

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

**Е.В. Якимов**

## **ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ**

*Рекомендовано УМО по образованию в области приборостроения  
и оптоэлектроники в качестве учебного пособия для студентов высших  
учебных заведений, обучающихся по специальности 200106  
«Информационно-измерительная техника и технологии»*

2-е издание

Издательство  
Томского политехнического университета  
2011

УДК 621.372.037(075.8)

ББК 32.811.3я73

Я45

**Якимов Е.В.**

Я45 Цифровая обработка сигналов: учебное пособие / Е.В. Якимов; Томский политехнический университет. – 2-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 168 с.

ISBN 978-5-98298-854-6

В пособии изложены основы теории цифровой обработки сигналов, методы синтеза цифровых фильтров, дискретное преобразование Фурье, методы оценки погрешностей цифровых сигналов, особенности практической реализации алгоритмов цифровой обработки информации на базе процессоров.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 200106 «Информационно-измерительная техника и технологии».

**УДК 621.372.037(075.8)**

**ББК 32.811.3я73**

*Рецензенты*

Доктор технических наук, профессор  
заведующий кафедрой информационно-измерительной  
техники ТУСУРа

*А.А. Светлаков*

Кандидат технических наук, доцент  
директор ООО «НИИ ЭРМИС»

*А.Р. Свендровский*

**ISBN 978-5-98298-854-6**

© Томский политехнический университет, 2006

© Якимов Е.В., 2006

© Оформление. Издательство Томского  
политехнического университета, 2011

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	6
1. АНАЛОГОВЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ .....	7
1.1. Основные термины и определения .....	7
1.2. Детерминированные сигналы .....	11
1.3. Переходные непериодические сигналы.....	16
1.4. Аналоговые линейные системы .....	18
1.5. Контрольные вопросы .....	21
2. ЦИФРОВЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ.....	22
2.1. Структура системы цифровой обработки сигналов .....	22
2.2. Математические модели дискретных сигналов.....	24
2.3. Спектр дискретного сигнала.....	25
2.3.1. Связь между спектрами дискретного и аналогового сигналов, явление наложения спектров.....	26
2.4. Определение и классификация дискретных систем.....	31
2.5. Методы математического описания линейных дискретных систем во временной области и алгоритмы цифровой фильтрации на их основе .....	32
2.6. Методы математического описания сигналов дискретных систем на комплексной плоскости (в частотной области).....	35
2.7. Тестовые последовательности дискретных систем.....	38
2.8. Передаточная функция и частотная характеристика дискретной системы .....	43
2.9. Передаточные функции рекурсивных цифровых фильтров. Условие физической реализуемости .....	46
2.10. Частотные характеристики рекурсивных фильтров. Условие устойчивости .....	50
2.11. Формы реализации рекурсивных фильтров .....	52
2.12. Прямая форма реализации нерекурсивных фильтров.....	59
2.13. Передаточная функция и частотная характеристика нерекурсивного фильтра .....	61
2.14. Нерекурсивные фильтры с линейной фазочастотной характеристикой .....	61
2.15. Примеры решения задач по теории цифровых сигналов.....	63
2.16. Контрольные вопросы .....	68
3. ПОГРЕШНОСТИ КВАНТОВАНИЯ СИГНАЛОВ .....	69
3.1. Статистические характеристики погрешности квантования .....	69
3.2. Погрешность равномерного квантования при различных законах ее распределения.....	71

3.3. Погрешность от квантования при измерении среднеквадратичного и среднего значений величины.....	74
3.4. Определение погрешности от квантования с учетом суммирования с аддитивной погрешностью преобразования .....	77
3.5. Контрольные вопросы .....	78
<b>4. ПОГРЕШНОСТИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СИГНАЛОВ .....</b>	<b>79</b>
4.1. Аналитическое представление дискретизированного сигнала, равномерная и неравномерная дискретизация сигнала .....	79
4.2. Восстановление непрерывного сигнала из дискретизированного .....	81
4.3. Теорема В.А. Котельникова .....	84
4.4. Восстановление сигнала степенными полиномами, погрешности аппроксимации .....	85
4.5. Понятие об адаптивной дискретизации и сравнение различных видов аппроксимации .....	89
4.6. Контрольные вопросы .....	90
<b>5. ЦИФРОВЫЕ БИХ-ФИЛЬТРЫ .....</b>	<b>91</b>
5.1. Задачи и методы синтеза цифровых фильтров .....	91
5.2. Синтез рекурсивных фильтров по аналоговому прототипу .....	93
5.3. Метод билинейного преобразования .....	94
5.3.1. Общее описание метода .....	94
5.3.2. Билинейное преобразование .....	95
5.3.3. Методика синтеза РЦФ по аналоговому прототипу .....	97
5.3.4. Синтез аналогового ФНЧ-прототипа (АФПНЧ).....	99
5.3.5. Переход от АФПНЧ к ЦФ заданного типа .....	101
5.3.6. Пример синтеза фильтра методом билинейного преобразования.....	103
5.4. Контрольные вопросы .....	105
<b>6. ЦИФРОВЫЕ КИХ-ФИЛЬТРЫ .....</b>	<b>106</b>
6.1. Синтез нерекурсивных фильтров методом весовых функций .....	106
6.1.1. Описание метода .....	106
6.1.2. Свойства весовых функций .....	109
6.1.3. Весовые функции Кайзера .....	111
6.1.4. Импульсные характеристики идеальных ЦФ различного типа .....	113
6.1.5. Методика синтеза НРЦФ методом весовых функций.....	113
6.2. Синтез нерекурсивных фильтров методом частотной выборки ..	115
6.2.1. Описание метода .....	115
6.2.2. Методика синтеза НРЦФ методом частотной выборки.....	118
6.3. Контрольные вопросы .....	119

7. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ.....	120
7.1. Критерии численного синтеза цифровых фильтров.....	120
7.2. Контрольные вопросы .....	121
8. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ .....	122
8.1. Определение и свойства ДПФ .....	122
8.2. Фильтрация сигналов на основе ДПФ .....	126
8.3. Спектральный анализ сигналов: задачи, методы, параметры .....	128
8.4. Спектральный анализ сигналов на основе ДПФ .....	129
8.5. Определение и классификация алгоритмов БПФ.....	131
8.6. Алгоритм БПФ по основанию 2 с прореживанием по времени.....	132
8.7. Алгоритм БПФ по основанию 2 с прореживанием по частоте.....	138
8.8. Вычисление ОДПФ на основе алгоритмов БПФ .....	141
8.9. Контрольные вопросы .....	142
9. УСТРОЙСТВА ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ.....	143
9.1. Способы реализации алгоритмов ЦОС .....	143
9.2. Особенности алгоритмов ЦОС, влияющие на элементную базу .....	145
9.3. Основные свойства ЦПОС.....	148
9.4. Общие принципы построения и архитектура ЦПОС .....	150
9.4.1. Понятие об архитектуре процессора.....	150
9.4.2. Архитектура фон Неймана и Гарвардская архитектура .....	151
9.4.3. Структура процессора ЦПОС.....	152
9.4.4. Основные особенности процессоров ЦПОС.....	155
9.5. Основные типы ЦПОС .....	159
9.5.1. Классификация процессоров ЦПОС.....	159
9.5.2. Стандартные процессоры ЦПОС (Conventional DSP).....	160
9.5.3. Улучшенные стандартные процессоры ЦПОС (Enhanced-conventional DSP).....	162
9.5.4. Процессоры ЦПОС с архитектурой VLIW.....	163
9.5.5. Суперскалярные процессоры.....	164
9.5.6. Гибридные процессоры .....	164
9.6. Влияние архитектуры на возможности процессора.....	165
9.7. Контрольные вопросы .....	166
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	166
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	167

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время широкое распространение получает использование методов цифровой обработки сигналов (ЦОС) для решения различных задач (измерение и контроль в промышленных установках, телефония, радиолокация и радионавигация, обработка видеоизображений и т. д.). Однако в России ощутим дефицит инженеров, способных использовать алгоритмы и аппаратуру цифровой обработки.

