 3, q = 4, q = 5$ , получите траектории движения частицы при влете в магнитное поле под углом  $90^\circ$  к вектору индукции. Каждый раз производите с помощью обычной линейки с миллиметровыми делениями измерения (по горизонтали) диаметра окружности, по которой движется частица с известным значением заряда  $q$  и заполняйте табл. 3.1.

Таблица 3.1

Значения радиуса траектории как функции заряда частицы

$q$ , ед. заряда электрона	1	2	3	4	5	6	8	10
$R$ , отн.ед. (мм)								
$qR$ , отн. единицы								

*Указание.* Помните, что значение заряда для траектории красного цвета в два раза больше, чем для траектории белого цвета.

1.2. По данным табл. 3.1 постройте в отчете график зависимости  $R = f(q)$ . Какой математической функцией можно описать полученную зависимость? Для проверки гипотезы об обратно пропорциональной зависимости радиуса траектории от величины заряда частицы сравните для всех ячеек табл. 3.1 величины произведения  $qR$ . Если величина произведения окажется одинаковой (с учетом ошибки измерений), то гипотеза будет подтверждена.

**Задание 2.** Определение зависимости радиуса траектории от величины массы частицы

Измените значения параметров  $q = 1e$ ;  $m = 1$  а.е.м. Остальные величины оставьте без изменений. Устанавливая значения массы частицы по ряду значений, указанных в табл. 3.2, получите соответствующие траектории и произведите измерения диаметров окружностей, отвечающих траекториям частицы с установленным зарядом (только белого цвета), последовательно заполняя табл. 3.2.

Таблица 3.2

Значения радиуса траектории как функции массы частицы

$m$ , ед. атомной массы	1	2	3	4	5	6	7	8
$R$ , отн.ед. (мм)								

По данным табл. 3.2 постройте в отчете график функциональной зависимости  $R = f(m)$ . Запишите, какой зависимостью можно описать полученные результаты.

**Задание 3.** Определение зависимости радиуса траектории от величины индукции магнитного поля

Измените значение параметров:

$$m = 8 \text{ а.е.м.}, V_0 = 0,1 \cdot 10^5 \text{ м/с}, T_m = 4 \text{ мкс.}$$

Устанавливая значения индукции магнитного поля по ряду значений, указанных в табл. 3.3, получите соответствующие траектории и произведите измерения диаметров окружностей, последовательно заполняя ячейки табл. 3.3.

Таблица 3.3

Значения радиуса траектории как функции индукции поля

$B$ , мТ	1	2	3	4	5	6	7	8
$R$ , отн.ед. (мм)								

Сравните численные значения радиусов траекторий в табл. 3.3 и в табл. 3.1. Какой вывод следует из сравнения двух зависимостей в отношении функции  $R = f(B)$ ? Какой функциональной зависимостью следует описывать зависимость радиуса траектории от величины индукции магнитного поля? Запишите Ваши выводы в отчет.

**Задание 4.** Определение зависимости радиуса траектории от величины скорости влета  $V_{\perp}$  частицы в магнитное поле

Введите значение  $B = 50$  мТ. Изменяя величину скорости влета частицы в магнитное поле по ряду значений табл. 3.4, получите траектории движения частицы и произведите измерения диаметра соответствующих траекторий. Заполните ячейки табл. 3.4.

Без построения графика, сопоставляя, как изменяется величина радиуса при кратном увеличении скорости влета, определите характер зависимости  $R = f(V_{\perp})$ . Вывод запишите в отчет.

Таблица 3.4

Значения радиуса траектории как функции скорости  $V_{\perp}$

$V_{\perp}, 10^5$ м/с	1	2	3	4	5	6
$R$ , отн.ед. (мм)						

Сделайте обобщение результатов, полученных в заданиях 3.1–3.4, и запишите в отчет общую формулу, выражающую зависимость величины радиуса траектории заряженной частицы в магнитном поле от массы, заряда частицы, ее скорости и индукции магнитного поля.

**Задание 5.** Определение зависимости шага траектории от величины угла влета частицы в магнитное поле

Установите значение  $V_0 = 1 \cdot 10^5$  м/с. Значения остальных параметров остаются без изменений.

В соответствии с рядом значений угла влета, приведенным в табл. 3.5, получите соответствующие траектории движения заряженной частицы, произведите измерения величины шага спиралей и заполните ячейки табл. 3.5.

Таблица 3.5

Значения шага траектории как функции угла влета

$\alpha$ , град	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88
$L$ , отн.ед.										
$90-\alpha$ , радиан										

По полученным данным постройте график зависимости величины шага спирали  $L$  от значения угла влета частицы в магнитное поле.

Приведите в отчете объяснение, почему вместо функциональной зависимости по закону синуса (3.2) Вы получили линейную зависимость.

*Указание.* Выразите все значения угла  $(90-\alpha)$  в радианах, поделив значения разности углов  $(90-\alpha)$  в градусах на величину одного радиана, выраженную в градусах (примерно  $57^\circ$ ). Вспомните, какое приближение существует для величин синусов малых углов.

**Контрольное задание.** Зарисуйте в отчете форму траектории движения заряженной частицы в неоднородном магнитном поле, для которого величина индукции поля  $\mathbf{B}$  убывает вдоль вертикальной оси. Различно укажите на рисунке изменения радиуса и шага траектории в новых условиях. Учтите, что величина шага  $L$  прямо пропорциональна времени одного оборота (времени прохождения пути  $2\pi R$ ).

### **Самостоятельная работа**

1. Движение в сонаправленных магнитном и электрическом полях.

Установите численные значения следующих параметров:

$$q = 5e; \quad m = 8 \text{ а.е.м.}; \quad V_0 = 4 \cdot 10^5 \text{ м/с}; \quad \alpha = 90^\circ; \quad B_0 = 20 \text{ мТ}; \\ E_y = 0; \quad E_z = 400; \quad MG = 1; \quad MV = 1; \quad DT = 1 \text{ нс}; \quad T_m = 0,5 \text{ мкс}.$$

Получите траекторию движения заряженной частицы в совмещенных полях и опишите ее форму в отчете. Обратите внимание на величины радиуса спирали и ее шага (расстояния между витками спирали). Запишите, на какие простые виды движения можно разложить наблюдаемое сложное движение. Объясните, почему шаг спирали нелинейно возрастает, причем шаг красной линии меньше шага белой.

2. Траектории движения в скрещенных магнитном и электрическом полях.

Введите значения параметров:  $\alpha = 84^\circ$ ;  $E_y = 0$ ;  $E_z = -200$ .

Выбор таких значений параметров эксперимента отвечает случаю влета частицы в область магнитного и электрического полей под углом, близким к  $90^\circ$ , причем векторы индукции магнитного поля и напряженности электрического поля не параллельны (компоненты  $E_y$  и  $E_z$  являются проекциями вектора  $\mathbf{E}$  на направление вектора  $\mathbf{B}$  индукции магнитного поля). Отрицательное значение  $E_z$  означает, что эта компонента электрического поля направлена против вектора индукции магнитного поля.

Получите траекторию движения частицы и запишите, какие виды движений материальной точки Вы можете выделить в данном случае.

## 4. ГАРМОНИЧЕСКИЙ И АНГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

**Цель работы:** Установление закономерностей колебаний гармонического и ангармонического осцилляторов.

### Основные положения

Осциллятором называют физическую систему, состояния которой во времени описываются законом периодичности:

$$S(t) = S(t + T) = S(t + nT), \quad (4.1)$$

где  $n$  – целое число;

$T$  – интервал периодичности;

$S$  – один из параметров системы.

При механическом колебательном движении периодически меняющейся величиной является отклонение осциллятора от положения равновесия. В колебательном контуре величина  $S$  может обозначать силу тока или напряжение.

Наименьшая величина  $T$ , при которой выполняется условие (4.1), называется *периодом* изменения данного параметра. Периодические по времени процессы возникают в системах, имеющих положения устойчивого равновесия. Этим положениям соответствуют минимумы полной энергии системы. Для вывода системы из равновесного положения необходимо внешнее воздействие, в результате которого работа внешней силы обеспечивает возрастание энергии системы. По закону сохранения энергии, при отсутствии сил трения в замкнутой системе, колебательный процесс в ней продолжается неопределенно долгое время. В этом случае процесс называют *свободными* (или *собственными*) колебаниями осциллятора. В частном случае свободные колебания являются гармоническими, в общем случае колебания могут быть ангармоническими (нелинейными).

### Ангармонический осциллятор

Если величина силы  $F(x)$ , возвращающей осциллятор к положению равновесия, нелинейно зависит от величины смещения, то осциллятор перестает быть гармоническим. Пусть, например, величина возвращающей силы следующим образом зависит от смещения:

$$F(x) = -K_y x + K_a x^2, \quad (4.2)$$

где  $K_a$  – коэффициент ангармонизма колебаний.

Величина второго слагаемого зависит как от значения  $K_a$ , так и от величины *квадрата* отклонения от положения равновесия. Поэтому при больших отклонениях эффекты ангармонизма гораздо заметнее, чем при малых.

В этом случае функция  $U(x)$  становится более сложной, чем для гармонического осциллятора:

$$U(x) = \frac{K_y x^2}{2} - \frac{K_a x^3}{3}. \quad (4.3)$$

Зависимость потенциальной энергии от смещения в данном случае представляет собой кривую, которая несимметрична относительно вертикальной оси (рис. 4.1). Для нее, в отличие от случая гармонического осциллятора, среднее за период одного колебания положение  $x^*$  не совпадает с равновесным положением. Отклонение тем больше, чем больше величина коэффициента ангармонизма по отношению к величине коэффициента упругой силы и чем больше само значение отклонения  $x$ .

Идеальный гармонический осциллятор разорвать нельзя, так как ветви параболы уходят в бесконечность.

Ангармонический осциллятор более близок к реальным объектам и он может быть разрушен при сообщении ему кинетической энергии равной высоте потенциального барьера  $U_p$ .

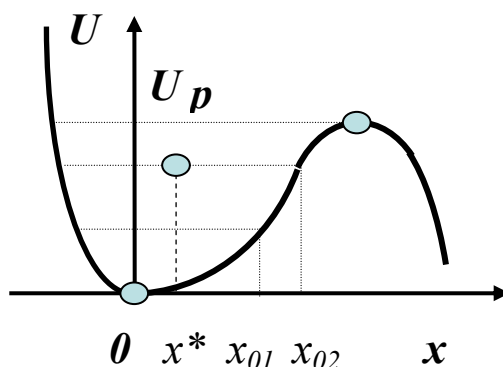


Рис. 4.1. Зависимость энергии ангармонического осциллятора от величины отклонения от равновесного положения

Кроме того, для ангармонического осциллятора от уровня начального воздействия, т. е. от величин  $x_0$  и  $V_0$ , зависят величины частот свободных и затухающих колебаний. Однако, при уменьшении амплитуды колебаний, различие между ангармоническим и гармоническим осцилляторами становится менее значимым, так как вблизи минимума  $x \ll 1$ ,  $x^3 \ll x^2$  и зависимость (4.2) мало отличается от параболы.

Ангармонический осциллятор является примером нелинейных физических объектов, к числу которых принадлежат многие реальные колебательные системы. В частности, ангармоничными являются колебания ионов в решетке кристаллов, что обуславливает тепловое расширение твердых тел. В приложении 4.1 описано использование ангармонизма колебаний для исследования эффекта Казимира.

## ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

**Задание 1.** Свободные колебания гармонического осциллятора

1.1. Установите следующие значения параметров колебаний:

$$M = 0,025 \text{ кг}; \quad x_0 = 0,15 \text{ см}; \quad V_0 = 0 \text{ м/с}; \quad K_a = 0 \text{ Н/м}^2;$$
$$K_t = 0; \quad MF = 0; \quad WF = 0; \quad MT = 1 \text{ с}; \quad dT = 0,0004 \text{ с};$$
$$X = 1 \text{ (предел шкалы по вертикали)}.$$

По формуле  $K_y = 4 \cdot \pi^2 \cdot M \cdot f^2$  рассчитайте значение  $K_y$ , соответствующее частоте, равной 4 Гц, и установите это значение.

*Указание.* Приблизительно можно принять  $4 \cdot \pi^2 = 40$ .

1.2. Последовательно изменяя величину  $x_0$  в ряду значений от 0,15 см до 0,9 см, получите семейство четырех кривых, представляющее свободные гармонические колебания. Сопоставив введенные значения начальных отклонений  $x_0$  с делениями вертикальной шкалы амплитуд (шкала  $X$ ), проверьте численные значения, представленные на экране компьютера. Так Вы произведете калибровку шкалы отклонений. Вывод запишите в отчет.

1.3. Проверьте выполнение следующих свойств гармонических колебаний:

– для гармонического осциллятора частота свободных колебаний не зависит от переданной ему энергии, т. е. от величины начального смещения от положения равновесия и/или от величины начальной скорости осциллятора;

– положительные и отрицательные значения амплитуды колебаний по абсолютной величине совпадают с величиной начального смещения.

*Примечание.* За счет накопления погрешности расчета величина амплитуды на экране может немного превышать  $x_0$  при больших временах счета.

1.4. Убедитесь, что за время, равное 1 с на шкале времени, выполняются четыре полных колебания. Тем самым Вы произведете калибровку оси времени по заданным значениям коэффициента упругости и массы (они соответствуют частоте в 4 Гц).

Запишите результаты проверки в отчет (без зарисовки графиков).

**Задание 2.** Вынужденные колебания гармонического осциллятора

2.1. Установите значения параметров:

$$K_t = 0,2 \text{ кг/с}; \quad MF = 4 \text{ Н}; \quad WF = 1 \text{ Гц}; \quad MT = 2 \text{ с}; \quad dT = 0,0004 \text{ с}.$$

Последовательно изменяя величину частоты вынуждающей силы  $WF$  по ряду значений, указанных в табл. 4.1, измерьте с помощью линейки амплитуду установившихся колебаний (ближе к правому краю экранного поля) и заполните ячейки табл. 4.1.



Имейте в виду, что при  $W=0$  будет наблюдаться затухание собственных колебаний осциллятора около смещения, вызванного постоянной силой. При действии переменной силы вынужденные колебания установятся после затухания собственных колебаний осциллятора.

Таблица 4.1

Результаты измерений для гармонического осциллятора

Частота $W$ , Гц	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
$A$ уст. колебаний, отн.ед. (мм)										

2.2. На основании полученных данных дома постройте резонансную кривую для выбранного значения коэффициента трения. Объясните, почему при совпадении частоты вынуждающей силы с частотой собственных колебаний амплитуда установившихся колебаний наибольшая.

*Указание.* Рассмотрите работу вынуждающей силы при резонансе и при отклонении от него.

**Задание 3.** Свободные колебания ангармонического осциллятора

3.1. Установите следующие значения параметров колебаний:

$$M = 0,025 \text{ кг}; \quad x_0 = 0; \quad K_y = 16 \text{ Н/м}; \quad K_t = 0; \quad MF = 0; \quad WF = 0; \\ MT = 0,5 \text{ с}; \quad dT = 0,0004 \text{ с}; \quad X = 1 \text{ (предел шкалы по вертикали);} \\ V_0 \text{ и } K_a \text{ – по Вашему варианту}$$

В табл. 4.2 или в табл. 4.3 отметьте значения начальной скорости и запишите в нее значение коэффициента  $K_a$ , которые соответствуют Вашему варианту. Последовательно изменяя величину начальной скорости в ряду значений Вашего варианта, измерьте с помощью линейки величины отклонений от равновесного положения (от горизонтальной шкалы) в противоположные стороны и заполните ячейки табл. 4.2. Для заполнения ячеек табл. 4.3 необходимо измерить по горизонтальной оси величины интервалов времени для положительной «полуволны» и для отрицательной.

*Приведите в отчете графики ангармонических колебаний для самого малого и самого большого из значений начальной скорости по Вашему варианту (не вызывающего разрыва осциллятора). Запишите в отчет, как зависят от амплитуды период и частота колебаний ангармонического осциллятора.*

3.2. Произведите обмен полученными результатами измерений с теми соседями, у которых такое же, как у Вас, значение коэффициента ан-

гармонизма. В итоге табл. 4.2 и 4.3 должны быть в максимальной мере заполнены. Укажите фамилии членов Вашей подгруппы в табл. 4.2 и 4.3.

