

(\vec{r}_B — радиус-вектор точки B , проведенный из центра O),

$$x_B = a = \text{const.} \quad (5)$$

Проецируя (4) на ось x , с учетом (5) имеем

$$-OA \cdot \sin \alpha + AB \cdot \sin \beta = a. \quad (6)$$

Для определения угловой скорости $\omega_{AB} = \dot{\beta}$ звена AB и углового ускорения $\epsilon_{AB} = \dot{\dot{\beta}}$ нет необходимости выражать β из (6). Проще непосредственно дважды продифференцировать (6).

Имея в виду, что $\dot{\alpha} = \omega_{OA}$, получаем в результате первого дифференцирования

$$-OA \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{OA} + AB \cdot \cos \beta \cdot \omega_{AB} = 0. \quad (7)$$

Отсюда

$$\omega_{AB} = \omega_{OA} \cdot OA \cos \alpha / (AB \cdot \cos \beta). \quad (8)$$

Дифференцируя (7) и учитывая, что $\dot{\omega}_{OA} = \epsilon_{OA}$, имеем

$$OA \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \cos \alpha \cdot \epsilon_{OA} - AB \cdot \sin \beta \cdot \omega_{AB}^2 + AB \cdot \cos \beta \cdot \epsilon_{AB} = 0;$$

$$\epsilon_{AB} = \omega_{AB}^2 \operatorname{tg} \beta + OA(\epsilon_{OA} \cos \alpha - \omega_{OA}^2 \sin \alpha) / (AB \cdot \cos \beta). \quad (9)$$

Выражения (8) и (9) позволяют вычислять ω_{AB} и ϵ_{AB} для любого положения механизма, в частности для заданного ($\alpha = 0^\circ$, $\beta = 30^\circ$).

Заметим, что ω_{OA} и ϵ_{OA} входят в эти выражения со знаком «+» или «-» в соответствии с принятым направлением отсчета угла α . В данном случае $\omega_{OA} = 1,5$ рад/с, $\epsilon_{OA} = -2,0$ рад/с². Смысл знаков ω_{AB} и ϵ_{AB} определяется направлением отсчета угла β .

Модуль скорости точки B $v_B = |\dot{y}_B|$. Модуль ускорения $a_B = |\ddot{y}_B|$. Проецируя (4) на ось y , получаем

$$y_B = OA \cdot \cos \alpha + AB \cdot \cos \beta.$$

Отсюда после дифференцирования получаем

$$\dot{y}_B = -OA \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{OA} - AB \cdot \sin \beta \cdot \omega_{AB};$$

$$\ddot{y}_B = -OA \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \sin \alpha \cdot \epsilon_{OA} - AB \cdot \cos \beta \cdot \omega_{AB}^2 - AB \cdot \sin \beta \cdot \epsilon_{AB}.$$

Для определения скорости и ускорения точки C следует составить уравнения ее движения в координатной форме, проецируя радиус-вектор $\vec{r}_C = \vec{OA} + \vec{AC}$ на оси x и y .

Задание К.4. Кинематический анализ многозвенного механизма

Кривошип O_1A вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{O_1A} = 2$ рад/с. Определить для заданного положения механизма:

1) скорости точек A, B, C, \dots механизма и угловые скорости всех его звеньев с помощью плана скоростей;