Одной из причин такого положения является отставание в области математической подготовки студентов, связанное с изменением методики преподавания специальных дисциплин, когда большее количество времени отводится на самостоятельную работу. При самостоятельном изучении возникает проблема выбора соответствующей литературы. Как правило, большинство авторов книг по цифровой обработке сигналов стремится изложить максимальное количество сведений с использованием усложненной обобщенной теории. Однако при самостоятельном изучении дисциплины это может вызвать трудности в понимании материала.

Данное учебное пособие призвано помочь студентам, обучающимся по специальности 200106 «Информационно-измерительная техника и технологии», осуществить самостоятельную подготовку по дисциплине «Цифровая обработка сигналов». В пособии изложены основы теории математического описания цифровых систем, методов синтеза цифровых КИХ- и БИХ-фильтров, теории быстрого дискретного преобразования Фурье и его применения при фильтрации и спектральном анализе, а также некоторые особенности аппаратной реализации систем цифровой обработки сигналов на основе специализированных процессоров ЦОС.

В пособии приведены примеры анализа и расчета цифровых систем, контрольные вопросы, позволяющие акцентировать внимание на наиболее важных моментах.

## 1. АНАЛОГОВЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ

При подготовке раздела использованы источники [1, 4, 6, 16].

### 1.1. Основные термины и определения

**Информация** – свойство материи, отличное от ее вещественных и энергетических свойств, являющееся содержательной характеристикой **отражения**. Являясь свойством материи, информация может рассматриваться как **величина**.

**Физическая величина (ФВ)** – это свойство, общее в качественном отношении множеству объектов и индивидуальное в количественном отношении у каждого из них. Часто вместо термина «величина» применяют термин «параметр сигнала», понимая под сигналом физический процесс.

**Измерение** – нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств (**средств измерения**).

Таблица 1.1

*Систематизация физических величин*

Признак	Виды ФВ	Пояснение	Примеры ФВ
По видам явлений	Вещественные	Свойства веществ и их состав	Сопротивление, ТКС, диэлектрическая проницаемость
	Энергетические	Энергетические характеристики процессов	Напряжение, ток, мощность, энергия
	Информационные	Свойства, отражающие динамические и статические характеристики процессов	АЧХ, ФЧХ, корреляционная функция, суммы, разности, интегральные и дифференциальные значения
По принадлежности к различным группам физических процессов	Пространственные		Длина, скорость, ускорение
	Механические		Сила, давление, вязкость, твердость
	Электромагнитные		Напряжение, сила тока, сопротивление
	Тепловые		Температура, энергия, коэффициент теплопроводности
	Акустические		Коэффициент затухания,
	Световые		Сила света, освещенность
	Ионизирующих излучений		Поглощенная доза, период полураспада

Признак	Виды ФВ	Пояснение	Примеры ФВ
По степени условной независимости от других величин данной группы	Основные (условно независимые)	ФВ, входящие в систему и условно принятые в качестве независимых от других ФВ	Длина, время, масса, сила тока, температура, сила света, количество вещества
	Производные (условно зависимые)	ФВ, определяемые через основные ФВ системы	$A = \frac{d^2x}{dt^2}$ , A – ускорение, x – длина пути, t – время
По наличию размерности	Размерные (или абсолютные)	ФВ, в размерности которых хотя бы одна из основных ФВ возведена в степень, не равную нулю	
	Безразмерные (или относительные)	Отношение данной ФВ к одноименной, применяемой в качестве опорной	Коэффициент усиления, относительная плотность и удлинение

**Сигнал** – материальный носитель информации.

Сигналы могут быть двух видов:

- сигнал в виде физического процесса (информация заключена в размере информативного параметра);
- кодовый сигнал или дискретный (информация в числе элементов, их расположении во времени и пространстве).

В процессе измерения между объектом и техническими средствами устанавливается определенное взаимодействие, в результате которого возникает определенная реакция технических средств. ФВ является свойством и не может воздействовать на средство измерения.

**Объект измерения** – входной сигнал средства измерения  $x(t)$ , характеризующийся рядом изменяющихся величин (**параметрами сигнала**).

Для пассивных процессов измерение происходит по схеме, приведенной на рис. 1.1.

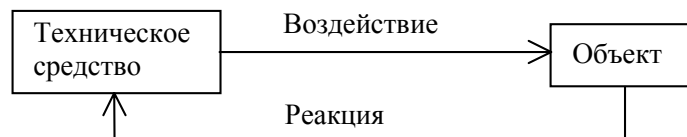


Рис. 1.1. Обобщенная схема измерения свойств пассивных процессов

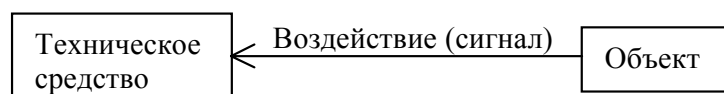


Рис. 1.2. Обобщенная схема измерения свойств активных процессов



Таблица 1.2

## Классификация измерений

Признак	Виды измерений	Пояснение
По наличию предварительного преобразования	Непосредственные	
	С предварительным преобразованием	
По наличию размерности	Абсолютные	
	Относительные	
По мерности величины	Одномерные	
	Многомерные	Например, вектор переменного тока по активной и реактивной составляющим
По характеру уравнения измерения	Прямые	$X_N = C \cdot N_X$ $C$ – цена деления $N_X$ – число делений по шкале
	Косвенные	$Y_N = f(X_{1N}, X_{2N})$
	Совокупные	Система уравнений для нахождения одноименных величин по их сочетаниям
	Совместные	Система уравнений для нахождения зависимости между разноименными величинами
По соотношению между числом измеряемых величин и уравнений измерения	Безызбыточные	
	Избыточные	
По способу осуществления избыточности	Многократные	
	Многоканальные	
По характеру закона изменения сигнала во времени	Статические / Динамические	
	Детерминированные / Случайные	

**Измерительное преобразование (ИП)** – операция преобразования входного сигнала в выходной сигнал, обладающий такими характеристиками, при которых возможно последующее измерение его информативного параметра, функционально связанного с информативным параметром входного сигнала.

Виды ИП:

- изменение физического рода сигнала (неэлектрический сигнал в электрический);
- функциональное преобразование (обычно линеаризация шкалы);

- согласование выходного сопротивления источника сигнала и входного сопротивления средства измерения (обеспечение минимальных искажений измеряемого параметра);
- согласование по уровню (масштабное преобразование);
- согласование по временной координате (частотный диапазон, момент начала отсчета, длительность измерения).