Таблица 4.2

Результаты измерений для амплитуд колебаний

$V_0$ , м/с	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10	11	12	13	14	15	16	17	
$A_1 > 0$ , отн.ед.														$Ka =$
$A_2 < 0$ , отн.ед.														Данные (ФИО)
$A_{\text{ср.ар.}}$ , отн.ед.														

Таблица 4.3

Результаты измерений для полупериодов колебаний

$V_0$ , м/с	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
$t_1$ , отн.ед.														$Ka =$
$t_2$ , отн.ед.														Данные (ФИО)
$T = t_1 + t_2$ , отн.ед.														

3.3. По совокупности данных табл. 4.2 и 4.3 Вашей подгруппы постройте дома графики зависимостей максимального отклонения от положения равновесия  $A_1 > 0$ , отн.ед., и среднего положения осциллятора  $A_{\text{ср.арифм.}} = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$ , отн.ед., от величины начальной скорости.

На другом рисунке приведите зависимости от начальной скорости величин периода колебаний  $T$ , отн.ед., и интервалов времени для положительного отклонения от положения равновесия  $t_1$ , отн.ед.

Запишите в отчет выводы, к которым приводит Вас анализ полученных результатов и их обсуждение в рамках подгруппы.

**Задание 4.** Затухающие колебания ангармонического осциллятора

4.1. Установите параметры, соответствующие наибольшей начальной скорости по Вашему варианту. Дополнительно введите:

$$K_t = 0,1 \text{ кг/с}; \quad MT = 1,0 \text{ с}; \quad dT = 0,0004 \text{ с.}$$

Зарисуйте полученную зависимость в отчете.

4.2. Опишите своими словами асимметрию формы ангармоничных колебаний при наибольшем размахе колебаний. Для этого сравните величины отклонений от равновесного положения в противоположные

стороны и интервалы времени, потребные для альтернативных отклонений. Опишите также, какие изменения формы зависимости  $x(t)$  происходят по мере затухания колебаний. Используя зависимость энергии ангармонического осциллятора от смещения (см. рис. 4.1), поясните причину происходящих изменений.

### Самостоятельная работа

1. Поиск резонанса для ангармонического осциллятора.

Экспериментально проверьте при различных частотах вынуждающей силы и значениях коэффициента трения возможность явления резонанса для ангармонического осциллятора.

2. Теоретический анализ зависимости  $U(x)$ .

Используя зависимость (4.2) найдите координату и величину экстремума (потенциального барьера)  $U_p$  в аналитическом виде. Таким путем Вы определите, от каких параметров осциллятора и в какой мере зависят амплитуда разрыва и величина потенциального барьера разрушения ангармонического осциллятора.

Таблица 4.4

Варианты индивидуальных заданий

Подгруппа	№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
1	1	A		+		+		+		+		+		+	+				$Ka = 16 \text{ Н/м}^2$
	2	T		+		+		+		+		+		+					$Ka = 16 \text{ Н/м}^2$
	3	A	+		+		+		+		+		+	+	+				$Ka = 16 \text{ Н/м}^2$
	4	T	+		+		+		+		+		+	+					$Ka = 16 \text{ Н/м}^2$
2		№	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17				
	1	A	+		+		+		+		+		+		+				$Ka = 12 \text{ Н/м}^2$
	2	T	+		+		+		+		+		+		+				$Ka = 12 \text{ Н/м}^2$
	3	A		+		+		+		+		+		+		+			$Ka = 12 \text{ Н/м}^2$
3		№	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17				
	1	A	+	+		+		+	+	+									$Ka = 20 \text{ Н/м}^2$
	2	T	+	+		+		+	+										$Ka = 20 \text{ Н/м}^2$
	3	A	+		+	+	+		+	+									$Ka = 20 \text{ Н/м}^2$
4		№	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17				
	1	A		+			+		+		+		+		+				$Ky = 20 \text{ Н/м}^2$
	2	T		+			+		+		+		+		+				$Ka = 16 \text{ Н/м}^2$
	3	A	+		+	+	+	+	+										$Ka = 20 \text{ Н/м}^2$
4	4	T	+		+	+	+	+	+										$Ky = 16 \text{ Н/м}^2$

### Ангармонизм колебаний доказывает реальность сил Казимира

Эффект Казимира показывает, что в физическом вакууме происходят непрекращающиеся флуктуации различных квантовых полей, в том числе и электромагнитного поля. Если мы поместим в вакуум два незаряженных проводника, то они своим присутствием искажат эти флуктуации, что приведет к возникновению силы между проводниками.

Микроустройство, на характеристики которого оказывали влияние силы Казимира, представляло собой прямоугольную пластинку, свободно положенную на два тонких провода. Пластинка могла наклоняться в обе стороны относительно проводов, образуя крутильный маятник. Под обоими крыльями пластинки были расположены два электрода. Подавая на один из электродов переменное напряжение, можно было приводить маятник в движение, а путем измерения емкости между вторым электродом и пластинкой можно было определять угол ее отклонения. Дополнительное же возмущение, вызываемое эффектом Казимира, приносилось в систему с помощью проводящей сферы, расположенной на некотором расстоянии от одного из крыльев верхней пластинки.

Подавая на управляющий электрод переменный потенциал, измеряли величину амплитуды колебаний как функцию частоты вынуждающей силы. В отсутствие возмущающей сферы эта зависимость имела четкий симметричный резонансный профиль. В присутствии сферы эффект Казимира вносил ангармоничную поправку. На рис. П1 показано, как сила Казимира искажает профиль потенциальной энергии для гармонического осциллятора. Как следствие этого эффекта, резонансная частота осцилляций смещалась, и наблюдался явно выраженный ангармонизм колебаний пластинки.

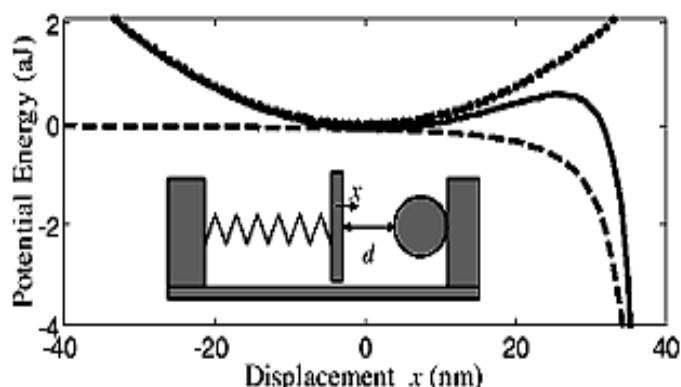


Рис. П1. Ангармонические добавки, вызванные эффектом Казимира

[www.scientific.ru/journal/news/n111101.html](http://www.scientific.ru/journal/news/n111101.html)

## 5. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ КОЛЕБАНИЙ

**Цель работы:** Знакомство с понятиями конфигурационных кривых и фазовых траекторий; анализ фазовых портретов гармонических и ангармонических колебаний

### *Основные положения*

Понятия фазового пространства и конфигурационных кривых используются во многих областях физики – в механике, оптике, термодинамике, физике твердого тела. Обычно понятие фазы вводится в механике для описания колебательного и волнового движений. В случае гармонических колебаний, закон движения которых определяется уравнением (5.1), фазой называют аргумент функции синуса (или косинуса).

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (5.1)$$

В более широком смысле слова, фаза характеризует состояние какого-либо процесса или физической системы. Если процесс зависит от векторной величины, например от скорости  $V$ , импульса  $P$  или волнового вектора  $K$ , то изменение его состояния можно представить графически в виде линии, проводимой в системе координат  $(V_x, V_y, V_z)$ ,  $(P_x, P_y, P_z)$  или  $(K_x, K_y, K_z)$ .

Оси координат в таких случаях задают фазовое пространство, т. е. область возможных значений фазы процесса. Размерность координат фазового пространства определяется размерностью той величины, которая на них отображается. По аналогии с механикой линию изменения состояния в фазовом пространстве называют **фазовой траекторией**. Совокупность реализующихся траекторий называют **фазовым портретом системы** или процесса.

В более простых случаях понятия фазового пространства и фазового портрета применяют для отображения процесса движения материальной точки в системе координат  $(x, V_x)$  или  $(x, P_x)$ . Здесь одна из координат – обычного пространства, другая определяет состояние процесса движения (его фазу) через значение исследуемой характеристики процесса или объекта. С помощью фазового портрета можно наглядным образом оценить устойчивость динамической системы к внешним возмущающим воздействиям. Например, пусть две фазовые траектории начинаются в различных точках старта, но затем сливаются в общую линию. Физически это будет означать устойчивость системы, ее малую зависимость от вариации начальных условий. Если же две фазовые траектории начинаются из близких точек, но с течением времени расходятся в отдаленные области фазового пространства, то это будет свидетельством неустойчивости системы по отношению к малым вариациям

начальных условий. В подобных случаях (они часто реализуются в метеорологии) трудно предсказать долговременное поведение процесса.

Также широко используется зависимость потенциальной энергии системы  $U$  от ее конфигурации, т. е. от взаимного расположения частей системы. В случае гармонического осциллятора эта зависимость представляется параболой в координатах  $(x, U)$ . Для более сложных случаев, например для центров окраски в кристаллах, рассматривают некоторую обобщенную (или конфигурационную) координату, характеризующую отклонение системы от положения устойчивого равновесия. В общем случае зависимость  $U(x)$  называют **конфигурационной кривой**.

Колебания реальных систем при достаточно больших отклонениях от положения равновесия оказываются ангармоничными. Для таких случаев модельными объектами, на которых изучаются закономерности движения, являются ангармонические осцилляторы. Среди них наиболее представительными являются следующие два типа.

Первый тип соответствует осциллятору с конечной величиной энергии связи частей в общую систему. Колебания осцилляторов данного типа, в сопоставлении с колебаниями осциллятора гармонического, исследуются при выполнении работы «4. Гармонический и ангармонический осциллятор».

В общем виде конфигурационная кривая  $U(x)$  для осцилляторов первого типа может быть представлена зависимостью:

$$U(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (5.2)$$

где  $n$  – **нечетное** целое число.

Второй тип ангармонического осциллятора соответствует физической системе, имеющей два положения устойчивого равновесия, разделенных энергетическим барьером  $U_b$  конечной величины. Математическим описанием конфигурационной кривой служит уравнение (5.2), где  $n$  – **четное** целое число. Качественно конфигурационная кривая такого осциллятора показана на рис. 5.1.

При выводе подобной системы из одного равновесного положения она может перейти в альтернативное положение, если величина полученной осциллятором энергии превысит значение  $U_b$ . Переход в новое положение устойчивого равновесия может сопровождаться изменением симметрии системы и, как следствие, изменением физических свойств. В качестве примера можно привести явление самопроизвольной поляризации сегнетоэлектриков, когда изменение симметрии взаимного расположения ионов приводит к появлению дипольного электрического момента в каждой элементарной ячейке кристалла.

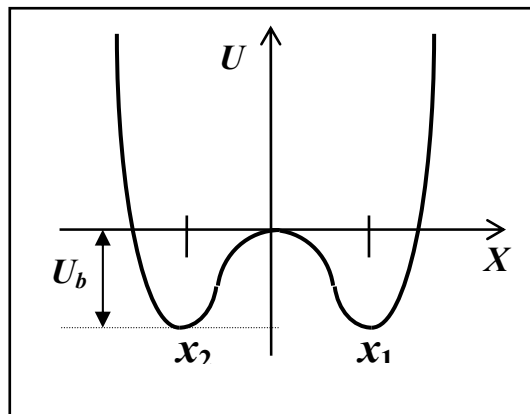


Рис. 5.1. Конфигурационная кривая осциллятора с двумя положениями равновесия

В областях отклонений от  $x_1$  и  $x_2$ , не выходящих за пределы конфигурационной кривой, периодичность колебаний сохраняется. При наличии сил трения амплитуда колебаний постепенно уменьшается. Вблизи положения устойчивого равновесия конфигурационные кривые обоих типов осцилляторов мало отличаются от параболы. Поэтому, затухающие колебания будут стремиться в пределе к гармоническим.

Вывести осциллятор из положения равновесия можно с помощью внешней периодически действующей силы (вынужденные колебания). Рассмотренные выше два типа ангармонических осцилляторов по-разному реагируют на увеличение амплитуды вынуждающей силы. В первом случае, при определенном значении амплитуды внешней силы, осциллятор аperiodически разрушается.

Принципиально новое поведение показывает ангармонический осциллятор второго типа. Здесь, при определенных условиях, может возникнуть аperiodическое колебательное движение, при котором координата  $x(t)$  изменяется сложным образом. Процесс движения выглядит так, словно осциллятор колеблется совершенно хаотически, оставаясь в то же время в некоторых пространственных «рамках».

В последнем случае фазовая траектория становится нерегулярной и переход оси  $x = 0$  на фазовом портрете будет совершаться в произвольной последовательности точек  $V(x=0)$ .

Для такого состояния системы подходит определение *детерминированный хаос*. Оно подчеркивает, с одной стороны, факт однозначной зависимости траектории движения от величины внешней силы и параметров осциллятора (детерминизм движения). С другой стороны, оно отражает факт потери строгой временной и пространственной периодичности колебаний.

Фазовые траектории для собственных и вынужденных колебаний ангармонических осцилляторов двух рассмотренных типов предлагается исследовать с помощью компьютерного моделирования.

Движение ангармонического осциллятора с одним устойчивым положением равновесия будем описывать дифференциальным уравнением:

$$m x'' = -K_y x + K_a x^2 - K_t x', \quad (5.3)$$

где обозначено:

- $x$  – координата центра масс  $m$  осциллятора;
- $x'$ ,  $x''$  – первая и вторая производные от функции смещения во времени, определяющие скорость и ускорение центра масс;
- $K_y$  – коэффициент упругой силы;
- $K_a$  – коэффициент ангармонизма;
- $K_t$  – коэффициент сил трения.

Если положить  $K_t = 0$ , то уравнение (5.3) будет описывать свободные (собственные) колебания ангармонического осциллятора первого типа. Для него можно определить положения экстремумов конфигурационной кривой, для которых величина силы обращается в ноль. Очевидны два положения:

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = K_y / K_a. \quad (5.4)$$

Первое положение соответствует устойчивому равновесию, второе неустойчивому (максимуму кривой потенциальной энергии).

Для описания движения ангармонического осциллятора второго типа, с двумя положениями устойчивого равновесия, будем использовать уравнение:

$$m x'' = K_y x - K_a x^3 - K_t x'. \quad (5.5)$$

Величина конфигурационной энергии в этом случае будет определяться выражением (5.6), которое можно получить интегрируя уравнение (5.5):

$$U(x) = \frac{K_y x^2}{2} - \frac{K_a x^4}{3}. \quad (5.6)$$

При  $K_t = 0$  равновесные положения осциллятора определяются из равенства

$$K_y x = K_a x^3,$$

откуда следует:

$$x_1 = (K_y / K_a)^{1/2}, \quad x_2 = - (K_y / K_a)^{1/2}. \quad (5.7)$$

При компьютерном моделировании колебаний осцилляторов решается уравнение движения, записанное в виде:

$$m x'' = -K_y x + K_a x^3 - K_t x' + F_0 \cos(\omega t), \quad (5.8)$$



где  $F_0$  – амплитуда вынуждающей силы,  
 $\omega$  – ее круговая частота.

Вводя *положительные* значения  $K_y$  и  $K_a$  при  $n = 2$ , мы будем описывать колебания осциллятора первого типа. Для перехода ко второму, необходимо ввести *отрицательные* значения  $K_y$  и  $K_a$  при  $n = 3$ .

## ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

### Часть 1. Конфигурационные кривые

**Задание 1.** Конфигурационные кривые ангармоничных осцилляторов с двумя положениями равновесия.

1.1. Введите значения параметров:

**$K_y$  и  $K_a$  устанавливаются по вариантам;**  $M = 0,05$  кг;  $x_0 = 0$ ;  
 $V_0 = 50$  м/с;  $K_t = 0$ ;  $AF = 0$ ;  $fF = 0$ ;  $t_{\max} = 0,2$  с;  $dT = 0,0004$  с;  
 $n = 3$ ; на голубом поле  $U(x)$ ; предел шкалы  $U(x)$  и предел шкалы  $x$  также устанавливаются в зависимости от варианта задания.

Для записи результатов измерений подготовьте в отчете таб. 5.1 и 5.2. Запишите в них значения  $K_y$  или  $K_a$ , которые предусматривает Ваш вариант задания.