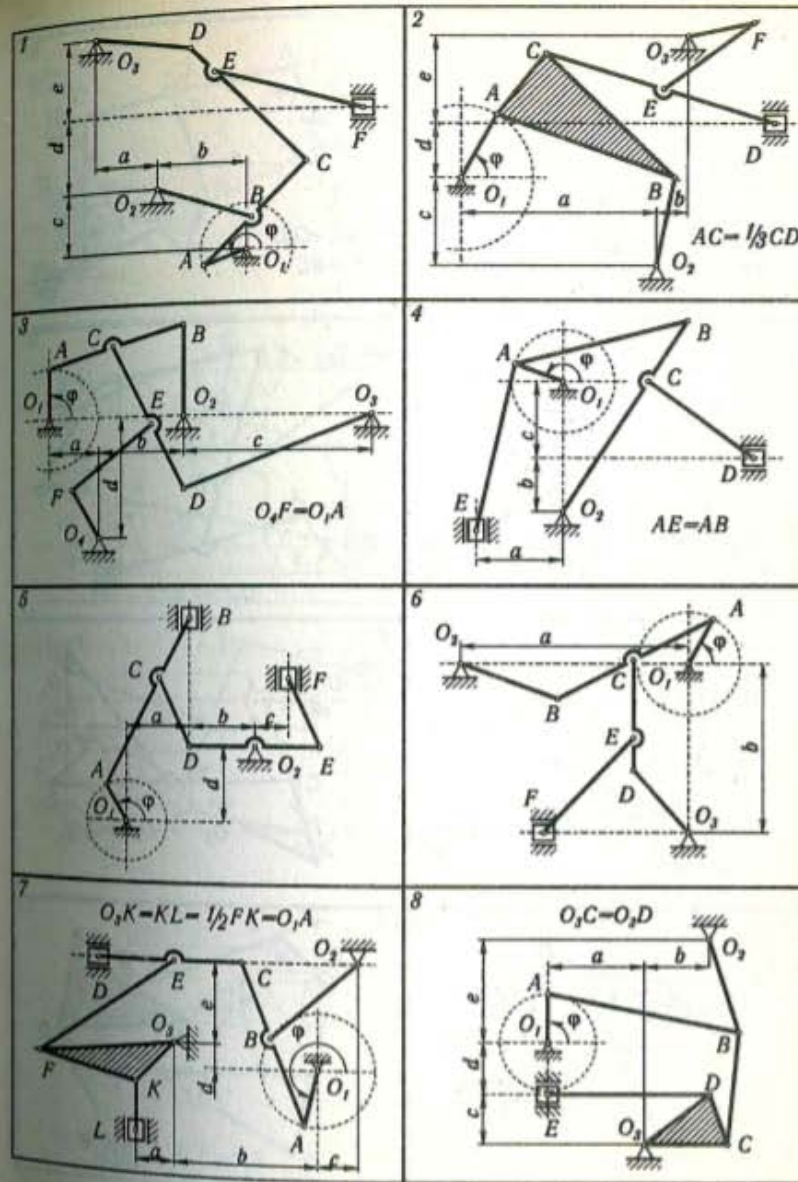


Рис. 80

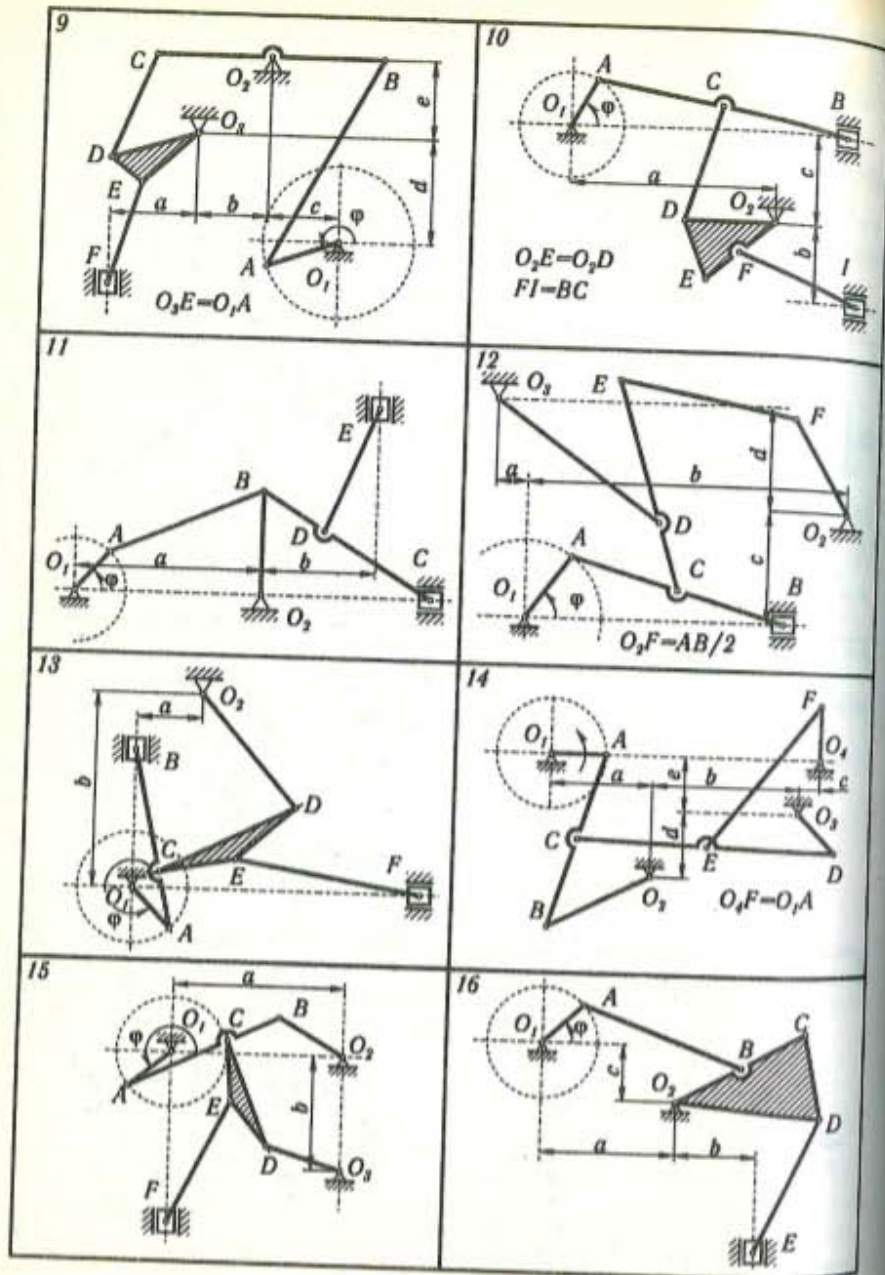


Рис. 81

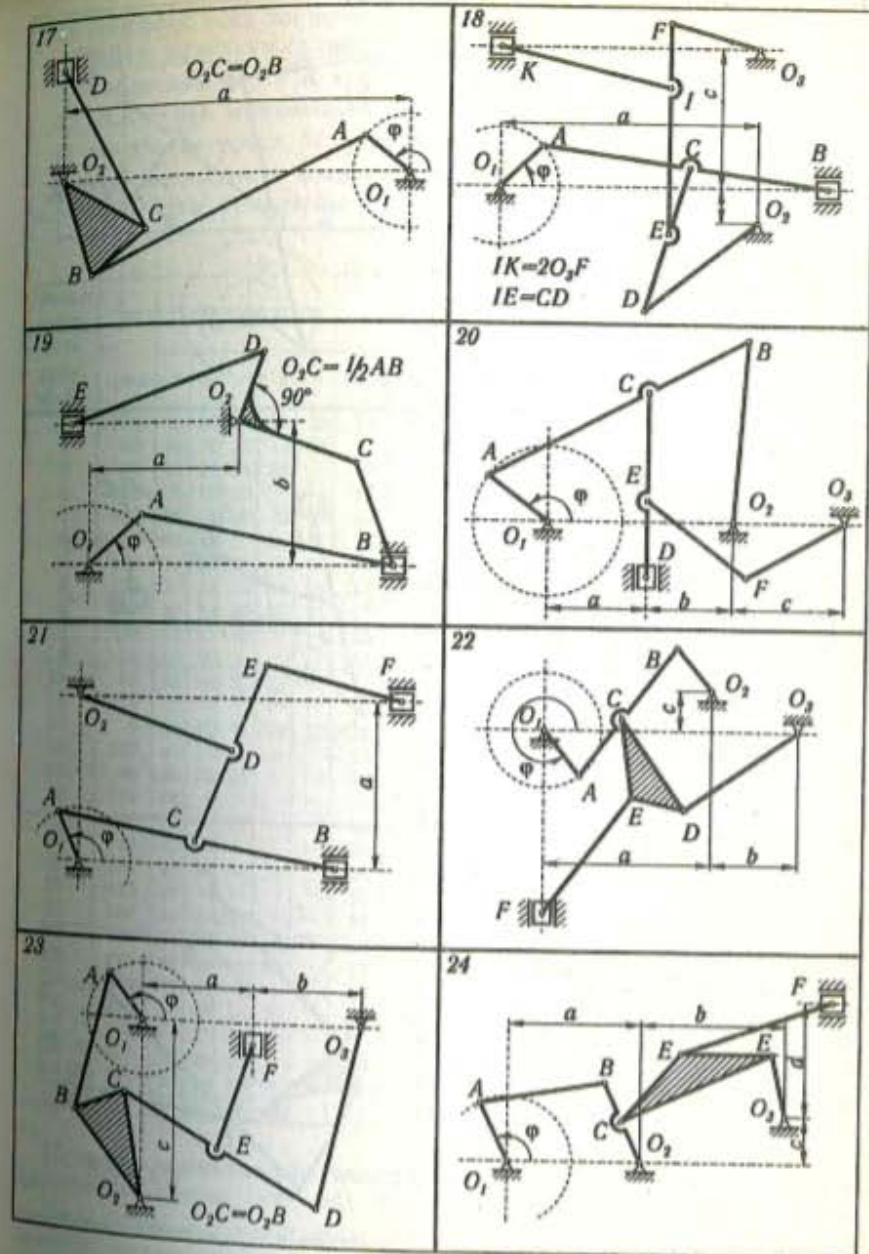


Рис. 82

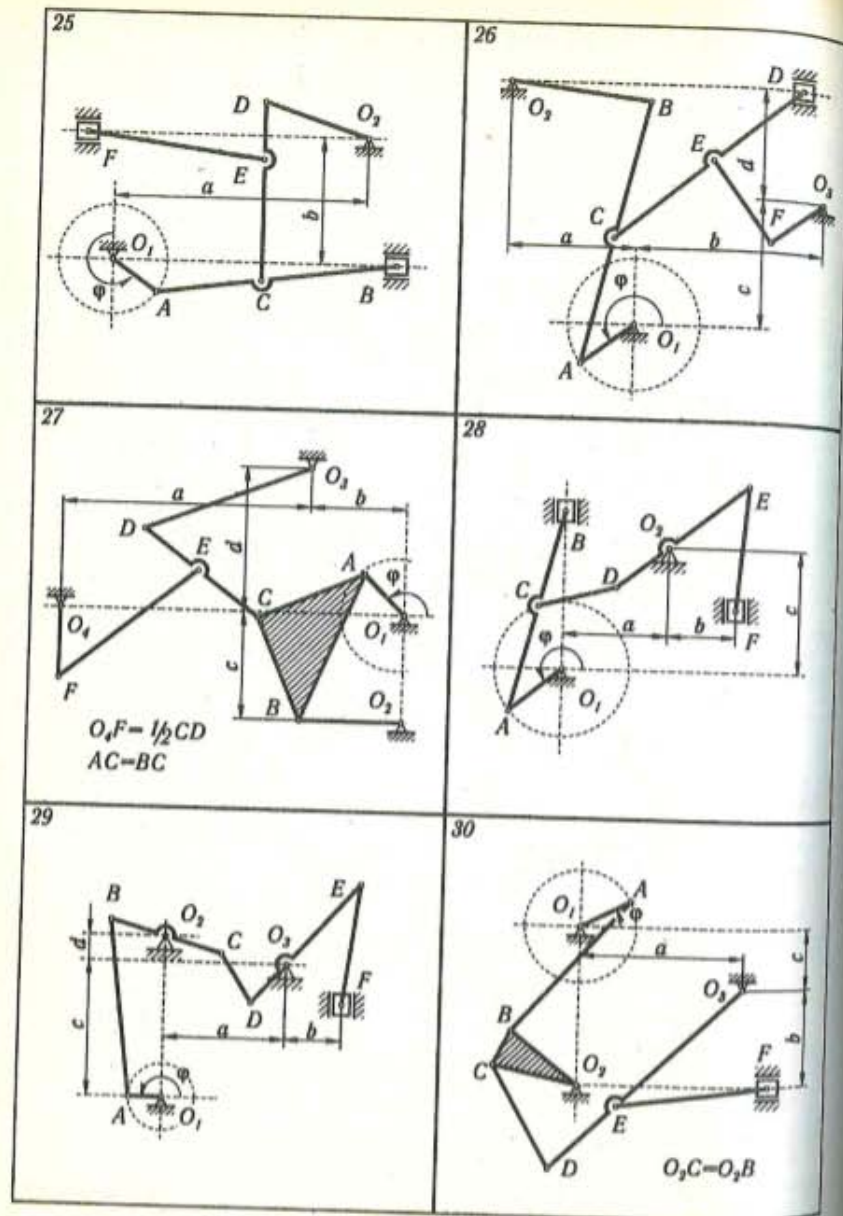


Рис. 83

- 2) скорости этих же точек механизма и угловые скорости звеньев с помощью мгновенных центров скоростей;
 - 3) ускорения точек A и B и угловое ускорение звена AB ;
 - 4) положение мгновенного центра ускорений звена AB ;
 - 5) ускорение точки M , делящей звено AB пополам.
- Схемы механизмов показаны на рис. 80—83, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 27.