**Измерительный сигнал** – сигнал, обладающий информативными параметрами и содержащий информацию об их значении.

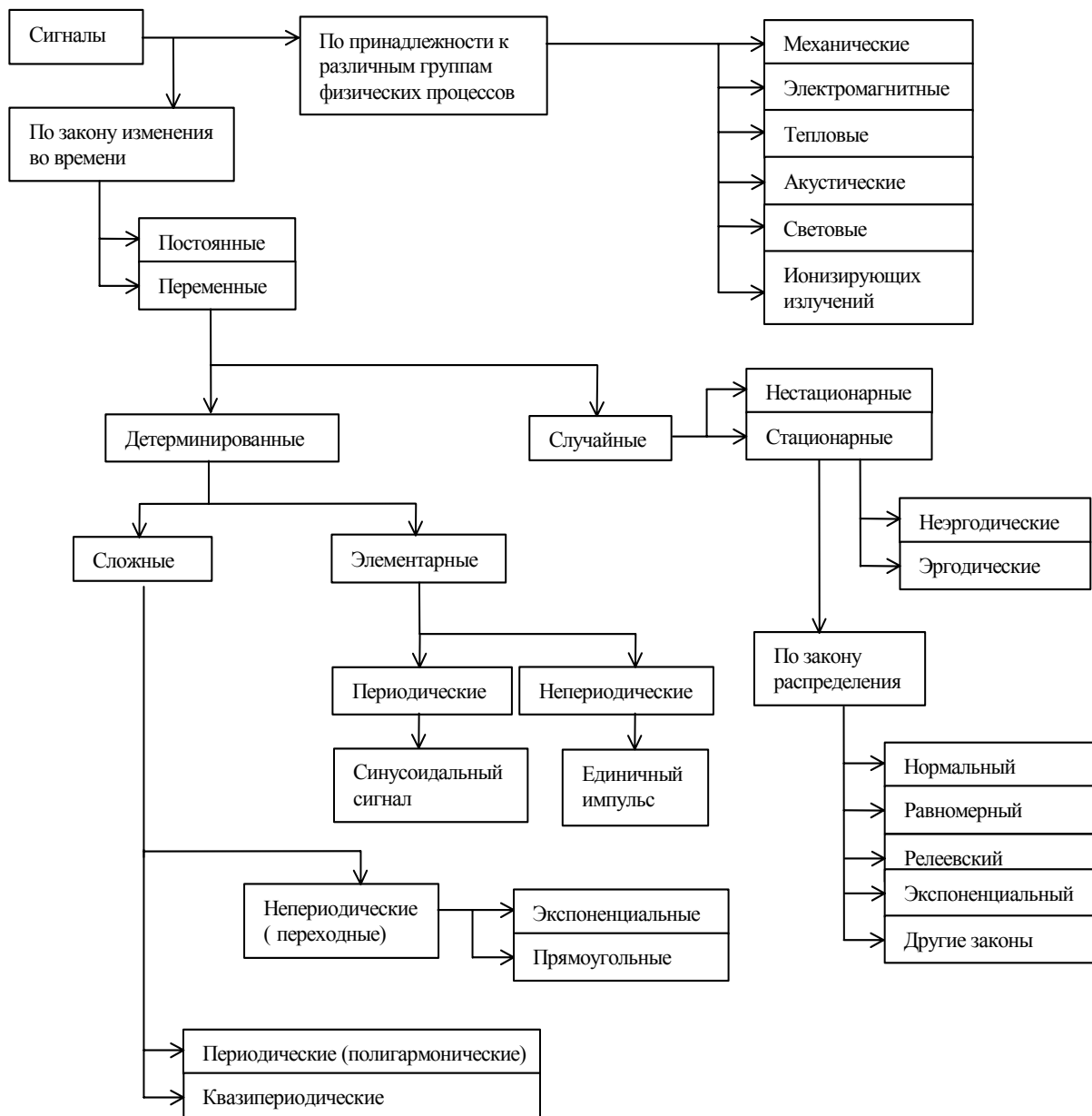


Рис. 1.3. Классификация сигналов

Различают четыре формы сигналов:

- непрерывные по времени и по размеру параметра  $x(t)$ ;
- непрерывные по времени и квантованные по размеру параметра  $x_{кв}(t)$ ;
- дискретные по времени и непрерывные по размеру параметра  $x_{д}(t)$ ;
- дискретные по времени и квантованные по размеру параметра  $x_{д,кв}(t)$ .

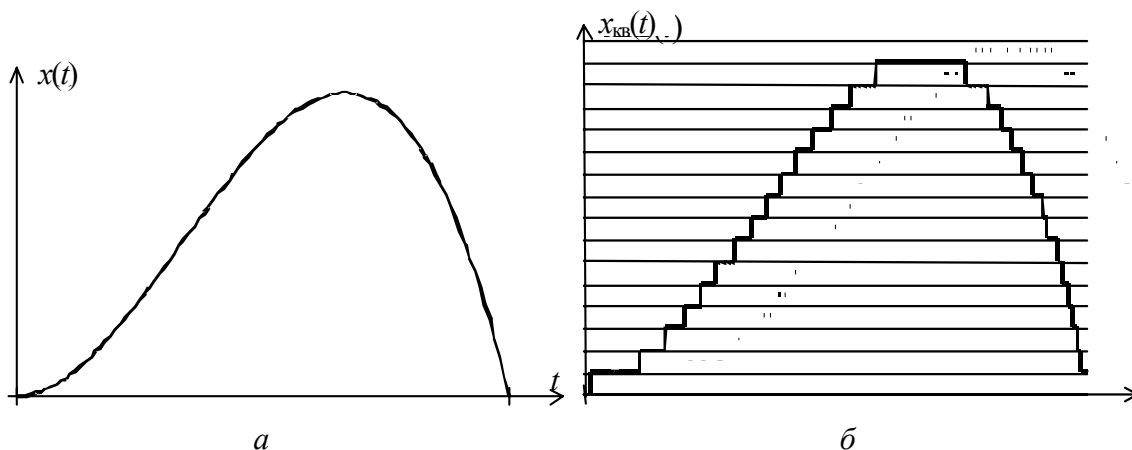


Рис. 1.4. Сигналы: а – непрерывный по времени и по размеру параметра; б – непрерывный по времени и квантованный по размеру параметра

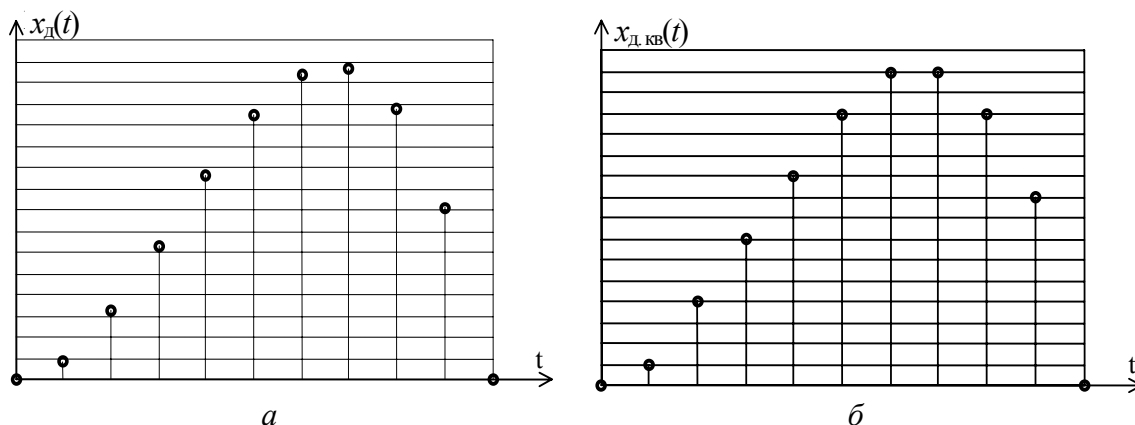


Рис. 1.5. Сигналы: а – дискретный по времени и непрерывный по размеру параметра; б – дискретный по времени и квантованный по размеру параметра

## 1.2. Детерминированные сигналы

Детерминированные сигналы подразделяют на элементарные и сложные. К элементарным сигналам относят постоянный сигнал, идеальный единичный импульс, синусоидальный сигнал.

### Постоянный сигнал

$$x(t) = x_0 = \text{const}, \text{ при } t > t_0.$$

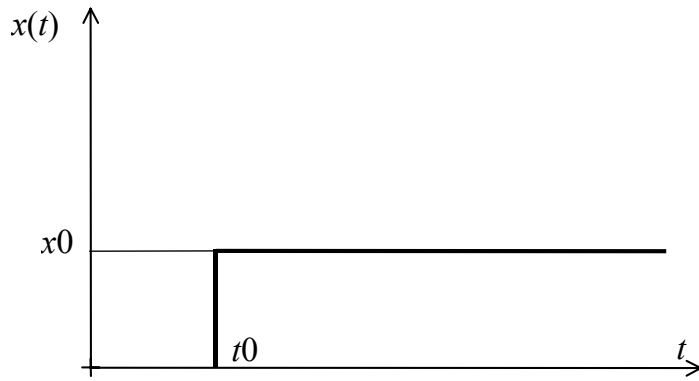


Рис. 1.6. Постоянный сигнал

### Идеальный единичный импульс

Идеальный единичный импульс описывается дельта-функцией, которая имеет следующие свойства:

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0; \\ \infty, & t = t_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

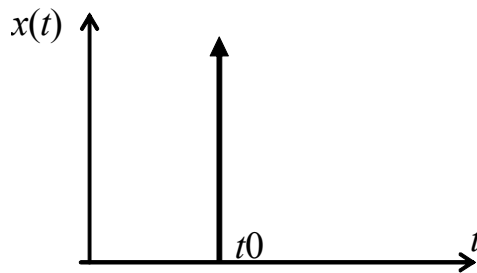


Рис. 1.7. Сигнал в виде  $\delta$ -функции

$$\int_0^{\infty} \delta(t-t_0) dt = \mathbf{1}(t-t_0) = \mathbf{1} \text{ при } t \geq t_0, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{1}(t-t_0)$  единичная функция.

$$\frac{d \mathbf{1}(t-t_0)}{dt} = \delta(t-t_0). \quad (1.3)$$

При использовании идеального интегратора или дифференциатора возможно взаимное преобразование сигналов.