Таблица 5.1

Результаты измерений параметров осциллятора в зависимости от величины коэффициента упругости

$K_y$ , Н/м;	– 10	– 20	– 30	– 40	– 50	$K_a =$ , Н/м <sup>2</sup>
$x_{\text{равн.}} \text{ отн. ед.}$						Данные получены (ФИО)
$U_b$ , отн. ед.						

Таблица 5.2

Результаты измерений параметров осциллятора в зависимости от величины коэффициента ангармонизма

$K_a$ , Н/м <sup>2</sup>	– 10	– 20	– 30	– 40	– 50	$K_y =$ , Н/м;
$x_{\text{равн.}} \text{ отн. ед.}$						Данные получены (ФИО)
$U_b$ , отн. ед.						

Последовательно изменяя величину коэффициента упругости или коэффициента ангармонизма, согласно значениям, приведенным в

табл. 5.1 и 5.2, получите на экране компьютера соответствующие конфигурационные кривые.

Зарисуйте в отчет с соблюдением масштаба три зависимости  $U(x)$  – для минимального, промежуточного и максимального значения изменяемого параметра. В подписи под рисунком укажите, каким значениям изменяемого параметра отвечают эти кривые.

Измерьте с помощью линейки величину расстояния от горизонтальной шкалы до минимума конфигурационной кривой, т. е. высоту потенциального барьера  $U_b$  между симметричными положениями равновесия (в относительных единицах измерения) для всех полученных кривых, и запишите результаты в соответствующую таблицу.

Для заполнения ячеек  $x_{\text{равн}}$  табл. 5.1 и 5.2 необходимо измерить по горизонтали расстояние между симметричными точками минимумов и поделить полученное значение пополам.

1.2. Произведите обмен полученными результатами измерений с одним из соседей, у которого заполнена таблица, альтернативная Вашей. В итоге табл. 5.1 и табл. 5.2 у Вас должны быть полностью заполнены. Укажите фамилии членов Вашей подгруппы в табл. 5.1 и 5.2. По совокупности данных таблиц постройте дома графики зависимостей величины потенциального барьера  $U_b$  от значений коэффициентов упругости и ангармонизма, а также зависимость равновесного положения  $x_{\text{равн}}$  **от корня квадратного** из значений отношения коэффициента упругости к коэффициенту ангармонизма.

1.3. При обсуждении полученных при выполнении данного задания результатов опишите качественно, что происходит с конфигурационными кривыми при изменении заданного Вам по варианту коэффициента. Отметьте, в какой мере согласуются результаты изменений равновесного положения  $x_{\text{равн}}$  с формулой (5.7), согласно которой величина равновесного положения для осциллятора второго типа *линейно* зависит от корня квадратного отношения коэффициента упругости к коэффициенту ангармонизма.

Для объяснения влияния коэффициентов  $K_y$  и  $K_a$  на величину потенциального барьера  $U_b$  между положениями равновесия подставьте выражение (5.7) в (5.6) и, произведя необходимые преобразования, получите выражение для  $U(x_{\text{равн}}) = U_b$ .

Сопоставьте наблюдаемые результаты с полученной теоретической зависимостью (в какой мере выполняется квадратичная зависимость от величины  $K_y$  и обратно пропорциональная – от величины  $K_a$ ).

## Часть 2. Фазовые портреты осцилляторов

### Задание 2. Гармонический осциллятор

#### 2.1. Введите значения параметров:

$M = 0,05$  кг;  $x_0 = 0$ ;  $V_0 = 5$  м/с;  $K_y = 10$  Н/м;  $K_a = 0$ ;  
 $K_t = 0$ ;  $AF = 0$ ;  $fF = 0$ ;  $t_{\max} = 0,45$  с;  $dT = 0,0006$  с;  
 $n = 2$ ; на голубом поле  $V(x)$ ; предел шкалы  $V(x) = 16$  м/с;  
предел шкалы  $x = 2$  м.

Физически такой выбор параметров будет означать, что свободные колебания гармонического осциллятора возбуждаются толчком с импульсом  $mV_0$  из положения равновесия. На нижнем экранном поле будет построена зависимость во времени отклонения от равновесного положения  $x = f(t)$ .

Получите фазовые траектории для  $V_0 = 5$  м/с; 10 м/с и 15 м/с. Без зарисовки фазовых траекторий опишите в отчете их форму.

2.2. Очистите поле экрана, оставьте значение начальной скорости 15 м/с и введите коэффициент трения  $K_t = 0,19$  кг/с;  $t_{\max} = 1,5$  с. Получите фазовую траекторию затухающих колебаний гармонического осциллятора. Без очистки экранного поля введите  $K_t = 0,83$  кг/с и повторите построение фазовой траектории для этого случая. Опишите изменения формы сравниваемых траекторий.

### Задание 3. Ангармонические осцилляторы – свободные колебания

#### 3.1. Свободные колебания осциллятора первого типа

Введите значения параметров:

$M = 0,05$  кг;  $x_0 = 0$ ;  $V_0 = 2$  м/с;  $K_y = 10$  Н/м;  $K_a = 10$  Н/м<sup>2</sup>  
 $K_t = 0$ ;  $AF = 0$ ;  $fF = 0$ ;  $t_{\max} = 0,75$  с;  $dT = 0,0006$  с;  
 $n = 2$ ; на голубом поле  $V(x)$ ; предел шкалы  $V(x) = 16$  м/с;  
предел шкалы  $x = 2$  м.

Получите фазовые траектории на экране компьютера для значений начальной скорости 2 м/с; 4 м/с; 6 м/с; 8 м/с; 9 м/с.

Зарисуйте в отчет форму наиболее характерных фазовых траекторий, для значений  $V_0 = 4$  м/с, 8 м/с и 9 м/с. Обратите внимание на разницу амплитуд отклонения в разные стороны от равновесного положения, тогда как максимальные значения скорости по абсолютной величине одинаковы. Оцените величину полученной осциллятором скорости  $V_{\text{кр}}$ , при которой осциллятор разрушается. Оценка  $V_{\text{кр}}$  может быть получена как среднее арифметическое значение скорости, при которой осциллятор уже разрушается, и скорости, при которой осциллятор еще не разрушается.

### 3.2. Свободные колебания осциллятора второго типа

Введите значения следующих параметров:

$M = 0,05$  кг;  $x_0 = 1$  м;  $V_0 = 5$  м/с;  $K_y = -10$  Н/м;  $K_a = -10$  Н/м<sup>2</sup>;  
 $K_t = 0$ ;  $AF = 0$ ;  $fF = 0$ ;  $t_{\max} = 0,45$  с;  $dT = 0,0006$  с;  $n = 3$ ;  
на голубом поле  $V(x)$ ; предел шкалы  $V(x) = 16$  м/с ;  
предел шкалы  $x = 2$  м.

Такой выбор параметров физически означает, что колебания ангармонического осциллятора возбуждаются толчком с импульсом  $mV_0$  из положения равновесия.

Получите фазовые траектории для значений начальной скорости  $V_0 = 5$  м/с и 9 м/с, увеличьте время счета до  $t_{\max} = 0.45$  с и получите фазовую траекторию для  $V_0 = 13$  м/с.

Зарисуйте все фазовые траектории в отчет, укажите соответствующие значения начальной скорости осциллятора, при которой они получены. Опишите своими словами, какие изменения формы траектории происходят при росте величины начальной скорости. Объясните, почему с ростом скорости форма траектории изменяется и она начинает охватывать большую область фазового пространства.

#### **Задание 4.** Затухающие колебания ангармоничных осцилляторов

Осциллятор с двумя положениями равновесия

Измените значения параметров:  $V_0 = 40$  м/с;  $K_t = 0,27$  кг/с;  
 $t_{\max} = 1,2$  с; предел шкалы  $V(x) = 32$  м/с.

Выполните моделирование для значений скорости  $V_0 = 40$  м/с,  $V_0 = 20$  м/с и  $V_0 = 16$  м/с. Зарисуйте форму фазовых траекторий в отчет. Сопоставьте отражение процесса в фазовых координатах с его представлением в обычных координатах. Обратите внимание, что осциллятор данного типа может «успокаиваться» в двух симметричных относительно нуля положениях.

Найдите, при каком значении  $V_0 = V_{\text{кр}}$  (для выбранного  $K_t$ ) осциллятор может переходить из начального в новое положение равновесия. Для этого подберите такое значение  $V_0$ , при котором траектория как можно ближе подходит к началу координат.

Затем подберите значение  $V_0$ , при котором в процессе затухающих колебаний осциллятор вернется в исходное положение, из которого он запускается. При необходимости увеличивайте время счета  $t_{\max}$ .

Приведите в отчете найденные значения скорости переходов.

#### **Самостоятельная работа**

1. Экспериментальное исследование вынужденных колебаний ангармонического осциллятора с двумя положениями равновесия.

1.1. Устойчивый режим при  $K_t = 0,19$  кг/м

Рекомендуемые значения параметров:

$$M = 0,05 \text{ кг}; \quad x_0 = 0; \quad V_0 = 0; \quad K_y = -10 \text{ Н/м}; \quad K_a = -10 \text{ Н/м}^2;$$

$$K_t = 0,19 \text{ кг/м}; \quad AF = 2; \quad t_{\max} = 4 \text{ с}; \quad dT = 0,0006 \text{ с}; \quad n = 2;$$

на голубом поле  $V(x)$ ; предел шкалы  $V(x) = 8$  м/с; предел шкалы  $x = 2$  м.

Варьируйте частоту вынуждающей силы по ряду значений параметра частоты внешней силы  $fF$  от 0 до 5 Гц. Постройте резонансную кривую. Обратите внимание на характер временных зависимостей вынужденных колебаний, представляемых на нижнем экранном поле: после 2 с колебания происходят практически с периодом вынуждающей силы.

1.2. Динамический хаос при  $K_t = 0,1$  кг/м

Обратите внимание на то, что при тех же начальных условиях осциллятор может переходить в новое положение.

2. Теоретическая оценка критических скоростей перехода в новое положение для осциллятора с двумя положениями равновесия. Здесь подразумевается, что начальный толчок со скоростью  $V > V_{\text{кр}}$  происходит из положения равновесия  $X = X_1$  или  $X = X_2$ .

Из условия сохранения энергии и равенства начальной кинетической энергии величине потенциального барьера между положениями равновесия можно найти величину скорости, при получении которой осциллятор сможет перейти из одного положения равновесия в альтернативное.

Таблица 5.3

Варианты индивидуальных заданий

№ варианта	Коэффициенты $K_a$ или $K_y$	Шкала энергии, Дж	Шкала смещений, м	Заполнение таблицы
1	$K_a = -10 \text{ Н/м}^2$	64	8	№1
2	$K_y = -50 \text{ Н/м}$	64	8	№2
3	$K_a = -20 \text{ Н/м}^2$	64	8	№1
4	$K_y = -40 \text{ Н/м}$	32	4	№2
5	$K_a = -30 \text{ Н/м}^2$	32	4	№1
6	$K_y = -30 \text{ Н/м}$	32	4	№2
7	$K_y = -20 \text{ Н/м}$	16	4	№2

## 6. АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ СЛОЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

**Цель работы:** Анализ изменений формы результирующего колебательного движения в зависимости от условий суперпозиции гармонических колебаний и величин параметров складываемых колебаний.

### Основные положения

Гармоническим колебанием называют неравномерное и знакопеременное движение около фиксированного в пространстве равновесного положения, описываемое законом

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin[(2\pi f t / T) + \varphi]. \quad (6.1)$$

Здесь обозначено:

$x$  – смещение от положения равновесия, м;

$A$  – амплитуда колебания, м;

$\varphi$  – начальная фаза, радиан;

$\omega$  – циклическая частота, радиан/с;

$T$  – период колебания, с;

$f$  – частота колебания, Гц.

Колебания реальных тел, например камертонов, являются затухающими вследствие потерь энергии на преодоление сопротивления движению. Результат сложения (суперпозиции) колебаний будет зависеть от взаимной ориентации прямых, вдоль которых происходят колебания: сонаправлены они или взаимно перпендикулярны (рис. 6.1).

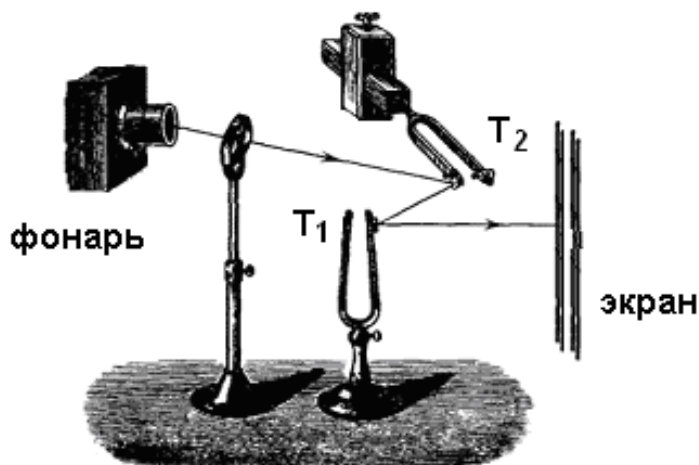


Рис. 6.1. Схема опытов Лиссажу

### Сложение сонаправленных гармонических колебаний

Рассмотрим случай сложения двух колебаний с частотами  $f_1$  и  $f_2$ . Согласно принципу независимости движений результирующее смещение описывается линейной комбинацией перемещений:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2). \quad (6.2)$$

Количественные результаты Вы получите при компьютерном моделировании сложения колебаний. Выделим, предваряя экспериментальное исследование, для *качественного* анализа характерные случаи соотношения частот складываемых колебаний.

1. Пусть частоты  $f_1$  и  $f_2$  отличаются друг от друга на порядок величины и более, для определенности выберем  $f_1 \ll f_2$ . В этом случае при относительно медленном изменении величины первого слагаемого, второе слагаемое за тот же интервал времени успеет многократно поменять величину и знак. Поэтому происходит движение, при котором *среднее за период колебания* положение высокочастотного колебания изменяется во времени по закону смещения  $x(t)$  низкочастотной компоненты.

Если складываемые колебания являются затухающими, то результирующее движение будет зависеть от соотношения значений коэффициентов затухания  $B_2$  и  $B_1$ . При сильном затухании высокочастотных колебаний, т. е. при  $B_2 > B_1$ , процесс быстро переходит к установлению колебаний с частотой  $f_1$ . Наоборот, при  $B_1 > B_2$ , среднее положение высокочастотных колебаний быстро достигает положения  $x = 0$ .

2. Пусть теперь частоты гармонических колебаний совпадают ( $f_1 = f_2$ ) при отличающихся величинах амплитуд и начальных фаз колебаний. Результирующее колебание будет в таком случае гармоническим с частотой  $f = f_1 = f_2$  и амплитудой  $A$ , величина которой находится в зависимости от разности начальных фаз колебаний. Если разность  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  (называемая обычно сдвигом фаз складываемых колебаний) равна нулю, то  $A = A_1 + A_2$ . При равных амплитудах очевидно, что  $A = 2A_1$ . Если же  $\Delta\varphi = \pi$ , т. е. колебания находятся в противофазе, то амплитуда результирующего движения равна по модулю  $A = |A_1 - A_2|$ . При равенстве амплитуд ( $A_1 = A_2$ ) в подобных случаях происходит взаимная компенсация смещений и результирующая амплитуда равна нулю.

Представляет интерес вариант, в котором, при равенстве амплитуд и при  $\Delta\varphi = \pi$ , складываемые колебания различаются по быстроте затухания колебаний. В этом случае колебания компенсируют друг друга лишь в начальный момент времени. Затем, по мере появления разности в текущих значениях  $A_1(t)$  и  $A_2(t)$ , результирующее движение начинает приобретать все больший размах, пока не проявится спад составляющей с меньшим значением коэффициента затухания колебаний  $B$ .

3. При сложении не равных, но близких по величинам частот  $f_1$  и  $f_2$ , возникает красивая картина периодически следующих во времени участков закономерного возрастания и убывания амплитуды колебаний. Такое явление получило название *биений*. Биения можно определить как гармонические колебания с периодически меняющейся амплитудой.

Для гармонических незатухающих колебаний форма биений останется неизменной во времени.