Таблица 27

Номер варианта (рис. 80—83)	φ , град.	Расстояния, см					Длина звеньев, см										
		a	b	c	d	e	O_1A	O_2B	O_2D	O_3D	O_3F	AB	BC	CD	CE	DE	EF
1	200	18	23	18	22	23	14	28	-	28	-	21	21	48	38	-	42
2	60	56	10	26	16	25	21	25	-	-	20	54	52	69	35	-	32
3	90	15	25	54	35	-	15	28	-	58	-	42	21	47	26	-	31
4	155	26	15	23	-	-	15	65	-	-	-	51	22	38	-	-	-
5	125	19	19	10	22	-	12	-	19	-	-	55	19	23	-	38	22
6	60	65	49	-	-	-	15	29	-	24	-	50	25	32	23	-	39
7	250	11	42	11	7	24	16	34	-	-	41	25	25	42	21	-	49
8	90	27	18	14	15	30	14	29	-	23	-	55	32	15	-	45	-
9	200	23	19	20	28	21	21	31	-	25	-	65	62	31	-	11	29
10	20	55	21	25	-	-	15	-	24	-	-	70	35	33	-	17	12
11	50	50	30	-	-	-	14	29	-	-	-	45	54	34	-	37	-
12	55	10	86	32	28	-	21	-	-	55	-	60	30	19	60	-	49
13	315	17	54	-	-	-	15	-	40	-	-	50	35	40	22	22	50
14	0	28	40	6	18	15	15	31	-	15	-	50	25	70	35	-	50
15	220	46	31	-	-	-	15	20	-	20	-	45	15	31	17	17	37
16	40	36	22	15	-	-	15	20	40	-	-	45	20	24	-	40	-
17	145	96	-	-	-	-	15	28	-	-	-	84	20	51	-	-	-
18	45	70	9	37	-	-	16	-	39	-	25	78	38	41	19	-	57
19	40	42	39	-	-	-	20	-	20	-	-	71	30	-	-	57	-
20	145	27	24	30	-	-	20	50	-	-	30	80	32	58	29	-	35
21	115	46	-	-	-	-	15	-	45	-	-	78	39	26	52	-	38
22	305	46	23	11	-	-	15	15	-	38	-	44	25	30	22	15	40
23	130	31	30	50	-	-	15	30	-	50	-	40	16	60	30	-	30
24	115	36	39	13	31	-	17	23	-	17	-	35	11	45	25	25	44
25	325	72	36	-	-	-	15	-	30	-	-	76	46	50	35	-	51
26	215	36	53	36	32	-	19	40	-	-	19	76	38	68	35	-	29
27	140	71	27	32	40	-	16	30	-	50	-	46	33	40	20	-	50
28	215	30	20	35	-	-	19	-	19	-	-	59	29	24	-	48	36
29	180	35	15	38	7	-	10	16	-	15	-	50	33	16	-	45	33
30	25	46	28	17	-	-	16	25	-	75	-	50	11	33	-	26	44