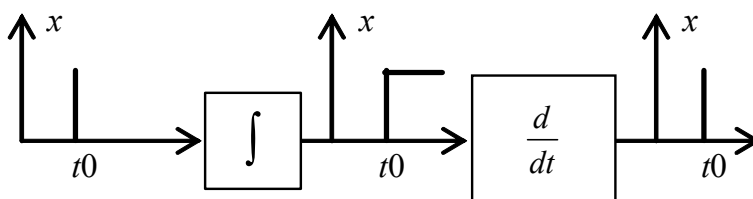


Рис. 1.8. Взаимные преобразования единичной и  $\delta$ -функции

Интеграл произведения  $\delta$ -функции и сигнала  $x(t)$  равен значению  $x(t_0)$ :

$$\int_0^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0). \quad (1.4)$$

Поэтому говорят, что  $\delta$ -функция обладает фильтрующим или стробирующим свойством. Данное свойство используется для представления дискретного во времени сигнала с периодом дискретизации  $T_d$

$$x_d(t) = \sum_{i=1}^N x(i \cdot T_d) \cdot \delta(t - i \cdot T_d). \quad (1.5)$$

### Синусоидальный (гармонический) сигнал

$$x(t) = Xm \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi), \quad (1.6)$$

где  $Xm$  – амплитуда;  $\varphi$  – фаза;  $\omega_0$  – частота;  $T$  – период ( $\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ ).

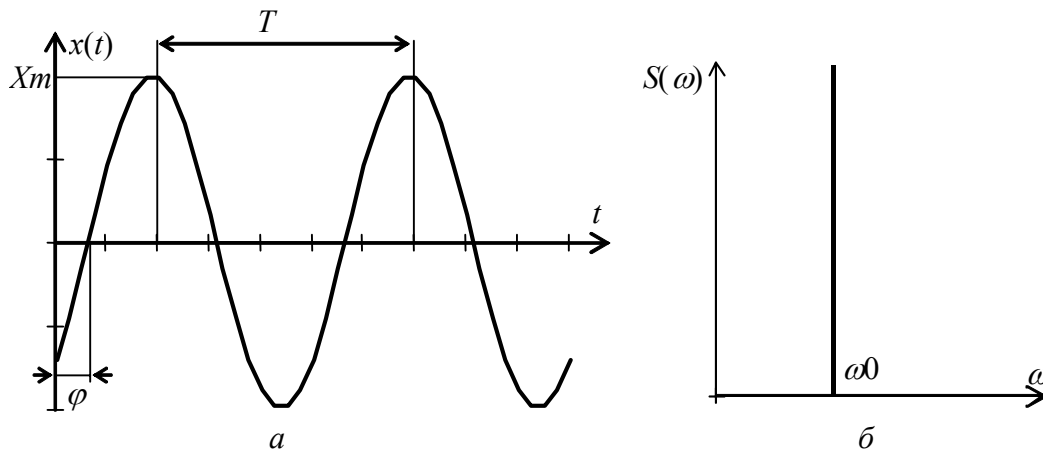


Рис. 1.9. Синусоидальный сигнал (а) и его спектр (б)

### Полигармонический сигнал

$$x(t) = x(t + k \cdot T), \quad (1.7)$$

где  $k$  – целое число,  $T$  – период повторения сигнала.

Для полигармонических (**периодических**) сигналов вводится понятие **спектра**, т. е. совокупности простых гармонических составляющих, на которые можно разложить сигнал. Спектр сигнала выражает его частотный (спектральный) состав, т. е. распределение по частоте амплитуды и фазы гармоник.

Полигармонический сигнал может быть представлен **дискретным рядом Фурье (дискретным спектром)**:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot k \cdot t\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot k \cdot t\right), \quad (1.8)$$

где  $\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ ,  $a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T x(t) dt$ ,  $a_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot k \cdot t\right) dt$ ;

$$b_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot k \cdot t\right) dt.$$

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot k \cdot t + \varphi_k\right), \quad (1.9)$$

где  $c_0 = \frac{a_0}{2}$  – среднее значение,  $c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ ,  $\varphi_k = -\arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$ .

### Информативные параметры сигналов

$X_{\max}$  – максимальное значение;

$X_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \cdot \int_t^{t+T} x(t) dt$  – среднее значение (постоянная составляющая);

$X_{\text{ср. выпр}} = \frac{1}{T} \cdot \int_t^{t+T} |x(t)| dt$  – средневыпрямленное значение;

$X_{\text{СКЗ}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_t^{t+T} x^2(t) dt} = \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2}$  – действующее значение (СКЗ);

$K_a = \frac{X_m}{X_{\text{СКЗ}}}$ ,  $K_\phi = \frac{X_{\text{СКЗ}}}{X_{\text{ср. выпр}}}$  – коэффициенты амплитуды и формы.

### Прямоугольный импульс

$a_k = 2 \cdot X_m \cdot \frac{\tau}{T} \cdot S\left(\frac{k \cdot \tau}{T}\right)$ ,  $b_k = 0$ ,  $\frac{a_0}{2} = X_m \cdot \frac{\tau}{T}$  – среднее,  $X_{\text{СКЗ}}^2 = X_m^2 \cdot \frac{\tau}{T}$  –

СКЗ,  $S(x) = \frac{\sin(\pi \cdot x)}{\pi \cdot x}$ .

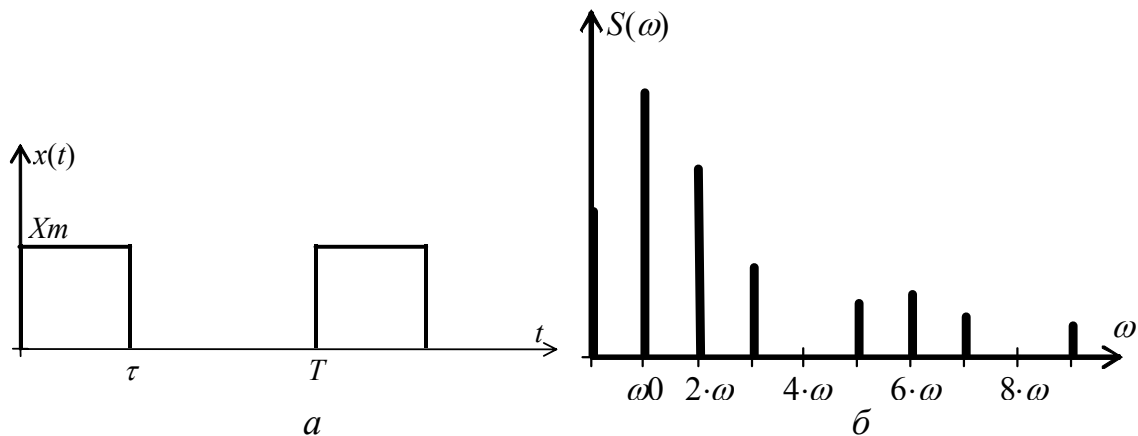


Рис. 1.10. Прямоугольный импульс (а) и его дискретный спектр (б)

Спектр прямоугольного сигнала имеет два важных свойства:

- в спектре отсутствуют гармоники с номерами кратными скважности  $Q = \frac{T}{\tau}$  (на рис. 1.10, б  $Q = 4$ , т. е. отсутствуют номера 4, 8, и т. д.);
- ширина лепестков спектра обратно пропорциональна длительности импульса (**чем короче сигнал, тем шире его спектр**).