В случаях сложения реальных колебаний, например в случае сложения звуковых волн, создаваемых колебаниями двух камертонов с почти одинаковыми частотами, амплитуда биений постепенно уменьшается. При большом различии в величинах коэффициентов затухания  $B_1$  и  $B_2$ , после затухания биений будет продолжаться процесс затухающих колебаний с *меньшим* значением коэффициента  $B$ .

4. При сложении гармонических колебаний с кратными частотами, когда можно выразить  $f_1 = n f_2$ , где  $n$  – целое число,  $n > 1$ , результирующее движение имеет вид негармонического колебания сложной формы, которое последовательно повторяется через некоторый интервал времени. Величина интервала периодичности зависит от величин периодов складываемых колебаний, а именно за время одного интервала периодичности должны произойти как целое число колебаний с периодом  $T_1$ , так и целое число колебаний с периодом  $T_2$ . Поэтому для интервала периодичности справедливо соотношение:

$$T_{\text{пер}} = aT_1 = bT_2. \quad (6.3)$$

Очевидно, что  $n = b/a$ .

### Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Будем рассматривать сложение двух колебаний, каждое из которых (по отдельности) происходит вдоль некоторой прямой. В общем случае угол между прямыми может быть произвольным (см. рис. 6.1). Тогда можно спроектировать перемещения на взаимно перпендикулярные оси координат и рассматривать сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Выбрав координатные оси по направлениям колебаний, запишем закон движения в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x \cos(\omega_1 t); \\ y(t) &= A_y \cos(\omega_2 t), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где амплитуды колебаний могут уменьшаться в случае затухающих процессов.

Нас интересует траектория движения в плоскости  $XOY$ , поэтому для получения зависимости  $x(y)$  необходимо исключить время из системы уравнений (6.4).

В общем случае решение оказывается весьма громоздким с точки зрения математических преобразований. Использование компьютера позволяет получить решения системы (6.4) для любых конкретных случаев путем численного решения системы уравнений (6.4) с заданной по-



грешностью расчетов. Но прежде рассмотрим на *качественном* физическом уровне, какими должны быть траектории движения в случае сложения колебаний с кратными частотами  $f_1$  и  $f_2$ . По имени первого исследователя таких колебаний, результирующие траектории получили название *фигур Лиссажу*.

Пусть выполняется условие:

$$f_1 = n f_2 \quad \text{или} \quad \omega_1 / \omega_2 = n, \quad (6.5)$$

где  $n$  – любое целое число или результат деления целых чисел.

Тогда можно выделить следующие варианты.

1. Так как компоненты движения строго периодические и  $n$  – рациональное число, то рано или поздно тело вернется в исходную точку и траектория будет замкнутой. Для  $n$  – иррационального числа траектория, в принципе, не замкнута, хотя она может пройти как угодно близко от точки старта.

2. При  $n = 2$  за время одного полного колебания по одной координате будет совершено два полных колебания по другой координате. Следовательно, траектория должна иметь вид двойной петли с одной точкой пересечения (узлом). Конкретная форма определится разностью начальных фаз колебаний и будет иметь вид правильной восьмерки, седловидной или *U*-образной линии.

3. При  $n = 3$  должно быть три петли и два узла, и так далее по аналогии. Вследствие симметрии форма фигуры Лиссажу для случая  $n = 1,5$  должна соответствовать половине фигуры для случая  $n = 3$  и так далее в аналогичных случаях.

Приведенные рассуждения позволяют понять правило Лиссажу, доказанное им строго математически:

*отношение числа точек пересечения фигуры Лиссажу с прямой, проходящей через нее параллельно оси  $Y$ , к числу точек пересечения фигуры прямой, параллельной оси  $X$ , равно обратному отношению частот (или прямому отношению периодов) складываемых колебаний:*

$$N_y : N_x = \omega_x : \omega_y = T_y : T_x.$$

В ряде случаев по правилу Лиссажу можно установить значение неизвестной частоты, если получена фигура Лиссажу и известно значение эталонной частоты, с которой складывается частота неизвестная.

## ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

С помощью компьютера, по формуле (6.2), производится расчет результирующего колебательного движения в зависимости от значений параметров, характеризующих затухание, частоту, амплитуду и начальную фазу двух гармонических колебаний.

Если задавать нулевые значения коэффициентов затухания  $B_1$  и  $B_2$ , то складываемые колебания будут незатухающими. Изменяя соотношение частот, амплитуд и начальных фаз колебаний, можно получить и сравнить между собою графики различных результирующих движений.

**Задание 1.** Сложение колебаний с большим различием в частотах

1. Установите значения фиксированных параметров складываемых колебаний:  $A_1 = A_2 = 0,5$  см;  $f_1 = 10$  Гц;  $f_2 = 200$  Гц;  $\varphi_{01} = 0$  радиан;  $\varphi_{02} = 0$  радиан;  $MV = 1$ ;  $DT = 0,05$  с;  $MT = 1,7$  с.

2. Последовательно устанавливайте значения изменяемых параметров ( $B_1$ ,  $B_2$ ,  $MG$ ) по данным табл. 6.1 и зарисуйте в отчет качественную форму получаемых графиков. Табл. 6.1 (и последующие) необходимо подготовить на листах тетради так, чтобы было достаточно места для зарисовки графиков в ячейки таблиц.

Таблица 6.1

Сложение колебаний при  $f_2 \gg f_1$

Изменяемые параметры	Форма результирующей зависимости
$B_1 = 0$ $B_2 = 0$ $MG = 4$	
$B_1 = 5$ $B_2 = 0$ $MG = 2$	
$B_1 = 0$ $B_2 = 5$ $MG = 2$	
$B_1 = 5$ $B_2 = 5$ $MG = 2$	

**Задание 2.** Сложение затухающих колебаний одинаковой частоты

Введите значения фиксированных параметров:

$$f_1 = f_2 = 10 \text{ Гц}; \quad \varphi_{01} = 3,14 \text{ радиан}; \quad \varphi_{02} = 0; \quad DT = 0,1 \text{ с}; \quad MT = 1,8 \text{ с}.$$

В табл. 6.2 приведены значения для колонки изменяемых параметров, которые следует занести в таблицу, по форме подобную табл. 6.1. Устанавливая значения параметров складываемых колебаний в соответствии с колонкой изменяемых значений, зарисуйте в нее наблюдаемую форму результирующих зависимостей  $x(t)$ . Обсуждая полученные результаты, опишите в отчете, какие отличия есть у сравниваемых зависимостей и почему возникают колебания.

Таблица 6.2

Параметры затухающих колебаний

Изменяемые параметры			
$A_1 = 0,5$	$A_1 = 1$	$A_1 = 1$	$A_1 = 1$
$A_2 = 0,5$	$A_2 = 1$	$A_2 = 1$	$A_2 = 1$
$B_1 = 0$	$B_1 = 1,5$	$B_1 = 2,5$	$B_1 = 7,5$
$B_2 = 5$	$B_2 = 5$	$B_2 = 5$	$B_2 = 0,5$
$MG = 1$	$MG = 1$	$MG = 1$	$MG = 1$
$MV = 1$	$MV = 1$	$MV = 0,3$	$MV = 1$

**Задание 3.** Сложение колебаний с близкими частотами

Этот случай имеет важное практическое значение и часто наблюдается в повседневной жизни, когда мы замечаем периодическое возрастание и убывание уровня громкости звука от двух источников с близкими значениями частоты.

1. Введите следующие значения фиксированных параметров:

$$A_1 = 0,5 \text{ см}; \quad A_2 = 0,5 \text{ см}; \quad f_1 = 29 \text{ Гц}; \quad \varphi_{01} = 3,14 \text{ радиан}; \quad \varphi_{02} = 0; \\ MG = 1; \quad MV = 1; \quad DT = 0,05 \text{ с}; \quad MT = 1,5 \text{ с}.$$

Последовательно вводя значения изменяемых параметров по табл. 6.3, зарисуйте в отчет наблюдаемую форму биений, представляя результаты как в табл. 6.1.

Таблица 6.3

Параметры складываемых колебаний

Изменяемые параметры			
$f_2 = 29 \text{ Гц}$	$f_2 = 28 \text{ Гц}$	$f_2 = 27 \text{ Гц}$	$f_2 = 27 \text{ Гц}$
$B_1 = 0$	$B_1 = 0$	$B_1 = 3$	$B_1 = 6$
$B_2 = 0$	$B_2 = 0$	$B_2 = 3$	$B_2 = 2$

2. Сравните частоту результирующих высокочастотных колебаний с частотами складываемых и запишите вывод в отчет. Также сравните частоту биений (их количество за одну секунду) с разностью частот складываемых колебаний. В качестве обобщения полученных результатов сделайте заключение о том, как зависит частота биений от разности частот складываемых колебаний.

**Задание 4.** Сложение колебаний с кратными частотами

Устанавливая значения параметров складываемых колебаний в соответствии с данными табл. 6.4, зарисуйте в ее ячейки наблюдаемую форму результирующего движения.

Таблица 6.4

Сложение колебаний с кратными значениями частот

Фиксированные величины	Изменяемые параметры	Форма результирующей зависимости
$A_1 = 0,5$ см $A_2 = 0,5$ см $\varphi_{01} = 3,14$ рад $\varphi_{02} = 0$ $B_1 = 0$ $B_2 = 0$ $MG = 1$ $MV = 1$ $DT = 0,05$ с $MT = 2$ с	$f_1 = 4$ Гц $f_2 = 2$ Гц	$T_{\text{пер}} =$ $T_1 =$ $T_2 =$ $a =$ $b =$
	$f_1 = 5$ Гц $f_2 = 3$ Гц	$T_{\text{пер}} =$ $T_1 =$ $T_2 =$ $a =$ $b =$
	$f_1 = 15$ Гц $f_2 = 3$ Гц	$T_{\text{пер}} =$ $T_1 =$ $T_2 =$ $a =$ $b =$

По полученным графикам определите интервал периодичности  $T_{\text{пер}}$  – минимальное время, после которого наблюдается повторение формы кривой  $x(t)$ . Как величины, обратные частотам складываемых колебаний  $f_1$  и  $f_2$ , найдите значения периодов колебаний  $T_1$  и  $T_2$ , укажите эти значения на графиках.

Сравните величины периодов слагаемых колебаний с найденным значением интервала периодичности результирующего движения и запишите величины коэффициентов  $a$  и  $b$ . Соответствующие значения будут равны:

$$a = T_{\text{пер}} / T_1, \quad b = T_{\text{пер}} / T_2 .$$

Сделайте вывод о целочисленном отношении интервала периодичности и периодов складываемых колебаний.

**Часть 2. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний с кратными частотами (фигуры Лиссажу)**

**Задание 1.** Фигуры Лиссажу для незатухающих и затухающих колебаний

1. Устанавливая значения параметров колебаний в соответствии с табл. 6.5, зарисуйте в нее качественную форму результирующего движения – фигур Лиссажу – при сложении незатухающих колебаний.

Таблица 6.5

Сложение взаимно перпендикулярных незатухающих колебаний

Фиксированные величины	$A_1 = 0,75 \text{ см}; \quad MG = 1; \quad DT = 0,02 \text{ с}$ $A_2 = 0,75 \text{ см}; \quad MV = 1; \quad MT = 0,1 \text{ с}$		
Изменяемые параметры	$f_1 = 20 \text{ Гц}$ $f_2 = 20 \text{ Гц}$	$f_1 = 20 \text{ Гц}$ $f_2 = 10 \text{ Гц}$	$f_1 = 30 \text{ Гц}$ $f_2 = 10 \text{ Гц}$
$\varphi_{01} = 0 \text{ радиан}$ $\varphi_{02} = 0 \text{ радиан}$ $B_1 = 0, B_2 = 0$			
$\varphi_{01} = 0,77 \text{ радиан}$ $\varphi_{02} = 0 \text{ радиан}$ $B_1 = 0, B_2 = 0$			
$\varphi_{01} = 1,57 \text{ радиан}$ $\varphi_{02} = 0 \text{ радиан}$ $B_1 = 0, B_2 = 0$			
$\varphi_{01} = 1,57 \text{ радиан}$ $\varphi_{02} = 0 \text{ радиан}$ $B_1 = B_2 = 2$ $MT = 1 \text{ с}$			

2. Для одного из случаев сложения колебаний с отношением частот 3:1 проверьте выполнение правила Лиссажу, проведя на данном рисунке взаимно перпендикулярные секущие, не проходящие через узлы фигуры Лиссажу. Вывод запишите в отчет.

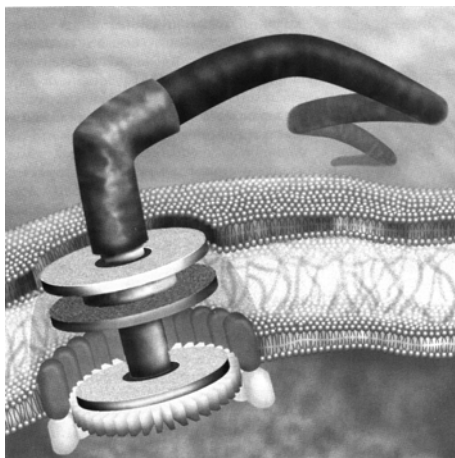
## **Задание 2.** Ложные фигуры Лиссажу

При компьютерном моделировании физических процессов важное значение имеет адекватный выбор величины шага интегрирования уравнений движения. Если шаг  $dT$  выбран неправильно, то на экране компьютера будут получаться ложные результаты. Иногда это весьма красивые геометрические фигуры.

Варьируя отношение складываемых частот и величину  $dT$ , сопоставимую или превышающую период складываемых колебаний, найдите необычную по форме «неправильную» фигуру Лиссажу, зарисуйте ее в отчет с указанием введенных параметров моделирования и дайте ей образное название.

### **Контрольное задание**

Передвижение многих микроорганизмов (бактерий) в жидкой среде производится за счет вращательного движения хвостового жгутика. В настоящее время установлена белковая структура «моторчика», приводящего жгутик в движение (рис. 6.2).



*Рис. 6.2. Модель белковой структуры органа движения бактерии*

Однако для биологов остается загадкой, каким образом передается вращательное движение изнутри клетки наружу через мембрану клетки без потери ее герметичности и каким образом могут согласовано перемещаться по кругу молекулы белков в моторчике. На основании выполненного исследования фигур Лиссажу предложите решение проблемы создания вращательного движения жгутика без вращения каких-либо белков внутри клетки. Опишите возможный процесс в отчете.

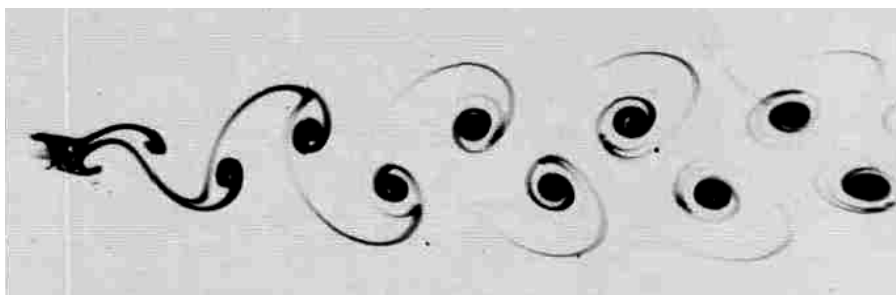
## **7. ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНОГО ВОСПРОИЗВОДСТВА**

## ПОПУЛЯЦИИ

**Цель работы:** Изучение динамики поведения нелинейной системы в зависимости от начальных условий и области изменения управляющего параметра системы.

### *Основные положения*

Во многих сложных физических, химических и биологических процессах наблюдаются качественно подобные явления резкого изменения характера протекания (динамики) процесса, при превышении одним из параметров системы некоторой критической величины. Примером может служить переход от слоистого (ламинарного) течения к вихревому (турбулентному) при возрастании скорости обтекания препятствия потоком жидкости.



*Рис. 7.1. Бифуркация потока на два уровня вихрей*

При математическом моделировании таких сложных систем с пороговыми изменениями свойств (с бифуркациями) руководящая идея состоит в том, чтобы найти достаточно простую систему, временная эволюция которой качественно подобна поведению сложной многочастичной системы. Затем подробно изучают свойства такой простой системы и определяют те общие черты поведения, которые мало зависят от конкретных деталей модели. После чего, с учетом приобретенных знаний, общие выводы применяют для анализа гораздо более сложных систем или объектов.