Пример выполнения задания. Дано: 1) схема механизма в заданном положении (рис. 84); 2) исходные данные (табл. 28).

Решение. 1. Определение скоростей точек и угловых ускорений звеньев механизма с помощью плана скоростей.

а) Определяем скорости точек. Строим схему механизма в вы-

бранном масштабе (рис. 85). Вычисляем модуль скорости точки A кривошипа O_1A :

$$v_a = \omega_{O_1A} \cdot O_1A = 2 \cdot 12 = 24 \text{ см/с.}$$

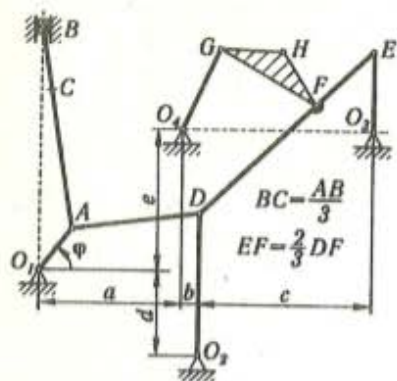


Рис. 84

Вектор \vec{v}_A перпендикулярен O_1A и направлен в сторону вращения кривошипа.

Строим план скоростей. Из произвольно выбранного полюса O проводим отрезок Oa , изображающий в выбранном масштабе скорость точки A . Для определения скорости точки B через полюс O проводим прямую, параллельную скорости \vec{v}_B , через точку a — прямую, перпендикулярную AB . Получаем точку b ; отрезок Ob определяет скорость точки B . Измеряем длину отрезка Ob и, пользуясь масштабом скоростей, находим $v_B = 17,5 \text{ см/с.}$

Таблица 28

φ , град.	Расстояние, см					Длина звеньев, см									
	a	b	c	d	e	O_1A	AB	AD	O_2D	DE	O_3E	FG	GH	FH	O_4G
52	32	4	39	19	32	12	46	29	32	53	18	25	14	14	20

Для определения скорости точки C делим отрезок ab плана скоростей в отношении $ac/cb = AC/CB$.

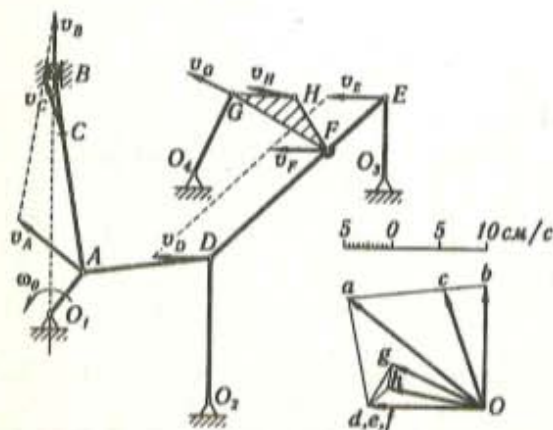


Рис. 85

Отрезок Oc изображает скорость точки C . Пользуясь масштабом скоростей, получаем

$$v_C = 17,5 \text{ см/с.}$$

Продолжая построение плана скоростей, находим $v_A, v_B, v_C, v_D, v_E, v_F, v_G, v_H$ (табл. 29).