### Треугольный импульс (симметричный)

$$a_k = X_m \cdot \frac{\tau}{T} \cdot S^2\left(\frac{k \cdot \tau}{2 \cdot T}\right), \quad b_k = 0, \quad \frac{a_0}{2} = X_m \cdot \frac{\tau}{2 \cdot T} \quad - \quad \text{среднее,}$$

$$X_{\text{СКЗ}}^2 = X_m^2 \cdot \frac{\tau}{3 \cdot T} \quad - \quad \text{СКЗ.}$$

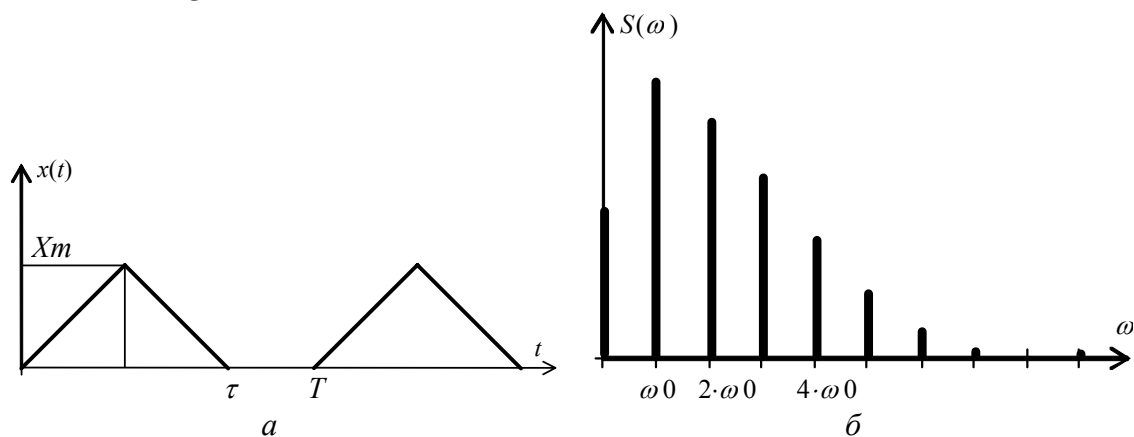


Рис. 1.11. Треугольный импульс (симметричный) (а) и его спектр (б)

### Трапецеидальный импульс (симметричный)

$$a_k = X_m \cdot \frac{\tau_0 + \tau_1}{T} \cdot S\left(\frac{k \cdot (\tau_0 - \tau_1)}{2 \cdot T}\right) \cdot S\left(\frac{k \cdot (\tau_0 + \tau_1)}{2 \cdot T}\right); \quad b_k = 0, \quad \frac{a_0}{2} = X_m \cdot \frac{\tau_0 + \tau_1}{2 \cdot T} -$$

$$\text{среднее, } X_{\text{СКЗ}}^2 = X_m^2 \cdot \frac{2 \cdot \tau_0 + \tau_1}{3 \cdot T} \quad - \quad \text{СКЗ.}$$

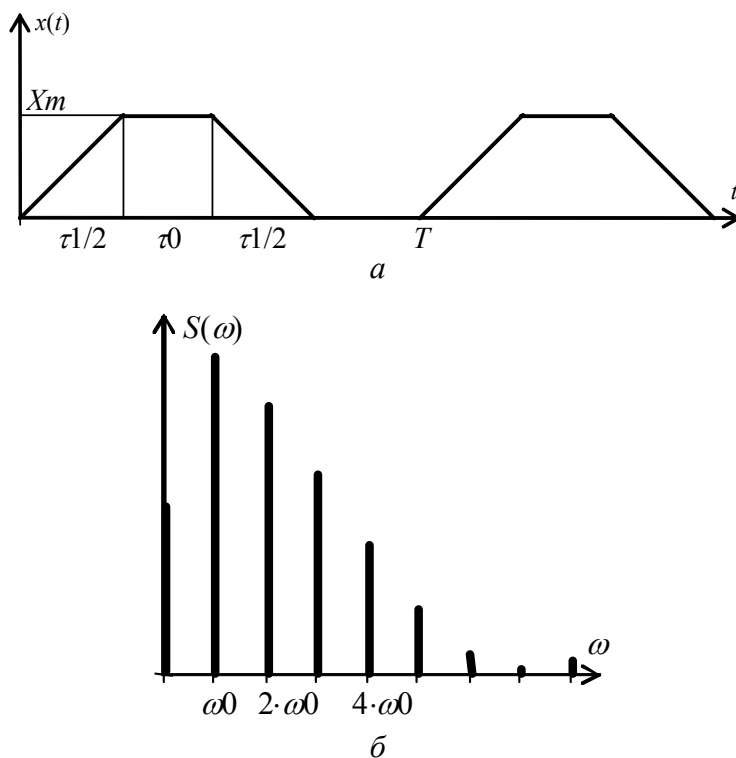


Рис. 1.12. Трапецеидальный импульс (симметричный) (а) и его спектр (б)

### Треугольный импульс (пилообразный)

$$b_k = -Xm \cdot \frac{1}{\pi \cdot k}, a_k = 0, \frac{a_0}{2} = Xm \cdot \frac{1}{2} - \text{среднее}, X_{\text{СКЗ}}^2 = Xm^2 \cdot \frac{1}{3} - \text{СКЗ}.$$

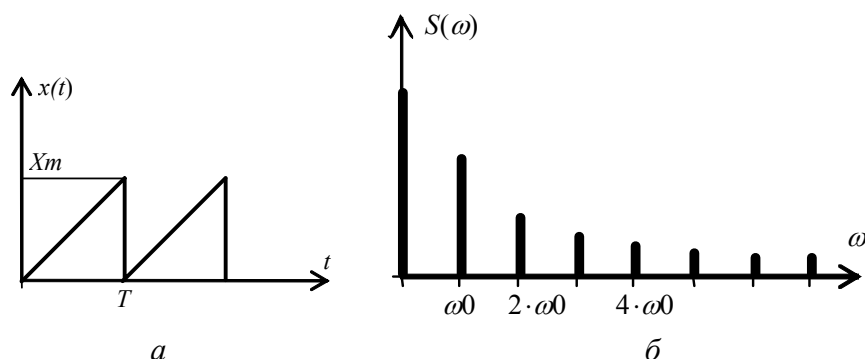


Рис. 1.13. Треугольный импульс (пилообразный) (а) и его спектр (б)

### Полусинусоида

$$a_k = Xm \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \left[ S\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot k \cdot \tau}{T} - 1\right)\right) + S\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot k \cdot \tau}{T} + 1\right)\right) \right], b_k = 0, \frac{a_0}{2} = Xm \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \frac{2}{\pi} - \text{среднее}, X_{\text{СКЗ}}^2 = Xm^2 \cdot \frac{\tau}{2 \cdot T} - \text{СКЗ}.$$