В настоящей работе изучается простая модель появления бифуркаций в нелинейной системе, зависящей от одной переменной и одного параметра. Основное физическое допущение модели состоит в том, что процесс во времени считается дискретным (позапным, пошаговым). Тогда состояние системы на каком-либо ( $j+1$ ) этапе будет определено состоянием предшествующего ( $j$ ) этапа.

В качестве самой наглядной модели подобной системы удобно выбрать биологический объект – изолированную от других популяцию короткоживущих насекомых. Пусть летом они выводятся, а осенью откладывают яйца. Следующее поколение появится только через боль-

шой срок, так что популяции не перекрываются. Поскольку процесс эволюции популяции во времени является дискретным, для него можно записать разностное уравнение вместо уравнения с производными по времени (оно необходимо для непрерывных процессов):

$$N_{J+1} = R N_J - S N_J^2. \quad (7.1)$$

Здесь обозначено:

$N_J$  и  $N_{J+1}$  – численности популяций на последующих этапах;  
 $R$  – скорость воспроизводства потомства отдельным насекомым,  
 $S$  – скорость убыли популяции.

Первый член выражает собой естественный прирост популяции, второй – отражает потери предшествующего поколения, вызванные взаимным истреблением, распространением болезней и нехваткой пищевых ресурсов. Для упрощения анализа уравнение (1) удобно перенормировать, заменяя  $N_J(R/S)$  на переменную  $Y_J$ :

$$Y_{J+1} = R Y_J (1 - Y_J). \quad (7.2)$$

Теперь задача состоит в исследовании возможных областей значений для численности популяции, при больших временах наблюдения за системой, т. е. при больших значениях  $j$ . На первый взгляд уравнение (7.2) очень простое и не предвещает резких перемен. Однако это не так. На самом деле динамика систем, описываемых нелинейным уравнением типа (7.2), имеет сложную и упорядоченную структуру решений.

Для анализа удобно разбить всю область изменения параметра  $R$  на отдельные интервалы. Для области значений параметра  $R$  (скорости воспроизводства), где  $0 < R < 1$  динамическая переменная  $Y$  монотонно стремится к нулевому значению. Физически это означает вымирание популяции. При  $R > 1$  зависимость установившейся численности популяции от величины параметра  $R$  представлена на рис. 7.2, где пришлось отказаться от линейного масштаба по горизонтальной оси, чтобы указать величины критических значений параметра  $R$ .

Как видно из рис. 7.2, при критических значениях  $R_{кр} = 3; 3,4; 3,56; 3,569$  и других, в ходе зависимости наблюдаются бифуркации (развилки). После первой из них система может иметь два устойчивых предельных значения. При этом на последующих шагах численность популяции попеременно то возрастает, то убывает. Когда насекомых выводится слишком много, они истощают имеющиеся пищевые ресурсы, так что их потомкам грозит голод.

Наоборот, для малой численности насекомых создаются благоприятные условия и они бурно размножаются. При  $R > 3,4$  возможны четыре значения для стационарной численности, при  $R > 3,56$  разре-



ны восемь значений и т. д. При этом последующие значения  $R_{кр}$  становятся все ближе друг к другу и состояния  $Y^*$  могут перекрываться. В конечном счете, при  $R = 4$ , станут возможными любые значения из интервала  $(0,1)$ .

Таким образом, для любых систем, которые могут быть описаны выражением (7.2), результат большого числа дискретных этапов является стационарным и однозначным только для интервала значений параметра  $R$  между 1 и 3 и совершенно хаотичным – для значения  $R = 4$ .

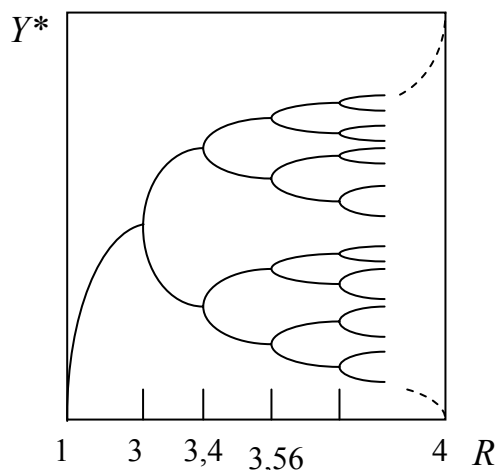


Рис. 7.2. Зависимость стационарной численности  $Y^*$  популяции от величины скорости воспроизводства  $R$

Вблизи критических значений  $R_{кр} = 3; 3,4; 3,56; 3,569$  и т.д. появляются неустойчивости и состояние системы циклически переходит с одной из допустимых ветвей значений на другую (или на другие). В этом режиме, при последующих шагах, система может переходить в состояния, которые заметно отличаются друг от друга. При этом одинаковые значения состояний могут повторяться через четное число шагов. Более подробно исследовать спектр возможных состояний нелинейных систем, описываемых выражением (7.2), можно с помощью компьютерного моделирования.

## ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

**Задание 1.** Режим деградации,  $R < 1$

Введите следующие значения параметров моделирования:

$R = 0,9; Y_0 = 0,1; MG = 1; MV = 1; DT = 0,1 \text{ с}; MT = 10 \text{ с}.$

Параметр, который будет изменяться:  $Y_0$ .

Шаг изменения:  $0,1$ . Число кривых:  $8$ .

Убедитесь, что, независимо от исходного уровня  $Y_0$  для численности популяции, она постепенно исчезает.

**Задание 2.** Устойчивый динамический режим,  $1 < R < 3$

В этом случае система асимптотически приближается к ненулевому устойчивому состоянию. При больших значениях произведенных смен поколений  $j$  последующие значения мало отличаются друг от друга, поэтому предельная величина может быть найдена из условия  $Y^* \approx RY^*(1 - Y^*)$ . Отсюда следует, что для предельного значения  $Y^* \approx 1 - (1/R)$ .

Задайте значение параметра  $R$  между 1 и 2 (например, 1,5). Рассчитайте соответствующее значение для  $Y^*$ . Вычислите значение разности  $(Y^* - Y_0)$ .

Введите значение начального уровня популяции  $Y_0 = 0,1$ .

Параметр, который будет изменяться:  $Y_0$ .

Шаг изменения: 0,5 ( $Y^* - Y_0$ ). Число кривых: 6.

Зарисуйте кривые с экрана в отчет с указанием значения параметра  $R$ . Сравните наблюдаемое значение уровня насыщения численности популяции с ранее рассчитанным, запишите вывод в отчет. Отметьте, зависит ли предельная численность популяции от начального уровня  $Y_0$ .

**Задание 3.** Переход к бифуркационному режиму

Введите значения параметров:  $R = 0,5$ ;  $Y_0 = 0,1$ ;  $MG = 4$ .

Параметр, который будет изменяться:  $R$ .

Шаг изменения: 0,5. Число кривых: 6.

Отметьте, после какого значения параметра  $R$  режим становится бифуркационным. Чтобы облегчить зарисовку графиков, повторите расчеты для числа кривых, равного 5. Зарисуйте графики в отчет, используя обозначения \* \* \* только для режима бифуркации. Остальные зависимости можно показать сплошными линиями, соединяющими рассчитанные точки. Обратите внимание, что в режиме бифуркации значения уровней, как верхнего, так и нижнего, выходят на уровни насыщения. Укажите в отчете значения этих уровней.

**Задание 4.** Поведение системы вблизи критических состояний

1. Измените значение одного параметра:  $R = 2,9$ .

Параметр, который будет изменяться:  $Y_0$ .

Шаг изменения: 0,1. Число кривых: 8.

Зарисуйте кривые в отчет, заштриховав область, в которой расположены все возможные (реализуемые) для системы состояния.

2. Устанавливая новые значения для  $R = 3,0$  и  $R = 3,1$ , повторите расчет по пункту 1. Опишите в отчете без зарисовки графиков, что при этом происходит с областью возможных состояний системы.

3. Введите следующее значение параметра:  $R = 3,3$ .

Параметр, который будет изменяться:  $Y_0$ .

Шаг изменения: 0,1. Число кривых: 8.

Определите по вертикальной шкале значения для уровней стационарной численности популяции, разрешенные при больших значениях времени наблюдения. Обратите внимание на поведение состояний, у которых начальное значение попадает между конечными уровнями состояний.

4. Повторите расчет для  $R = 3,5$ ,  $R = 3,6$  и  $R = 3,9$ .

Для последнего случая зарисуйте кривые в отчет на том же рисунке, где представлена зависимость для  $R = 2,9$ . Обратите внимание на существование «запрещенных» зон, в которых нет разрешенных для системы состояний ( $R = 3,6$ ), и на их исчезновение по мере приближения к режиму детерминированного хаоса, когда  $R = 3,9$ .

Для случая  $R = 3,9$  сравните последовательность расположения точек в исходном состоянии и в конечном (расстояния по вертикали между точками одинакового цвета). Запишите, что происходит с состояниями, близкими в начале расчета, в конце расчетов.

### ***Примечание***

Для режима детерминированного хаоса, при точном выполнении условия  $R = 4$ , частным решением уравнения (7.2) является выражение:

$$X_j = 2^j X_0,$$

где новая переменная введена заменой  $Y_j = (1 - \cos(2\pi X_j)) / 2$ .

Поскольку значение  $Y_j$  определяется периодической функцией  $\cos(2\pi X_j)$ , то прибавление или вычитание из аргумента целого числа (оно будет умножено на  $2\pi$ ) не изменяет значение  $Y_j$ .

Физически это означает, что в данном случае предельное состояние зависит от десятых, сотых, тысячных и других разрядов в численном значении начального состояния системы. Даже очень малое отличие  $\varepsilon$  в значениях  $Y_0$ , которым обычно пренебрегают, после сравнительно небольшого числа шагов  $j$  может достигать величины  $2^j \varepsilon$ .

Например, для  $\varepsilon = 0,01$  различие станет более 10, после прохождения 10 этапов развития системы. В подобном случае поведение системы становится хаотическим. Очевидно, что точный долгосрочный прогноз для таких случаев оказывается невозможным.

## 8. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТА ДОПЛЕРА

**Цель работы:** Знакомство с эффектом, характерным для всех волновых процессов; определение зависимости длины волны от скорости движения источника волн.

### *Основные положения*

Волновые процессы лежат в основе различных по своей природе явлений, таких как распространение звуковых, сейсмических волн, радиоволн, света, волн Релея и волн Деброяля. Наиболее простой моделью волновых процессов является модель гармонической волны. Бегущие гармонические волны возникают в упругой, условно не имеющей границ среде, когда одна из ее точек (источник) совершает гармонические колебания под действием внешней силы.

По определению, бегущей гармонической волной называется процесс распространения гармонического колебательного движения. В тех случаях, когда внешнее воздействие вызывает аperiodическое движение источника, в среде распространяется аperiodический волновой импульс.

Для волнового движения остаются применимыми понятия амплитуды, частоты, периода и фазы колебания. Дополнительно к ним, для волновых явлений используется еще и пространственная характеристика процесса – длина волны. *Длиной волны  $\lambda$  называется пространственный интервал (расстояние), на котором происходит одно полное гармоническое колебание.*

Многочисленные опыты показали, что в однородных и изотропных средах упругие, электромагнитные и другие типы волн распространяются с постоянной по величине скоростью, называемой фазовой. Поэтому можно рассчитать длину волны по зависимости:

$$\lambda = V_f T = \frac{V_f}{\nu}, \quad (8.1)$$

где  $V_f$  – фазовая скорость (для электромагнитных волн  $V_f = c$ );

$\nu$  – частота колебаний;

$T$  – период колебаний.

Явление зависимости частоты и соответственно длины волны от относительного движения источника и приемника волн получило название *эффекта Доплера* (DOPPLER C., 1803–1880).

Свяжем систему отсчета со средой, в которой распространяются гармонические волны. Например, это могут быть волны на поверхности жидкости. Будем считать, что источник круговых волн располагается в точке  $I$ , а приемник – в точке  $P$ .

Скорости движения источника волн и их приемника обозначим как  $V_i$  и  $V_p$ , начало координат расположим в произвольной точке среды (рис. 8.1).

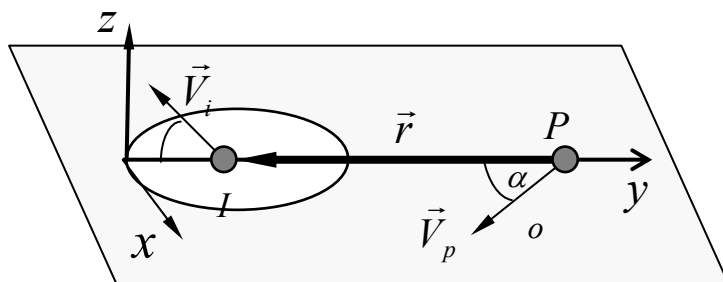


Рис. 8.1. Схема движения источника и приемника волн

Пусть  $r$  – радиус-вектор, соединяющий приемник  $P$  с источником волн  $I$ . Обозначим  $\alpha$  и  $\beta$  углы между векторами скоростей приемника  $V_p$ , источника  $V_i$  и вектором  $r$ .

Тогда величина частоты, регистрируемой приемником, будет равна:

$$v' = v \frac{1 + \left(\frac{V_p}{V_f}\right) \cos \alpha}{1 + \left(\frac{V_i}{V_f}\right) \cos \beta}, \quad (8.2)$$

где  $v$  – собственная частота источника в системе отсчета, где он неподвижен.

Более простыми являются случаи, когда либо приемник, либо источник неподвижны относительно среды. В работе принято, что приемник волн неподвижен ( $V_p = 0$ ), а движется источник волн. Соответственно будем иметь  $(V_p / V_f) = 0$ . Скорость источника будем выражать в единицах фазовой скорости, которую для простоты моделирования положим равной единице  $V_f = 1$ .

Пусть источник волн движется *от* приемника. Тогда углы  $\alpha$  и  $\beta$  равны нулю, поэтому  $\cos \alpha = \cos \beta = 1$ . Очевидно, что в этом случае частота принимаемых волн будет уменьшаться, так как знаменатель в формуле (8.2) будет больше единицы. При движении источника волн *к* приемнику вектор скорости  $V_i$  меняет направление на противоположное и  $\cos \beta = -1$ . Знаменатель в формуле (8.2) становится меньше единицы и частота принимаемых волн будет больше частоты генерируемых волн. Отметим, что зависимость (8.2) частоты принимаемой волны от скорости движения их источника является нелинейной.

В том случае, когда источник волн движется со скоростью, равной фазовой скорости  $V_i = V_f$ , возникает ударная волна (см. рис. 8.2).



Рис. 8.2. Образование облака на фронте ударной волны при превышении самолетом скорости звука

Для волн в газовых средах фазовая скорость определяется по скорости распространения звука  $V_f = V_{зв}$  и имеет величину порядка 1200 км/ч для обычных атмосферных условий. Современные реактивные самолеты могут летать со скоростью, превышающей эту величину. При сверхзвуковом движении источника звука (самолета) сферический фронт ударной волны преобразуется в конический. По имени ученого, первым описавшего случай движения источника с  $V_i > V_f$ , такой фронт ударной волны называют **конусом Маха**.

Что касается изменения длины волны  $\lambda$  в эффекте Доплера, то на основании зависимости (8.2) и определения (8.1) качественно можно ожидать, что при удалении источника от приемника длина регистрируемой волны будет возрастать. Наоборот, при сближении источника и приемника величина длины волны будет уменьшаться.

Количественную зависимость длины принимаемой волны от направления движения и величины скорости источника необходимо найти по данным компьютерного моделирования эффекта Доплера.

## ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

В части 1 предстоит исследовать пространственные расположения волновых фронтов в неподвижной системе отсчета, связанной со средой, в которой происходит движение источника волн.

При выполнении части 2 необходимо исследовать изменения профиля поперечных волн, наблюдаемых в системе отсчета, связанной с движущимся источником волн.

### Часть 1

**Задание 1.** Волновые фронты при неподвижном источнике

Введите следующие значения параметров:

$$R_0 = -500 \text{ м}; \quad F_i = 1 \text{ Гц}; \quad a_i = 0;$$

$$V_i = 0; \quad V_f = V_{\text{звука}} = 330 \text{ м/с} = 1 \text{ отн. ед.}$$

В этом случае на экране будут показаны положения волновых фронтов, представленные через промежутки времени, равные одному периоду колебаний. Это значит, что расстояния между соседними окружностями равны длине волны. Измерьте это расстояние с помощью линейки, отображенной на экране и запишите в отчет в табл. 8.1 как начальное значение  $\lambda_0$  и в графе «сближение», и в графе «удаление». От этой исходной точки Вы будете затем строить две ветви зависимости длины волны от относительной скорости движения источника и приемника волн.