На чертеже механизма концы векторов скоростей точек прямолинейного звена (например A, B, C или D, E) находятся на одной прямой.

Таблица 29

Способ определения	Скорости точек, см/с							
	По плану скоростей	24	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	14,8
С помощью мгновенных центров скоростей	24	17,3	17,5	17,4	17,4	17,4	14,6	14,1

б) Определяем угловые скорости звеньев механизма. Отрезок ab плана скоростей выражает вращательную скорость точки B вокруг точки A :

$$ab = v_{AB} = \omega_{AB} \cdot AB;$$

отсюда угловая скорость звена AB

$$\omega_{AB} = ab/AB = 19,5/46 = 0,424 \text{ рад/с.}$$

Аналогично определяются угловые скорости звеньев AD, DE, FGH :

$$\omega_{AD} = ad/AD;$$

$$\omega_{DE} = de/DE;$$

$$\omega_{FGH} = fg/FG.$$

Угловую скорость ω_{FGH} можно определить также из соотношений

$$\omega_{FGH} = gh/GH = fh/FH.$$

Угловая скорость звена O_2D определяется по вращательной скорости точки D вокруг неподвижного центра O_2 :

$$\omega_{O_2D} = v_D/O_2D.$$

Аналогично определяются угловые скорости звеньев O_3E, O_4G :

$$\omega_{O_3E} = v_E/O_3E; \quad \omega_{O_4G} = v_G/O_4G.$$

Вычисленные по этим формулам угловые скорости приведены в табл. 30.

Таблица 30

Способ определения	Угловые скорости звеньев, рад/с							
	AB	AD	DE	O_2D	O_3E	FGH	O_4G	
По плану скоростей	0,424	0,500	0	0,547	0,972	0,272	0,740	
С помощью мгновенных центров скоростей	0,421	0,505	0	0,544	0,967	0,278	0,730	

2. Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма с помощью мгновенных центров скоростей.

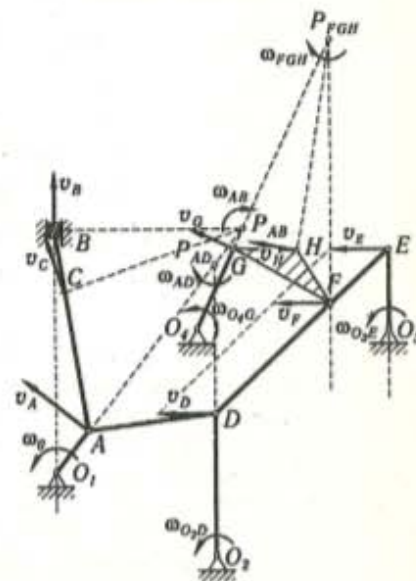


Рис. 86

а) Определяем положения мгновенных центров скоростей звеньев механизма. Строим схему механизма в выбранном масштабе (рис. 86). Звенья O_1A , O_2D , O_3E , O_4G вращаются вокруг неподвижных центров O_1 , O_2 , O_3 , O_4 .

Мгновенный центр скоростей P_{AB} звена AB находится как точка пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к их скоростям. Аналогично определяется положение мгновенных центров скоростей P_{AD} и P_{FGH} . Мгновенный центр скоростей звена DE находится в бесконечности.

б) Определяем скорости точек. Скорости точек звеньев механизма пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенных центров скоростей соответствующих звеньев.

Эти расстояния измеряются на чертеже.