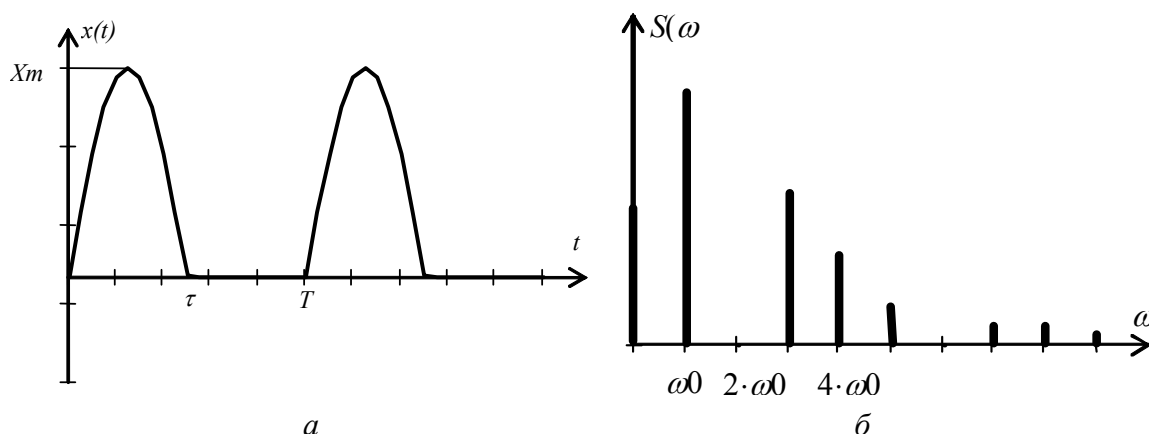


Рис. 1.14. Полусинусоида (а) и ее спектр (б)

### 1.3. Переходные неперiodические сигналы

Отличие переходных сигналов от периодических в том, что их нельзя представить суммой гармоник, то есть в виде дискретного спектра. Однако такие сигналы можно представить в виде **непрерывного спектра**, получаемого преобразованием Фурье,

$$S(j \cdot \omega) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t} dt = S(\omega) \cdot e^{j \cdot \varphi(\omega)}. \quad (1.10)$$



Учитывая равенства

$$S(j \cdot \omega) = A(\omega) + j \cdot B(\omega) \text{ и } e^{-j \cdot \omega t} = \cos(\omega \cdot t) - j \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

спектр сигнала вычисляется также в виде

$$S(j \cdot \omega) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt - j \cdot \int_0^{\infty} x(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) dt.$$

Обратное преобразование Фурье позволяет восстановить сигнал по его спектру:

$$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(j \cdot \omega) \cdot e^{j \cdot \omega t} d\omega. \quad (1.11)$$

### Экспоненциальный импульс

$$x(t) = \begin{cases} X_m \cdot e^{-a \cdot t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

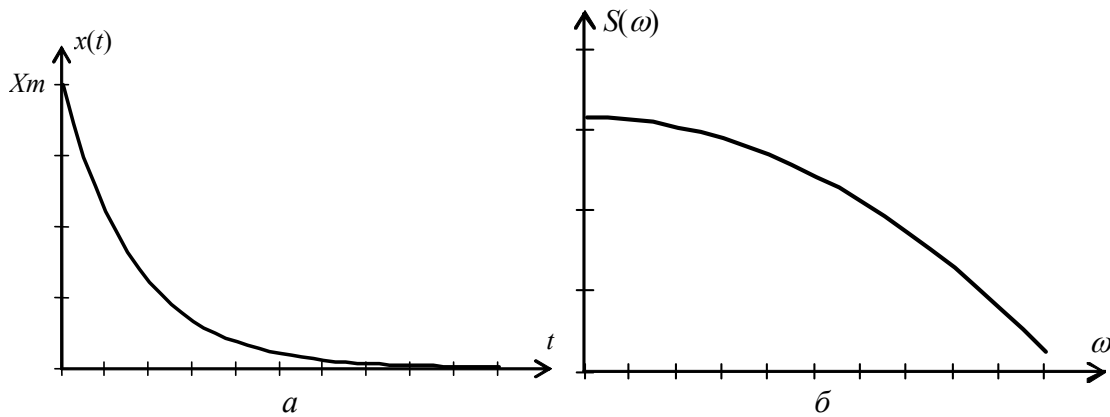


Рис. 1.15. Экспоненциальный импульс (а) и его спектр (б)

### Затухающие колебания

$$x(t) = \begin{cases} X_m \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t), & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

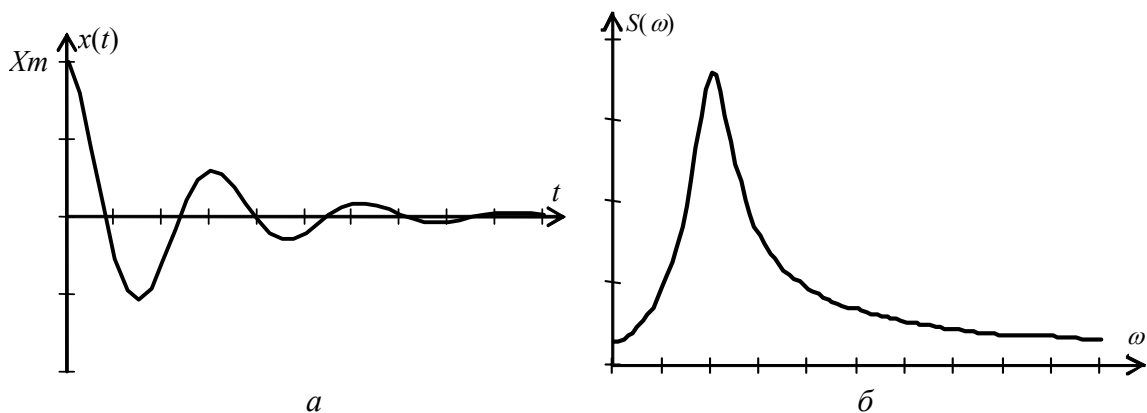


Рис. 1.16. Затухающие колебания (а) и их спектр (б)

### Прямоугольный импульс

$$x(t) = \begin{cases} X_m, & 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & t < 0; t > \tau. \end{cases} \quad (1.14)$$

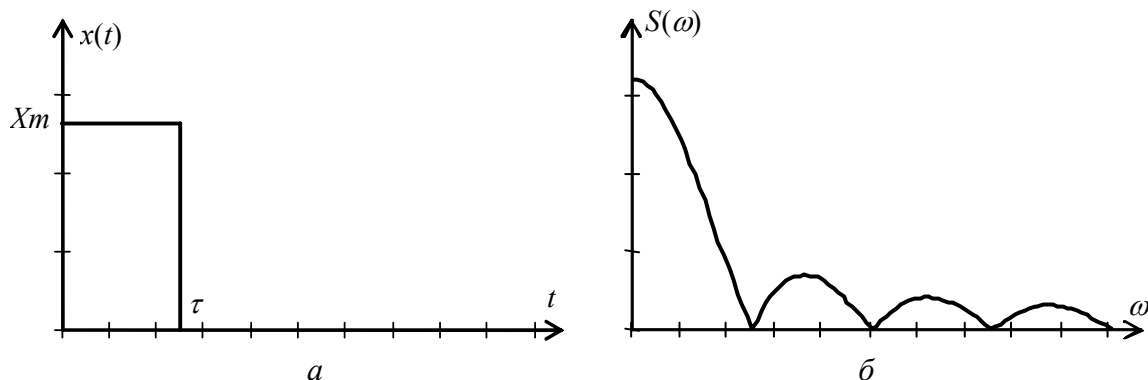


Рис. 1.17. Прямоугольный импульс (а) и его спектр (б)

### Сигнал вида $\sin(t)/t$

$$x(t) = X_m \cdot \frac{\sin(\frac{\pi \cdot t}{T})}{\frac{\pi \cdot t}{T}}. \quad (1.15)$$

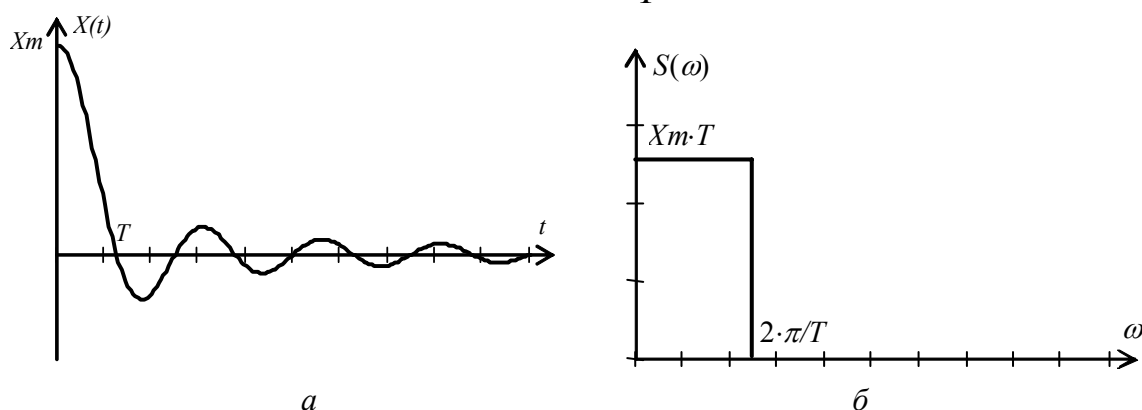


Рис. 1.18. Сигнал вида  $\sin(t)/t$  (а) и его спектр (б)

Таким образом, видно, что сигналу вида  $\sin(t)/t$  соответствует идеальный прямоугольный спектр.