*Указание.* Можно измерять все длины волн в относительных единицах, например с помощью обычной линейки с миллиметровыми делениями, прикладывая ее к экрану компьютера.

**Задание 2.** Равномерное движение источника со скоростью  $V_i < V_f$ .

Введите новые значения ( $V_i = 0,1 V_f$ ) и выполните измерения длины волны в направлении движения источника (к правому краю экрана) и в противоположном. По равенству расстояний между фронтами (между соседними кругами в соответствующих направлениях) убедитесь, что в обоих направлениях процесс остается периодическим и определение длины волны остается применимым.

Таблица 1

Зависимость значений длины волны от скорости источника волн

Направление движения	Длина волны, отн. единицы, для $V_i / V_f$ равного									
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0
сближение										
удаление										

Последовательно изменяйте значение скорости  $V_i$  по указанному в табл. 8.1 ряду значений. Измеренные значения длин волн запишите в соответствующие графы табл. 8.1.

Опишите своими словами наблюдаемые изменения в расположении волновых фронтов при увеличении скорости источника до  $V_i = V_f$ . Нарисуйте в отчете схему расположения фронтов волн для случая образования ударной волны.

По данным табл. 8.1 постройте в отчете графики зависимости длины волны от величины отношения скоростей источника волн и фазовой скорости для случаев сближения и удаления (на одном рисунке). В подписи к рисунку укажите, какая ветвь графика к какому случаю движения относится.

Запишите, в каком отношении находятся величина наибольшей длины волны удаления и величина длины волны неподвижного источника. Сделайте вывод о математическом характере установленных Вами зависимостей, выразите их в виде формул.

*Указание.* Учтите, что за время одного колебания источник сместится на расстояние  $V_f T$ .

**Задание 3.** Сверхзвуковое движение со скоростью  $V_i > V_f$

Измените значение только параметра  $R_0 = -3000$  м.

Введите последовательно значения скорости движения источника  $V_i = 1,2 V_f$ ,  $V_i = 1,8 V_f$ ,  $V_i = 2,5 V_f$ .

Угол конуса Маха определяется соотношением  $\sin\theta = V_f / V_i = 1/M$ , где  $M$  – число Маха, показывающее, во сколько раз скорость источника больше скорости звука. Запишите в отчет, как изменяется угол конуса Маха при возрастании сверхзвуковой скорости.

## Часть 2

**Задание 4.** Профили волн при движении со скоростью  $V_i < V_f$

Установите значения параметров моделирования:

$$x_0 = 1000 \text{ м}; \quad V_i = 0; \quad a_i = 0.$$

Сравните величины длин волн, бегущих от источника в противоположные стороны, вывод запишите в отчет. Затем установите значение скорости источника  $V_i = 0,5 V_f$  и получите новые данные без очистки поля экрана компьютера. Отметьте в отчете, во сколько раз изменились длины волн, бегущих от самолета вперед и назад по сравнению с длиной волны от неподвижного источника. Проверьте соответствие этих результатов данным, полученным для неподвижной системы отсчета.

*Указание.* Используйте данные табл. 8.1 или график зависимости длины волны от величины отношения скоростей источника волн и фазовой скорости.

Очистите поле экрана и установите значение скорости источника  $V_i = V_f$ . Зарисуйте результаты в отчет. Опишите в отчете, какие изменения произошли при этом.

**Задание 5.** Движение источника с ускорением  $a_i > 0$

Этот случай отражает реальный процесс разгона самолета и прохождения им так называемого «звукового барьера».

Установите следующие значения:

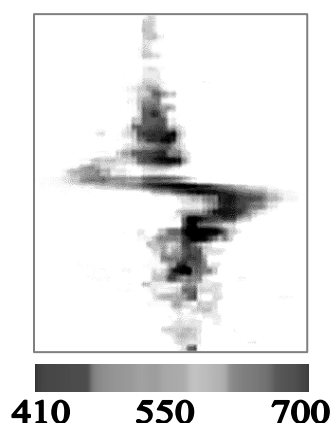
$$x_0 = 1000 \text{ м}; \quad V_i = 0,2 V_f, \quad a_i = 0,2 \text{ м/с}^2.$$

Опишите в отчете, как развивается процесс распространения волны, первоначально бегущей вперед (как изменяется величина длины волны, в какой момент фронт волны на короткое время останавливается, что происходит в последующем).



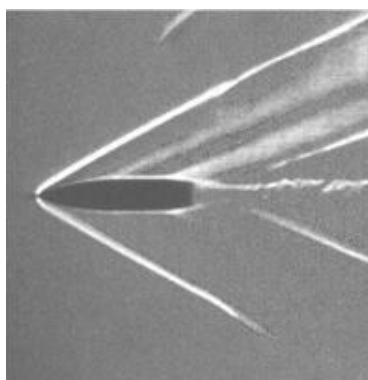
### **Контрольные задания**

1. Оцените по приведенным на рис. 8.3 экспериментальным данным величины смещения зеленой линии от ее нормального положения в спектре. Длина волны для удаляющейся от нас части газового диска, вращающегося вокруг Черной дыры, оценивается по длинноволновой части шкалы; для той части, которая при вращении диска приближается к нам, оценивается по коротковолновой части шкалы. Используя полученные ранее формулы для удаляющегося и приближающегося к наблюдателю источника, найдите выражение для скорости источника, т. е. величину средней орбитальной скорости частиц газа в диске аккреции возле Черной дыры. Сравните полученную величину со скоростью света в вакууме.



*Рис. 8.3. Запись смещения линии излучения водорода при сканировании диска аккреции газа вокруг Черной дыры*

2. Определите по фотографии сверхзвукового движения пули (рис. 8.4) величину угла, под которым распространяется в воздухе ударная волна (угол конуса Маха). Оцените скорость пули, считая что фазовая скорость звука в воздухе равна примерно 330 м/с.



*Рис. 8.4. Теневая фотография ударной волны, возникающей при сверхзвуковом движении пули в воздухе*

## 9. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ

**Цель работы:** применение принципа суперпозиции для нахождения напряженности поля и потенциала системы точечных зарядов, знакомство с картиной эквипотенциалей и распределения силовых линий поля одного, двух и трех электрических зарядов.

### Основные положения

Основным законом электростатики является экспериментально установленный закон Кулона (9.1), справедливый для точечных зарядов.

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}. \quad (9.1)$$

Здесь обозначено:  $Q$  и  $q$  – заряды тел;

$r$  – расстояние между заряженными телами;

$\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная;

$F$  – абсолютная величина силы взаимодействия заряженных тел, размерами которых можно пренебречь, по сравнению с расстоянием между ними.

$\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды, в которой располагаются заряды.

Действие электрических сил принято описывать следующим образом. Мы говорим, что точечный заряд  $Q$  создает в окружающем его пространстве такое состояние, на которое другой точечный заряд  $q$  реагирует, испытывая действие силы, величина которой определяется по закону Кулона (9.1). Это «состояние пространства» и называется *электрическим полем заряда  $Q$* .

Поскольку силы действия и противодействия равны по величине, мы можем говорить также, что и заряд  $q$  создает электрическое поле, на которое реагирует заряд  $Q$ . Так как силовое действие передается через физически измененное пространство (через пространство «занятое» электрическим полем), то необходимо найти способ описания его состояния.

Разделим обе части выражения (9.1) на  $q$ :

$$\frac{F}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \quad (9.2)$$

Правая часть выражения (9.2) не зависит от величины  $q$ , а определяется только величиной заряда – источника поля  $Q$  и квадратом расстояния между зарядами  $r$ . Поэтому говорят, что правая часть выражения (9.2) является характеристикой *электрического поля* заряда-источника, и она будет одинаковой для любого заряда  $q$ , помещенного

в данную точку пространства. Величину силы, действующей на единицу заряда, называют *напряженностью электрического поля*:

$$E = \frac{F}{q} \quad (9.3)$$

Выражение (9.3) является определением величины напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом. Используя определение (9.3) и закон Кулона (9.1), можно получить для поля одного точечного заряда

$$E = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 \epsilon r^2} . \quad (9.4)$$

Отметим, что эта формула *не является определением* напряженности поля! Вектор  $\mathbf{E}$  направлен от положительно заряженного источника, для отрицательного заряда-источника направление вектора  $\mathbf{E}$  противоположно.

Для системы нескольких точечных зарядов (они могут являться частями общего тела, молекулы и т. д.) по **принципу суперпозиции полей** находим

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_3(\mathbf{r}) + \dots, \quad (9.5)$$

где сумма является геометрической, учитывающей как величину, так и направление каждого из векторов напряженности.

Наглядное представление о поле действия электрических сил в плоскости расположения точечного заряда (или нескольких зарядов) дают *линии напряженности*. Это непрерывные линии, проведенные вокруг заряда-источника таким образом, что касательная к любой точке любой линии совпадает с направлением вектора напряженности в этой точке, а число линий определяется абсолютной величиной заряда-источника. С учетом направления вектора  $\mathbf{E}$  можно говорить, что положительный заряд является источником силовых линий напряженности, тогда как отрицательный заряд служит стоком, в него линии вектора  $\mathbf{E}$  входят.

Касательная к любой точке линии напряженности показывает направление силы Кулона, действующей на помещенный в эту точку пробный заряд, поэтому линии напряженности называют также силовыми линиями электрического поля.

Энергетическую характеристику электрического поля выражает потенциал  $\varphi$ . Его численное значение определяется величиной работы перемещения единицы положительного точечного заряда из бесконечности в данную точку электрического поля (см. формулу 9.6). Смысл такого выбора граничных условий в том, что при  $r \rightarrow \infty$  сила электростатического

взаимодействия стремится к нулю и начальное значение потенциальной энергии системы «на бесконечности» можно принять за нулевое.

$$\varphi_a = \frac{A_{\infty a}}{q} \quad (9.6)$$

Выполненная работа является мерой изменения потенциальной энергии системы. Поэтому можно записать:

$$W_a = q \varphi_a. \quad (9.7)$$

Эта формула выражает величину потенциальной энергии  $W$  заряда  $q$  в данной точке ( $a$ ) электрического поля. По умолчанию, пробный заряд всегда положительный («положительный герой»). При его приближении к точечному отрицательному заряду потенциальная энергия системы уменьшается от начального нулевого значения. Поэтому потенциал поля отрицательного заряда меньше нуля (отрицателен).

Зависимости потенциальной энергии и потенциала от расстояния  $r$  между зарядами (пробным  $q$  и создающим поле точечным  $Q$ ) выражаются следующими формулами:

$$W(r) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}; \quad (9.8)$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}. \quad (9.9)$$

Для электростатического поля справедлив принцип суперпозиции потенциалов:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r}) + \varphi_3(\mathbf{r}) + \dots \quad (9.10)$$

При нахождении результирующего значения  $\varphi(\mathbf{r})$  необходимо учитывать **знак** потенциалов, создаваемых точечными зарядами в данной точке пространства.

Все точки, расположенные на одинаковом расстоянии от точечного заряда, имеют одинаковые значения потенциала. Это следствие вышеприведенной формулы (9.9). Геометрическое место точек с равными потенциалами называют **экипотенциальной поверхностью**. Для одного точечного заряда экипотенциальными поверхностями являются концентрические сферы. В координатных плоскостях сечениями таких поверхностей будут экипотенциальные окружности. Для нескольких точечных зарядов линии экипотенциалей имеют более сложную форму.

Карта экипотенциалей  $\varphi_i$  для системы зарядов аналогична топографической карте с указанными значениями изовысот местности. Нулевая экипотенциаль в такой аналогии играет роль уровня моря на географической карте. Большим положительным значениям потенциала

соответствуют «горы» потенциального «рельефа», отрицательным соответствуют «впадины».

Линии эквипотенциалей и линии напряженности вектора  $E$  взаимно перпендикулярны. При этом, линии  $E$  могут пересекать нулевую эквипотенциаль, а эквипотенциаль с отличным от нуля значением потенциала может проходить через точки, где  $E = 0$ .

## ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

### Часть 1. Силовые линии электрического поля

#### Задание 1. Поле одного точечного заряда

1. Введите значения величин зарядов, их координат и других параметров:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 3 \text{ нКл}; & Q_2 &= 0; & Q_3 &= 0; & Z_1 &= 0; \\ X_1 &= 0,6 \text{ см}; & X_2 &= 0,2 \text{ см}; & X_3 &= 1 \text{ см}; & \varepsilon &= 1; \\ M &= 1, & MZ &= 1, & S &= 0,004; & Z_0 &= 1; & X_0 &= 1. \end{aligned}$$

2. Получив на экране картину линий напряженности, подсчитайте полное число линий вокруг данного заряда, определите число линий, создаваемых единицей заряда (для наших условий моделирования), запишите это значение в отчет.

#### Задание 2. Поле трех точечных положительных зарядов

1. Измените значения только трех величин:

$$Q_1 = 5 \text{ нКл}; \quad Q_2 = 1 \text{ нКл}; \quad Q_3 = 1 \text{ нКл}.$$

2. Зарисуйте картину линий в отчет (поле рисунка – не менее 14 клеточек по вертикали и 12 клеточек по горизонтали). Укажите значения зарядов.

3. Обратите внимание на те области, где густота линий больше. В этих местах будет высокая напряженность поля. Но даже в таких областях линии напряженности не пересекают друг друга.

#### Задание 3. Поле трех одинаковых зарядов

1. Измените значения зарядов на равные:

$$Q_1 = 3 \text{ нКл}; \quad Q_2 = 3 \text{ нКл}; \quad Q_3 = 3 \text{ нКл}.$$

2. Сравнив полученные результаты с предыдущим случаем, ответьте на вопрос: Как при этом изменяется распределение линий напряженности в различных областях пространства между зарядами?

#### Задание 4. Поле трех не одинаковых зарядов

1. Введите отрицательное значение для одного из зарядов:

$$Q_1 = -3 \text{ нКл}; \quad Q_2 = 3 \text{ нКл}; \quad Q_3 = 3 \text{ нКл}.$$

Рассмотрите конфигурацию поля. Отметьте для себя, где поле достигает наибольшей величины, а где напряженность поля меньше

всего. Чтобы посмотреть «издалека» на такую систему, изменим масштаб картины.

2. Введите следующие значения параметров:

$$X_1 = 1,8 \text{ см}; \quad X_2 = 1,6 \text{ см}; \quad X_3 = 2,0 \text{ см}; \quad M = 3; \quad MZ = 1,5.$$

Получив распределение, пересчитайте число линий напряженности поля, обходя три заряда по границе рисунка, и сравните с числом линий, создаваемым точечным зарядом в задании 1. Как связано полученное число линий с величиной полного заряда системы? Запишите в отчет Ваш вывод, указав условия, при которых систему зарядов можно принять за эквивалентный точечный заряд.

**Задание 5.** Поле диполя

1. Введите нулевое значение  $Q_2 = 0$ ;  $X_1 = 1,0$  см.

При таком выборе параметров моделирования Вы получите *диполь* – систему из двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов. Зарисуйте (схематично) распределение силовых линий диполя, укажите значения зарядов и расстояния между ними. Обратите внимание на симметрию картины.

2. Распределение линий зависит от величины расстояния между зарядами. Чтобы «почувствовать разницу», измените положение первого заряда, введя сначала  $X_1 = 1,5$  см, затем  $X_1 = 1,9$  см, и выполните расчеты, без зарисовки распределений в отчет.

3. Обратите внимание, как при этом уменьшается число линий поля снаружи диполя и как они «собираются» в область между зарядами. Что произойдет, когда координаты зарядов  $Q_1$  и  $Q_2$  будут отличаться на очень малую величину? Запишите Ваш вывод в отчет.

**Задание 6.** Поле трех зарядов в угловом положении

1. Введите следующие значения параметров:

$$Q_1 = 2,5 \text{ нКл}; \quad Q_2 = 5 \text{ нКл}; \quad Q_3 = 2,5 \text{ нКл}; \quad Z_1 = 0,5 \text{ см}; \\ X_1 = 1,5 \text{ см}; \quad X_2 = 1,5 \text{ см}; \quad X_3 = 2 \text{ см}.$$

2. По результатам моделирования опишите в отчете, в чем отличие полученной картины от распределения линий напряженности в случае линейного расположения зарядов.