Для определения скоростей точек B и C звена AB имеем пропорции

$$v_A/v_B = AP_{AB}/BP_{AB};$$

$$v_A/v_C = AP_{AB}/CP_{AB}.$$

Следовательно,

$$v_B = v_A \cdot BP_{AB}/AP_{AB};$$

$$v_C = v_A \cdot CP_{AB}/AP_{AB}.$$

Аналогично, для точки D звена AD

$$v_A/v_D = AP_{AD}/DP_{AD},$$

откуда

$$v_D = v_A \cdot DP_{AD}/AP_{AD}.$$

Так как мгновенный центр скоростей звена DE находится в бесконечности, то $v_E = v_F = v_D$.

Для определения скоростей точек G и H имеем пропорции $v_F/v_G = FP_{FGH}/GP_{FGH}$; $v_F/v_H = FP_{FGH}/HP_{FGH}$.

Следовательно,

$$v_G = v_F \cdot GP_{FGH}/FP_{FGH};$$

$$v_H = v_F \cdot HP_{FGH}/FP_{FGH}.$$

Пользуясь масштабом длин, определяем расстояния от точек до мгновенных центров скоростей.

Эти расстояния (в см) приведены в табл. 31.

Таблица 31

AP_{AB}	BP_{AB}	CP_{AB}	AP_{AD}	DP_{AD}	FP_{FGH}	GP_{FGH}	HP_{FGH}
57	41	41,5	47,5	34,5	62,7	52,8	50,8

Скорости точек, вычисленные по указанным формулам, приведены в табл. 29.

Одновременно с определением модулей скоростей точек находим их направления, а также направления вращений звеньев механизма.

Например, по направлению скорости точки A и положению мгновенного центра скоростей P_{AB} устанавливаем, что вращение звена AB происходит по часовой стрелке. Поэтому скорость точки B при данном положении механизма направлена вверх.

Аналогично определяем направления вращений остальных звеньев и направления скоростей точек механизма (рис. 86).

в) Определяем угловые скорости звеньев механизма. Скорость любой точки звена равна произведению угловой скорости этого звена на расстояние от точки до мгновенного центра скоростей:

$$v_A = \omega_{AB} \cdot AP_{BA} = \omega_{AD} \cdot AP_{AD}.$$

Отсюда определяем угловые скорости звеньев AB и AD :

$$\omega_{AB} = v_A/AP_{AB}; \quad \omega_{AD} = v_A/AP_{AD}.$$

Угловая скорость звена O_2D определяется по скорости точки D :

$$\omega_{O_2D} = v_D/O_2D.$$

Угловая скорость звена DE при данном положении механизма равна нулю, так как мгновенный центр скоростей звена в этом случае находится в бесконечности: $\omega_{DE} = 0$.

Аналогично определяем угловые скорости остальных звеньев механизма:

$$\omega_{O_3E} = v_E/O_3E;$$

$$\omega_{FGH} = v_F/FP_{FGH};$$

$$\omega_{O_4G} = v_G/O_4G.$$

Угловые скорости звеньев, вычисленные по указанным соотношениям, приведены в табл. 30.

3. Определение ускорений точек A , B , D и угловых ускорений звеньев AB и BD *

а) Определяем \vec{a}_A , \vec{a}_B и ϵ_{AB} (рис. 87). С помощью теоремы об ускорениях точек плоской фигуры определяем ускорение точки B :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^t.$$

Так как кривошип O_1A вращается равномерно, то ускорение точки A направлено к центру O_1 и равно

$$a_A = a_A^n = O_1A \cdot \omega_{O_1A}^2 = 12 \cdot 2^2 = 48 \text{ см/с}^2.$$

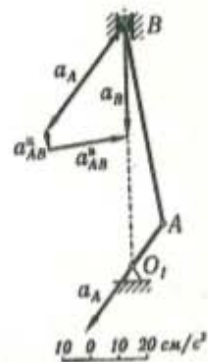


Рис. 87

* Условие задания предусматривает определение ускорений точек A , B и углового ускорения звена AB . Однако в примере определяются также ускорение точки D и угловое ускорение звена AD в соответствии с двумя случаями, встречающимися в задачах такого типа.