## 1.4. Аналоговые линейные системы

Связь между входным  $x(t)$  и выходным  $y(t)$  сигналами некоторой аналоговой системы описывается выражением

$$y(t) = F[x(t)]. \quad (1.16)$$

Линейными называют системы, для которых выполняется **принцип суперпозиции**: реакция на линейную комбинацию сигналов равна

линейной комбинации реакций на эти сигналы, поданные на вход по отдельности.

$$F[x_1(t) + x_2(t)] = F[x_1(t)] + F[x_2(t)]. \quad (1.17)$$

$$F[C \cdot x(t)] = C \cdot F[x(t)], \quad (1.18)$$

где  $C = \text{const}$ .

Реакция на  $\delta$ -импульс называется **импульсной характеристикой системы**  $h(t)$ . Условия физически реализуемой и устойчивой системы:

$$h(t) = 0 \text{ при } t < 0 \text{ и } \int_0^{\infty} |h(t)| dt < \infty.$$

Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие называется **переходной характеристикой**  $h_1(t)$ . Переходная характеристика связана с импульсной характеристикой зависимостью  $h_1(t) = \int h(t) dt$ .

Импульсная и переходная характеристики системы позволяют определить реакцию системы на произвольный входной сигнал (в соответствии с **интегралом Дюамеля**) в одной из четырех форм:

$$y(t) = x(0) \cdot h_1(t) + \int_0^t x'(\tau) \cdot h_1(t - \tau) d\tau; \quad (1.19)$$

$$y(t) = x(0) \cdot h_1(t) + \int_0^t x'(t - \tau) \cdot h_1(\tau) d\tau; \quad (1.20)$$

$$y(t) = x(t) \cdot h_1(0) + \int_0^t x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau; \quad (1.21)$$

$$y(t) = x(t) \cdot h_1(0) + \int_0^t x(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau. \quad (1.22)$$

Для анализа реакции системы на входные воздействия применяются также **преобразование Лапласа и преобразование Фурье**:

$$Y^*(s) = \int_0^{\infty} y(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} dt \cdot \int_0^t x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau; \quad (1.23)$$

$$Y^*(s) = H(s) \cdot X^*(s); \quad (1.24)$$

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-s \cdot \tau} d\tau, \quad (1.25)$$

где  $Y^*(s)$ ,  $X^*(s)$  – изображения сигналов (**преобразования Лапласа**);  $H(s)$  – **передаточная функция** системы.

$$Y^*(j \cdot \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t} dt; \quad (1.26)$$

$$H(j \cdot \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \tau} d\tau; \quad (1.27)$$

$$Y^*(j \cdot \omega) = H(j \cdot \omega) \cdot X^*(j \cdot \omega), \quad (1.28)$$

где  $Y^*(j \cdot \omega)$ ,  $X^*(j \cdot \omega)$  – спектры сигналов (**преобразования Фурье**);  $H(j \cdot \omega)$  – **частотная характеристика** системы.

$$H(j \cdot \omega) = H(\omega) \cdot e^{j \cdot \varphi(\omega)}, \quad (1.29)$$

где  $H(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$  – амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики.

Для линейной системы выполняется принцип суперпозиции

$$Y^*(s) = H(s) \cdot X_1^*(s) + H(s) \cdot X_2^*(s) = H(s) \cdot [X_1^*(s) + X_2^*(s)], \quad (1.30)$$

$$Y^*(s) = C \cdot H(s) \cdot X^*(s) = H(s) \cdot C \cdot X^*(s). \quad (1.31)$$

При последовательном соединении линейных систем общий коэффициент передачи равен произведению коэффициентов передачи этих систем:

$$H^*(s) = H_1(s) \cdot H_2(s). \quad (1.32)$$

При параллельном соединении линейных систем общий коэффициент передачи равен сумме коэффициентов передачи этих систем:

$$H^*(s) = H_1(s) + H_2(s). \quad (1.33)$$

В системе с обратной связью коэффициент передачи равен

$$H^*(s) = \frac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s) \cdot H_2(s)}. \quad (1.34)$$

$H_1(s)$  – коэффициент прямой передачи,  $H_2(s)$  – коэффициент обратной связи. Знак « + » для систем с отрицательной обратной связью.

Во многих случаях коэффициент передачи системы  $H(s)$  может быть представлен в дробно-рациональной форме

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \dots + b_m \cdot s^m}{a_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \dots + a_n \cdot s^n}, \quad (1.35)$$

причем  $m < n$  и коэффициенты  $a_i$ ,  $b_i$  – действительные числа.

Вычислив корни знаменателя  $A(s) = 0$ , т. е. **полюса**  $sp_i$ , можно представить коэффициент передачи в виде

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \dots + b_m \cdot s^m}{a_n \cdot (s - sp_0)^{k_0} \cdot (s - sp_1)^{k_1} \dots \cdot (s - sp_{n-1})^{k_{n-1}}}, \quad (1.36)$$

где  $k_i$  – кратность корней.

Условие устойчивости системы – расположение полюсов в левой полуплоскости, т. е.  $\text{Re}[sp_i] < 0$ .

В случае если все полюса простые ( $k_i = 1$ ), импульсная характеристика системы определяется выражением

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{B(sp_i)}{A'(sp_i)} \cdot e^{t \cdot sp_i}, \quad t > 0. \quad (1.37)$$

Переходная характеристика определяется в этом случае выражением

$$h_1(t) = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{B(sp_i)}{sp_i \cdot A'(sp_i)} \cdot e^{t \cdot sp_i}, \quad t > 0. \quad (1.38)$$

### Пример

Если  $H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1+2 \cdot s}{s^2+5 \cdot s+4} = \frac{1+2 \cdot s}{(s-(-4)) \cdot (s-(-1))}$ , корни знаменателя равны  $sp_1 = -4$ ,  $sp_2 = -1$ .

Тогда импульсная характеристика (согласно выражению (1.37)) равна

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1+2 \cdot sp_1}{2 \cdot sp_1+5} \cdot e^{t \cdot sp_1} + \frac{1+2 \cdot sp_2}{2 \cdot sp_2+5} \cdot e^{t \cdot sp_2} = \frac{1+2 \cdot (-4)}{2 \cdot (-4)+5} \cdot e^{-4t} + \frac{1+2 \cdot (-1)}{2 \cdot (-1)+5} \cdot e^{-1t} = \\ &= \frac{7}{3} \cdot e^{-4t} - \frac{1}{3} \cdot e^{-t}. \end{aligned}$$

Переходная характеристика равна

$$h_1(t) = \frac{1}{4} + \frac{1+2 \cdot sp_1}{(2 \cdot sp_1+5) \cdot sp_1} \cdot e^{t \cdot sp_1} + \frac{1+2 \cdot sp_2}{(2 \cdot sp_2+5) \cdot sp_2} \cdot e^{t \cdot sp_2} = \frac{1}{4} - \frac{7}{12} \cdot e^{-4t} + \frac{1}{3} \cdot e^{-t}.$$

## 1.5. Контрольные вопросы

1. Определение понятий величина, сигнал, измерение, измерительное преобразование, информация.
2. Классификация сигналов. Определение дискретных, квантованных и непрерывных сигналов.
3. Виды детерминированных сигналов и их основные параметры.
4. Определение среднего, среднеквадратического, средневыпрямленного значений, коэффициентов амплитуды и формы сигнала.
5. Определение спектра сигнала и примеры спектров простейших детерминированных сигналов.
6. Непериодические сигналы и их спектр.
7. Преобразование Фурье и ряд Фурье для анализа сигналов.
8. Импульсная характеристика системы, ее связь с частотной характеристикой. Определение частотной характеристики.
9. Структуры сложных измерительных преобразователей, их частотные характеристики.