**Задание 7.** Поле разных по знаку зарядов

1. Измените только значение  $Q_2 = -5$  нКл. Рассмотрите картину силовых линий и ответьте на вопрос: на поле какой системы зарядов похоже данное поле?

Чтобы аналогия стала еще заметнее, можно изменить расстояния между зарядами:

$$\text{сначала} \quad Z_1 = 0,3 \text{ см}; \quad X_1 = 1,5 \text{ см}; \quad X_2 = 1,5 \text{ см}; \quad X_3 = 1,8 \text{ см}; \\ \text{а затем:} \quad Z_1 = 0,1 \text{ см}; \quad X_1 = 1,5 \text{ см}; \quad X_2 = 1,5 \text{ см}; \quad X_3 = 1,6 \text{ см}.$$

2. Постарайтесь зарисовать последнее распределение, укажите значения зарядов и расстояний между ними.

### **Часть 2. Линии эквипотенциалей системы точечных зарядов**

Эта часть может выполняться как самостоятельная работа.

#### **Задание 1. Эквипотенциали точечного заряда**

1. Введите следующие значения параметров моделирования:

$$Q_1 = 2 \text{ нКл}; \quad Q_2 = 0 \text{ нКл}; \quad Q_3 = 0 \text{ нКл}; \\ Z_1 = 0; \quad X_1 = 0,5 \text{ см}; \quad X_2 = 1 \text{ см};$$

Значение первой потенциали  $P = 10 \text{ кВ}$ ;  $DP = 2 \text{ кВ}$ ;

Шаг сканирования  $S = 0,004 \text{ см}$ ;  $MZ = 0,8$ ;  $Z_0 = -0,7$ ;  $X_0 = -0,5$ .

Проверьте введенные значения и нажмите клавишу *Enter*.

2. Зарисуйте полученные результаты в отчет (рекомендованные размеры рисунка 14 x 14 клеточек). Укажите возле потенциалей, начиная с ближайшей к заряду, значения соответствующих потенциалов (они отличаются последовательно на 2 кВ от исходного значения 10 кВ).

3. Чтобы определить цену деления шкалы  $X$  и  $Z$ , рассчитайте, на каком расстоянии от точечного заряда  $Q = 2 \text{ нКл}$  потенциал будет равен 2 кВ. Для нахождения расстояния  $r$  преобразуйте формулу (9.9),

полагая  $\varepsilon = 1$  (для вакуума) и  $\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$ . Сравнив рассчитан-

ное значение с количеством делений на координатных осях, Вы найдете цену деления шкалы расстояний. Укажите единицы измерения около осей координат на Вашем рисунке.

#### **Задание 2. Поле диполя (нейтральной в целом системы)**

1. Измените знак одного из зарядов:  $Q_2 = -2 \text{ нКл}$ .

2. Зарисуйте полученные эквипотенциали, указав около каждого из зарядов по 3 эквипотенциали (наибольшее значение, наименьшее и промежуточное). Учтите, что красным цветом показана потенциал 10 кВ, последующие значения уменьшаются на 2 кВ. Белым цветом отмечена линия нулевого потенциала.

Обратите внимание на высокую симметрию формы эквипотенциалей с одинаковым по абсолютной величине значением потенциала. Каую форму имеет линия нулевого потенциала в данном случае?

#### **Задание 3. Поле двух неравных по величине зарядов**

1. Измените значения зарядов:  $Q_1 = 3,5 \text{ нКл}$  и  $Q_2 = -2 \text{ нКл}$ .

2. Зарисуйте форму эквипотенциалей для  $\varphi = 10 \text{ кВ}$ ,  $4 \text{ кВ}$ ,  $0 \text{ кВ}$ ,  $-4 \text{ кВ}$ , обратив внимание на симметрию кривых относительно координатной оси  $OX$ .

**Задание 4.** Влияние расстояния между зарядами на распределение линий эквипотенциалей

1. Введите  $Q_1 = -0,5$  нКл;  $Q_2 = 2,5$  нКл;  $X_2 = 0,8$  см.

Эти значения будут фиксированными. Исследуйте, как меняется форма семейств эквипотенциалей при изменении расстояния между точечными зарядами. Для сближения зарядов последовательно увеличьте значения координаты  $X_1$ :

(а) 0,4 см, (б) 0,45 см, (в) 0,6 см и (г) 0,75 см.

2. Определите по графику, на каком расстоянии от положительного заряда в случае (г) расположена эквипотенциаль 2 кВ, сравните это расстояние с полученным в задании 1.

Из сопоставления случаев (а) и (г) сделайте вывод о величине потенциала системы точечных зарядов на расстояниях, много больших по сравнению с размерами системы. Каким приближением для потенциала можно воспользоваться в таком случае?

**Задание 5.** Поле трех зарядов

1. Введите следующие значения величин зарядов и их координат:

$Q_1 = Q_2 = 1$  нКл;  $Q_3 = -2$  нКл;  
 $Z_1 = 0,3$  см;  $X_1 = 0,5$  см;  $X_2 = 0,8$  см.

Конфигурация зарядов будет аналогична расположению ионов в молекуле воды. Учтите, что в данном случае Вы исследуете электрически нейтральную систему точечных зарядов, тем не менее обладающую электрическим полем, отличным от нуля.

2. Зарисуйте (качественно) полученные результаты. Обратите внимание на то, как проходит линия нулевого потенциала. Укажите значения потенциала для нескольких эквипотенциалей по разные стороны от линии нулевого потенциала.

**Задание 6.** Самостоятельно рассмотрите случай неравных трех зарядов в угловом или (и) в линейном расположении.

В заключение работы ответьте на вопрос: Могут ли электрически нейтральные тела иметь электрическое поле?

Если могут, то от каких физических величин зависят его напряженность и потенциал?



## РЕКОМЕНДАЦИИ ПРЕПОДАВАТЕЛЯМ

Дидактической особенностью предлагаемого практикума является перевод учебных занятий в компьютерном классе в режим лабораторно-практических занятий. Основной методической идеей такой формы организации учебно-познавательной деятельности студентов является совмещение во времени элементов эмпирической деятельности (выполнение экспериментальной части заданий компьютерных лабораторных работ) и теоретической (сопоставление численных значений в заполненных таблицах, сравнение функциональных зависимостей, представленных в графической форме, анализ изменений формы графиков, выделение общего в поведении исследуемых процессов, формулирование выводов), а так же незамедлительное использование полученных при исследовании компьютерных моделей субъективно новых знаний для решения практико-ориентированных задач.

В таких условиях компьютер выполняет роль инструмента деятельности студента, не замещая и не вытесняя из учебного процесса живого преподавателя. Наоборот, роль преподавателя в синхронизации индивидуально-коллективной работы, в незамедлительной коррекции допускаемых ошибок, в психологической и эмоциональной поддержке студентов возрастает. Следует ясно понимать, что увеличение интенсивности и эффективности учебной деятельности обучаемых невозможно без роста интеллектуальной напряженности труда преподавателя, тем более при использовании компьютерных инструментов в учебном процессе.

Будет неверным полагать, что задания и указания по их выполнению, приведенные на экране компьютера в расчете на «среднего» студента, будут одиноково поняты всеми студентами, выполняющими под вашим руководством данную работу. Чтобы оценить трудоемкость выполнения той или иной работы и предвидеть возможные вопросы отстающих студентов, преподавателю необходимо выполнить данную работу в режиме реального времени в роли студента.

Отметим, что работы рекомендуется выполнять по их последовательности в практикуме, поскольку они здесь расположены по увеличению сложности и объема работ на занятии и при оформлении отчетов дома.

Авторы надеются, что приведенные далее рекомендации помогут преподавателям лучше понять как общую направленность конкретной работы, так и предвидеть ожидаемые результаты деятельности студентов на занятии и/или после него.

## 1. Траектории сложения движений

Дидактическая цель: сформировать у студентов понимание принципа независимости перемещений тела (материальной точки) и суперпозиции соответствующих траекторий.

Возможные затруднения, возникающие у некоторых студентов и рекомендации:

- при первом опыте ввода численных значений параметров моделирования, «кликая» мышкой на соответствующие экранные кнопки-стрелки, забывают установить пределы по осям координат. Необходимые для этого стрелки расположены не в списке параметров, в непосредственно около соответствующих координатных осей экранного поля.

- При зарисовке траекторий в отчет не обращают внимание на кривизну линий в случае неравенства ускорений (задание 1.3). При правильном отражении формы траекторий на рисунках студентов должен получаться образ стрелки с симметрично выгнутыми краями, направленной в точку старта.

- Не понимают принципиальной разницы между зависимостями координат от времени, представленными на верхнем координатном поле и траекториями, представленными на нижнем экранном поле. То и другой принимают за траектории. Необходимо напомнить студентам, что для получения траектории необходимо исключение времени из рассмотрения, это зафиксированный в пространстве след движения.

- Переход формы траектории от схождения к центру диска на противоположное (раскручивающаяся спираль) в случае равнозамедленного движения по радиусу диска (задание 2.2) вызвано изменением направления вектора радиальной скорости.

- Движение точки на краю диска при движении его центра со скоростью меньшей, чем рассчитанное для случая без проскальзывания (задание 3), отвечает случаю, когда колесо автомобиля заторможено, но автомобиль продолжает движение «юзом». Эта ситуация эквивалентна движению точки на диске который катится без проскальзывания, но при меньшем расстоянии от центра. Поэтому траекторию называют укороченной циклоидой. При движении точки на реборде колеса вагона, при его движении без проскальзывания по рельсу, расстояние до точки больше радиуса колеса. В таком случае получают удлиненную циклоиду. В задании 3 величину радиуса не меняют, чтобы сопоставить «нормализованные» на единый радиус изменения формы траекторий.

- При качении колеса по окружности, траектории точек колеса описывают эпициклоиды или гипоциклоиды в зависимости от того,

снаружи или внутри окружности происходит движение. Чтобы получить при сложении двух вращательных движений (центра колеса и самого колеса вокруг центра) целое число циклоид, необходимо выполнение простого условия – на длине окружности должно укладываться целое число длин окружности колеса  $2\pi R_0 = n(2\pi R)$ , или  $R_0 = nR$ .

- В данной части работы величина радиуса расположения точки на колесе не нормируется (как это делалось в предыдущем задании) и по результатам выполнения задания 4.2 можно ясно видеть отличия в формах укороченной и удлиненной эпициклоид от формы обычной эпициклоиды.

## 2. Поступательное движение тела в однородном силовом поле

Дидактическая цель: сформировать у студентов понимание принципа независимости действия сил различной физической природы на тело, закрепить навык анализа роли различных сил в процессе движения.

Возможные затруднения и рекомендации:

- Как правило, студенты считают, что в воздухе тело пролетит на большее расстояние, поскольку преувеличивают роль силы сопротивления при движении в воде и не обращают внимание на действие выталкивающей силы, которая «поддерживает» тело в полете.

- Не могут правильно изобразить в отчете форму криволинейных траекторий, поскольку нет навыка ее «привязки» к координатной сетке, имеющейся на экранном поле.

- Не понимают смысла отрицательных значений вертикальной проекции вектора скорости, график изменения которой в процессе движения строится на нижнем координатном поле. Следует напомнить правило проектирования вектора на выбранную ось.

- Затрудняются подобрать слова для описания формы траекторий движения. Необходимо дать пример возможной формулировки с указанием на различие скорости подъема кривой до максимального значения и ее спада после прохождения максимума, ввести понятие асимметрии.

- В случае заметной асимметрии траектории многие студенты считают, что после прохождения максимума траектории тело падает быстрее, чем оно поднималось. Поэтому, для анализа процесса движения тела необходимо совместно использовать два экранных поля. Напомнить, что темп изменения графика вертикальной компоненты скорости тела (наклон графика к оси времени на нижнем экранном поле) представляет собою величину ускорения подъема и падения в данной среде.

- При обсуждении результатов экспериментов (задание 3) следует дать запись выражения для максимальной высоты подъема тела в жидкой среде из условия равенства начальной кинетической энергии тела работе результирующей силы без учета сил сопротивления движению. Возможность такого пренебрежения следует из практического совпадения величин модулей скоростей броска и падения на поверхность Земли (использовать данные, полученные на нижнем координатном поле).

- В задании 3.3 следует записать выражение для результирующей трех действующих сил. Тогда станут понятны условия, при которых сила сопротивления сможет оказать заметное действие по сравнению с силой Архимеда (на участке падения они обе войдут в искомое выражение со знаком минус).

$$F_{рез} = g \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_t - g \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_c - 6\pi\eta Vr$$

Обратите внимание студентов, что в соотношении сил Архимеда и трения при малом радиусе тела (дробинка,  $r \ll 1$  м) роль выталкивающей силы будет уменьшаться, а для тел с высоким значением плотности основная роль в величине результирующей силы всегда будет принадлежать силе тяжести.

- Самостоятельную работу экспериментального или теоретического характера можно предлагать более подготовленным студентам, эта часть работы зависит от профиля факультета, студенты которого выполняют работы данного практикума. Приведем общее выражение для высоты подъема тела в вязкой жидкости с учетом силы сопротивления движению

$$h = \frac{2V_0^2 r^2 \rho_t}{4g(\rho_t - \rho_c)r^2 + 9V_0\eta}$$

из которой как частные случаи следуют формулы для высоты подъема в газах (положить  $\rho_t \rightarrow 0$ ) и без учета сил сопротивления (положить  $\rho_t \rightarrow 0$  и  $\eta = 0$ ).

При исследовании движения тела в режиме турбулентного обтекания тела средой важно пояснить студентам, что квадратичная зависимость силы сопротивления от величины скорости имеет существенное значение на начальном этапе движения, когда скорость броска велика. Быстрое уменьшение скорости тела приводит к переходу турбулентного режима обтекания в ламинарный и в дальнейшем этот режим сохраняется до момента падения тела на землю.

### 3. Движение заряженных частиц в магнитном и электрическом полях

Дидактическая цель: выявить особенности движения тела в поле сил, направленных под углом к вектору скорости. Если в предыдущей работе исследовалось поступательное движение, то здесь исследуется вращательное движение материальной точки.

Возможные затруднения и рекомендации:

- Как определить «настоящий» размер радиуса траектории заряженной частицы в магнитном поле? Следует пояснить, что задачей работы является экспериментальное установление характера функциональных зависимостей, без привязки к той или иной системе единиц измерения. Поэтому можно производить все измерения в относительных единицах измерения расстояний, в частности, использовать любую линейку с равномерно нанесенными делениями. Из практических соображений лучше применить обычную линейку с миллиметровыми делениями. Причем, в ячейку размера радиуса траектории можно записывать измеренные значения диаметра, это не повлияет на выявление характера функциональных зависимостей, однако уменьшит относительную погрешность измерений. Построение графиков в таком случае так же облегчается.

- Заряд частицы выражен в единицах заряда электрона, как, например, это принято выразить для ионов в химии. Аналогично выражена во внесистемных единицах измерения масса частицы. Фактически моделируем движение ионов в магнитном поле.

- Построение графиков зависимостей можно оставить на домашнюю работу, однако на занятии необходимо сравнить численные значения в таблице 1 для кратных значений величин заряда (в 2, 3, 4 раза и др.), чтобы оценить исследуемую зависимость качественно.

- В задании 4 при изменении угла влета от  $70^\circ$  до  $90^\circ$  шаг спирали изменяется линейно и это, на первый взгляд, противоречит формуле (3.2). Противоречие разрешается, если воспользоваться приближением  $\sin\alpha \approx \alpha$  для малых углов, значения которых выражены в радианах.

- При выполнении контрольного задания, в области поля с меньшей величиной индукции студенты часто увеличивают радиус траектории, оставляя без изменения шаг спирали. Следует пояснить, что при этом возрастает время прохождения большего пути и, поэтому, одновременно происходящее равномерное смещение частицы вдоль вектора индукции (шаг спирали) тоже должно возрасти.

- Для выявления отличия в действии поля электрических сил желательно выполнить задание 1 из раздела самостоятельной работы.

Здесь ускоренное движение под действием силы электрического поля вызывает изменение шага спирали по квадратичной зависимости от времени. Поэтому наблюдается заметное возрастание расстояний между соседними витками траектории движения заряженной частицы.

#### **4. Гармонический и ангармонический осциллятор**

Дидактическая цель: выявить основные отличия в колебательном движении ангармонического осциллятора по сравнению с идеальным гармоническим осциллятором.

Возможные затруднения и рекомендации:

- При построении графика вынужденных колебаний студенты соединяют точки отрезками прямой (ломаной) и максимум резонансной кривой получается треугольной формы. Следует пояснить, что в таком случае первая производная должна испытывать в максимуме разрыв, что неверно. В максимуме большинства физических зависимостей можно определить конечную величину производной функциональной зависимости. Поэтому, форма максимума резонансной кривой должна быть сглаженной.

- При резонансе вынуждающая сила выполняет только положительную работу, увеличивая амплитуду колебаний, тогда как при несовпадении частот в определенные моменты времени вынуждающая сила направлена против движения осциллятора и уменьшает его кинетическую энергию.

- Перед выполнением задания 3 необходимо распределить варианты индивидуальных заданий среди студентов. Таблица вариантов приведена в описании работы на С. 27 данного пособия. Варианты взаимно дополняют друг друга и позволяют за одно и то же время получить больший объем экспериментальных результатов. После завершения процедур измерений нет проблем в обмене данными внутри подгруппы из четырех человек. При этом достигается повышение к.п.д. занятия и для построения функциональных зависимостей используется большее число результатов измерений.

- Следует стимулировать обсуждение общих результатов внутри подгрупп. Например, добавляя баллы оценки работы за более детальное описание результатов и корректные выводы.

- Многие студенты первого года обучения «не находят слов» для описания процесса затухающих колебаний ангармонического осциллятора после занятия, при подготовке отчета. Поэтому, следует совместно обсудить во время занятия характерные черты процесса в устной форме.

Обратить внимание студентов на то, что выравнивание периодов последующих колебаний свидетельствует о приближении процесса к режиму затухающих, но гармонических колебаний.

- Для единства экспериментального и теоретического исследования желательно (с учетом подготовленности студентов данного факультета) дать задание на поиск формулы для вычисления энергии разрыва осциллятора. После этого в развитие темы можно предложить оценить (используя закон сохранения энергии) величину начальной скорости, при которой осциллятор с заданными параметрами разрывается и сравнить с данными, найденными в процессе исследования модели.

### 5. Фазовые портреты колебаний

Дидактическая цель: сформировать понятие о фазовой плоскости и фазовых траекториях, описывающих процессы с новой точки зрения. Кроме того, расширяется область знакомства с различными типами ангармонических осцилляторов.

Возможные затруднения и рекомендации:

- Процесс моделируется и отражается на двух экранных полях, причем поле с голубым фоном является основным. В первой части необходимо активировать экранную кнопку  $U(x)$ , о чем студенты часто забывают.

- Пределы координат по соответствующим осям и значения коэффициентов упругости и ангармонизма задаются по индивидуальным вариантам, поэтому перед выполнением первой части работы необходимо произвести распределение вариантов среди студентов. При этом каждый из них должен записать, какую из двух таблиц он должен заполнить, значение заданного ему по варианту коэффициента и пределы по осям координат. Таблица вариантов приведена в описании работы (С. 36).

- В отчетах студентов должны быть заранее подготовлены к заполнению две таблицы 1 и 2, одну из них каждый студент заполняет по результатам выполнения своего варианта, другую «заимствует» при обмене с одним из соседей.

- При зарисовке конфигурационных кривых необходимо правильное отображение положений минимумов кривых (равновесных положений). Напомните студентам об имеющейся на экранном поле координатной сетке, она должна быть и на рисунках в отчетах.

- При анализе результатов по первой части работы (как правило, после выполнения всех измерений или дома) необходимо найти выражение для величины энергии, при которой возможен переход осциллятора из одного равновесного положения в альтернативное. Это

требует подстановки значений координат равновесных положений, определяемых по равенству (5.7) в формулу (5.6). Об этом следует напомнить студентам перед завершением занятия.

- При отображении формы фазовых траекторий необходимо обращать внимание на их симметрию по одним положениям и асимметрию по другим, в зависимости от значений вводимых параметров моделирования.

- В задании 3.3 выход на большую область фазовой плоскости при больших величинах начальной скорости вызван тем обстоятельством, что кинетическая энергия осциллятора становится больше энергии, необходимой для перехода между двумя альтернативными положениями равновесия.

- Выполнение задания 4 во многом носит игровой характер, подбор искомых значений выполняется методом проб и ошибок. Не следует здесь торопить студентов, ориентируйте их на поиск наилучшего приближения.

- Как и в предыдущих работах, количество выполняемых заданий и возможность самостоятельного исследования зависят от уровня подготовленности студентов того или иного факультета. Самостоятельное исследование вполне можно рекомендовать студентам элитного отделения.

## **6. Анализ процессов сложения колебаний**

Дидактическая цель: закрепить понимание принципа независимости перемещений тела в пространстве на примере суперпозиции двух колебательных движений. Одновременно исследуются эмерджентные свойства системы из двух осцилляторов, которые отсутствуют у разъемных составляющих, в частности – биения и фигуры Лиссажу.

Возможные затруднения и рекомендации:

- Форма результирующих колебаний достаточно сложная для переноса изображений с экрана в отчет. Следует обратить внимание студентов на поведение осевых линий и на возможность сначала зарисовать положения вспомогательных огибающих линий, между которыми следует отрисовывать высокочастотные колебания без точного воспроизводства действительной частоты колебаний (200 Гц!). Главное, чтобы на рисунках была сохранена периодичность высокочастотных колебаний.

- После заполнения полей каждой из таблиц в отчетах должны быть сделаны выводы о наблюдаемых зависимостях, по крайней мере на качественном уровне.



- После выполнения задания 3 выводы должны носить количественный характер: частота биений определяется разностью частот складываемых колебаний.

- При выполнении задания 4 необходимо напомнить студентам, что период колебаний определяется как величина обратная частоте колебаний, а интервал периодичности  $T_{\text{пер}}$  – минимальное время, после которого наблюдается повторение формы кривой  $x(t)$ .

- Во время изучения фигур Лиссажу необходимо продемонстрировать возможные ошибки компьютерного моделирования при неверном выборе шага интегрирования уравнений движения. Для этого величина шага должна быть намеренно установлена на уровне значений периодов складываемых колебаний. Тогда будут получены ложные фигуры Лиссажу. Поскольку в этом случае путем эвристического выбора параметров моделирования можно получить необычно выразительную форму получаемых фигур, можно стимулировать студентов на их поиск.

- При выборе названия для найденных необычных форм, попросите студентов отойти от бытовых ассоциаций («кабачок», «лестница», «звездочка» и др.) в сторону более образных названий.

- Для создания вращательного движения основания жгутика бактерии нет необходимости во вращательном движении молекул белков внутри клетки. Достаточно создать там взаимно перпендикулярные периодические движения (сокращения и расширения) белковых молекул, окружающих «стержень», к которому снаружи прикреплен жгутик. Как показывают результаты исследования фигур Лиссажу, при соответствующем сдвиге по фазе колебаний результирующие траектории могут иметь вид окружности.

## 7. Динамика нелинейного воспроизводства популяции

Дидактическая цель: развитие понятия о нелинейных процессах и о появлении в них элементов детерминированного хаоса.

Возможные затруднения и рекомендации:

- Возникает вопрос: в чем отличие управляющего параметра  $R$  от переменной  $Y_0$ ? Для ответа на него необходимо напомнить студентам, что в данной работе рассматривается зависимость конечной величины численности популяции (как результат, к которому система приходит после достаточно большого числа циклов итерации) от величины начальной популяции (исходное положение системы). Затем оно будет воспроизводиться с изменениями и от величины некоторой константы процесса  $R$ , не изменяющейся при итерациях. В то же время, при ис-

следовании влияния  $R$  на величину конечного состояния используется другое, не рекуррентное соотношение, где  $R$  рассматривается как аргумент функции  $Y^* \approx 1 - (1/R)$ .

- Результаты расчетов представлены на экране дискретной последовательностью цветных точек. При переносе зависимостей в отчет можно рекомендовать студентам сначала провести вспомогательную линию, показывающую ход зависимости, а потом расположить на ней равномерно экспериментальные значения. При этом пояснить, что условная «осевая» линия не является выражением непрерывной функциональной зависимости, но к ней можно придти, если сильно «сжать» масштаб по оси аргумента, когда отдельные точки начнут «касаться» друг друга.

- В задании 3 лучше все зависимости без бифуркаций представить сплошными линиями без точек и только бифуркационную зависимость показать «звездочками», которые должны располагаться на двух вспомогательных линиях зиг-загом. Для наглядности потом можно звездочки соединить, чтобы выделить последовательные переходы между двумя уровнями.

- Начальное и конечное положения системы в зависимости от количества итераций (циклов смены популяций), найденные по заданию 4, рекомендовано привести на одном и том же рисунке, желательно в двух разных цветах.

- В завершение занятия следует пояснить возможность обратного перехода от режима со многими возможными состояниями (трудно прогнозируемого и близкого к хаотическому режиму) к более определенной ситуации за счет уменьшения величины управляющего параметра.

## 8. Компьютерное моделирование эффекта Доплера

Дидактическая цель: установить линейный характер зависимости изменений величины принимаемой длины волны от скорости движения источника волн и использовать ее для решения одной из научных задач (оценки орбитальной скорости движения частиц диска аккреции вещества возле Черной дыры).

Возможные затруднения и рекомендации:

- Измерения расстояний между волновыми фронтами, построенными на экране через период колебаний (то есть, длин волн) по делениям линейки, представленной на экране, вызывает затруднения. Поэтому можно рекомендовать производить все измерения расстояний с помощью обычной линейки с миллиметровыми делениями. При этом можно определить реальную цену деления этой линейки в метрах, если

учесть, что при введенных значениях параметров моделирования по заданию 1, расстояние между фронтами волн должно равняться 330 м (в воздухе волна с частотой 1 Гц и фазовой скоростью звука 330 м/с пройдет за период одного колебания расстояние 330 м).

- При построении графиков зависимости величин двух волн (принимаемых при удалении источника от наблюдателя и при сближении) от относительной скорости источника студенты соединяют точки ломаной линией. Необходимо напомнить, что зависимости, проведенные (установленные) по средним положениям, более близки к истинным зависимостям. Поэтому, графики должны быть проведены по средним положениям всей серии экспериментальных значений.

- При словесном описании полученных результатов обязательно использования определения «линейно» для изменений как в случае удаления источника от наблюдателя, так и в случае их сближения.

- Необходимо формулировать выводы в виде обобщения, вместо указания численных значений давать сравнение конечных состояний с начальным. Например, отметить, что «при удалении источника волн от наблюдателя длина принимаемой волны линейно возрастает от  $\lambda_0$  до  $2\lambda_0$ ».

- Обязательно отметить образование ударной волны и уменьшение угла конуса Маха при дальнейшем, постзвуковом росте скорости движения источника волн.

- В контрольных заданиях (переход к режиму практического занятия) общее обсуждение со студентами положений краев приведенного в описании спектра следует свести к следующим значениям:  $\lambda_0 = 550$  нм;

$$\lambda_{\text{удаления}} = 670 \text{ нм};$$

$$\lambda_{\text{сближения}} = 450 \text{ нм}.$$

После чего величину орбитальной скорости частиц диска, являющихся источником зарегистрированных спектрометром волн, можно найти путем решения системы двух уравнений (из первого вычесть второе):

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{удаления}} &= \lambda_0 + V_0 T \\ \lambda_{\text{сближения}} &= \lambda_0 - V_0 T.\end{aligned}$$

Период волнового процесса найдем как  $T = c/\lambda_0$ .

Следует подчеркнуть, что приведенная оценка дана в рамках механической картины эффекта Доплера, и она должна рассматриваться как первое приближение. Тем не менее, она показывает ценность установленных на занятии закономерностей для решения одной из научных

проблем – оценки свойств объектов, расположенных от Земли на миллионы световых лет.

- В развитие темы можно предложить оценить массу самой Черной дыры, по тем тяготения удерживающей частицы на круговой орбите. Для этого достаточно записать равенство гравитационной силы и центростремительной и получить:

$$M = V^2 R / \gamma.$$

Альтернативный вариант: использовать равенство кинетической энергии и потенциальной. Если известен размер диска аккреции (в данном случае это 800 св. лет), то можно дать количественную оценку массы, заключенной в Черной дыре.

- Поскольку угол конуса Маха на рис. 8.3 близок к  $30^\circ$ , то синус угла равен 0,5 и скорость пули в два раза выше скорости звука. Здесь при нахождении величины угла конуса Маха следует иметь в виду то обстоятельство, что вектор фазовой скорости и линия фронта волны взаимно перпендикулярны.

## 9. Электрическое поле системы зарядов

Дидактическая цель: сформировать представление о наличии короткодействующих полей вокруг электрически нейтральных систем зарядов.

Возможные затруднения и рекомендации:

- Как правило, бытует представление о том, что нейтральность системы гарантирует отсутствие электрического поля в окружающем пространстве. При исследовании поля двух равных по абсолютной величине и противоположных по знаку зарядов (диполя) это представление должно быть уточнено. В отличие от системы, несущей электрический заряд, поле диполя локально, имеет высокую напряженность (большое число линий напряженности вокруг расположения зарядов) только на близких расстояниях.

- Уменьшение расстояния между зарядами эквивалентно тому, что наблюдение проводится с далеких, по сравнению с размерами системы, расстояний. В этом случае число линий напряженности вокруг зарядов уменьшается, следовательно, на далеких расстояниях напряженность поля резко убывает.

- Чтобы студенты смогли ответить на вопрос задания 5.3, напомните им обычно проводимый в школе эксперимент с электрофорной машиной, когда при достаточно высокой разности потенциалов и высо-

кой напряженности электрического поля между шарами происходит искровой разряд (молния).

- В электрической системе, содержащей три заряда и в целом электронейтральной, следует показать студентам присутствие диполей. Поле системы тогда определяется суперпозицией полей диполей.

- Обобщая результаты исследований студентов и завершая занятие рекомендуется сказать, что поле произвольной системы зарядов может быть представлено в виде ряда слагаемых (мультиполей).

Главным членом этого ряда является первое слагаемое, выражающее вклад от избыточного заряда системы. Для напряженности поля его величина уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния. Вторым по значению будет дипольный член, затем квадрупольный, октупольный и т.д. Вклады этих членов ряда обратно пропорциональны кратным степеням расстояния и имеют заметную величину только на близких (по сравнению с размерами системы) расстояниях. Аналогичные рекомендации можно дать для второй части работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тюрин Ю. И., Чернов И. П., Крючков Ю. Ю. Физика. Ч. 1. Механика и молекулярная физика: учеб. пособие для технических университетов. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. – 630 с.
2. Тюрин Ю. И., Чернов И. П., Крючков Ю. Ю. Физика. Ч. 2. Электричество и магнетизм: учеб. пособие для технических университетов. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. – 738 с.
3. Стародубцев В. А. Концепции современного естествознания: учеб. пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2005. – 184 с.
4. Стародубцев В. А., Малютин В.М., Заусаева Н. Н. Компьютерное моделирование процессов движения: Практикум. – Томск: Изд-во ТПУ, 1996. – 76 с.
5. Гладун А. А. Физика как культура моделирования // Физическое образование в вузах. – 1996. – Т.2. – №3.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	3
Траектории сложения движений .....	4
Поступательное движение тела в однородном силовом поле .....	10
Движение заряженных частиц в магнитном и электрическом полях .....	17
Гармонический и ангармонический осцилляторы .....	22
Фазовые портреты колебаний .....	29
Анализ процессов сложения колебаний .....	38
Динамика нелинейного воспроизводства популяции .....	47
Компьютерное моделирование эффекта Доплера .....	52
Электрическое поле системы зарядов .....	58
Рекомендации преподавателям .....	65
Литература .....	78

**Стародубцев Вячеслав Алексеевич  
Заусаева Нина Николаевна**

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОЦЕССОВ ДВИЖЕНИЯ**

Учебное пособие


Научный редактор	В.А. Стародубцев
Редактор	Н.Т. Синельникова
Верстка	Д.В. Сотникова
Дизайн обложки	О.Ю. Аршинова

Подписано к печати 24.04.2008. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».  
Печать Хероx. Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 4,20.  
Заказ 397. Тираж 200 экз.



Томский политехнический университет  
Система менеджмента качества  
Томского политехнического университета сертифицирована  
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.