## 2. ЦИФРОВЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ

При подготовке раздела использованы следующие источники: [2, 3, 4, 5, 6, 7].

### 2.1. Структура системы цифровой обработки сигналов

Системы ЦОС непосредственно оперируют с последовательностями цифровых кодов, которые называют **цифровыми сигналами**. Такие сигналы обрабатываются процессором ЦОС, представляющим операционное или вычислительное ядро системы. Алгоритмическая обработка аналоговых сигналов цифровыми средствами предполагает их предварительное преобразование в цифровую форму, а в системах с аналоговым выходом – и из цифровой формы в аналоговую. Общей структурной схеме системы цифровой обработки аналоговых сигналов (рис. 2.1) отвечает цепочка функциональных преобразований сигнала вида А/А.А/Ц.Ц/Ц.Ц/А.А/А («аналог/аналог», «аналог/цифра», «цифра/цифра», «цифра/аналог», «аналог/аналог»), реализуемых соответственно аналоговым фильтром нижних частот (ФНЧ<sub>1</sub>), аналого-цифровым преобразователем (АЦП), цифровым процессором обработки сигналов (ЦПОС), цифро-аналоговым преобразователем (ЦАП) и аналоговым фильтром нижних частот (ФНЧ<sub>2</sub>).

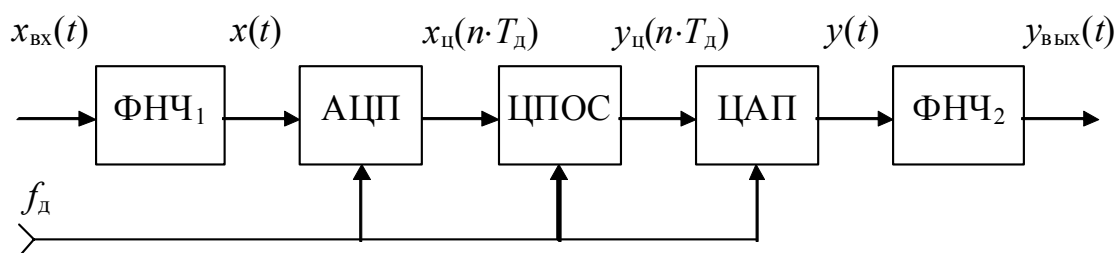


Рис. 2.1. Общая структура системы ЦОС

**Входной сигнал** системы ЦОС  $x_{\text{вх}}(t)$  поступает на АЦП через аналоговый фильтр нижних частот ФНЧ<sub>1</sub> с частотой среза  $\omega_c$ . Фильтр ограничивает полосу частот входного сигнала (включая и сопутствующие ему шумы и помехи) максимальной частотой  $\omega_m \approx \omega_c$ , удовлетворяющей условию:  $\omega_m < \omega_d / 2$ , где  $\omega_d = 2 \cdot \pi \cdot f_d$  – частота дискретизации сигнала. Он ослабляет искажения наложения при дискретизации сигналов с неограниченным по частоте спектром и называется **противомаскировочным**.

Аналого-цифровое преобразование включает дискретизацию сигнала по времени, квантование по уровню и цифровое кодирование (рис. 2.2).

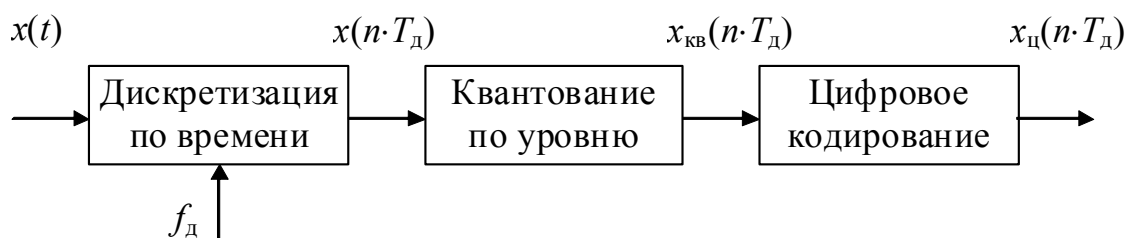


Рис. 2.2. Последовательность операций аналого-цифрового преобразования сигнала

В результате образуются **дискретный сигнал**  $x(n \cdot T_d)$ , соответствующий выборкам аналогового сигнала  $x(t)$  в дискретные равноотстоящие моменты времени  $n \cdot T_d$ , ( $T_d = 1 / f_d$  – период дискретизации сигнала), **дискретный квантованный сигнал**  $x_{кв}(n \cdot T_d)$ , отличающийся конечным множеством принимаемых им значений, и **цифровой сигнал**  $x_{ц}(n \cdot T_d)$  в виде последовательности цифровых двоичных кодов с числом разрядов, соответствующим разрядности АЦП. Процессором ЦПОС в соответствии с заданным **алгоритмом цифровой обработки** (оператором  $\Phi$ ) входной цифровой сигнал  $x_{ц}(n \cdot T_d)$  преобразуется в выходной цифровой сигнал системы  $y_{ц}(n \cdot T_d) = \Phi[x_{ц}(n \cdot T_d)]$ .

**Аналоговый выходной сигнал** системы  $y_{вых}(t)$  получается (или восстанавливается) из цифрового сигнала  $y_{ц}(n \cdot T_d)$  с помощью ЦАП, преобразующего его в **квантованный по уровню аналоговый сигнал**  $y(t)$  ступенчатой формы и аналогового ФНЧ<sub>2</sub>, которым ограничивается частотный спектр и подавляются высокочастотные компоненты выходного сигнала. Этот фильтр с частотой среза  $\omega_c < \omega_d / 2$  называют также **сглаживающим**.

Совокупность элементов ФНЧ<sub>1</sub>, АЦП, ЦАП и ФНЧ<sub>2</sub> системы цифровой обработки аналоговых сигналов, выполняющих преобразования сигналов вида А/А, А/Ц и Ц/А, образует **подсистему ее аналогового ввода-вывода** или **аналого-цифровой интерфейс**.

С преобразованиями сигналов при цифровой обработке связаны **искажения и погрешности**, которые зависят от параметров соответствующих преобразователей. Оценка и выбор их основываются на **математических моделях и описаниях сигналов** систем ЦОС.

## 2.2. Математические модели дискретных сигналов

Под **дискретными** понимают сигналы или функции, существующие при дискретных, как правило, равноотстоящих значениях своего аргумента. Мгновенные значения дискретного сигнала называют его **отсчетами**, или **выборками**. Математически дискретный сигнал определяют:

- функцией дискретного времени  $n \cdot T_d$ :  $x(n \cdot T_d) = x(t)|_{t = n \cdot T_d}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , соответствующей выборкам аналогового сигнала в дискретные периодически повторяющиеся моменты времени;

- функцией номера выборки  $n$ :  $x(n) = x(n \cdot T_d)|_{T_d = 1}$ , в общем случае не связанной со временем;

- функцией непрерывного времени  $t$ :

$$x_d(t) = x(t) \cdot f_\delta(t - n \cdot T_d) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n \cdot T_d) \cdot \delta(t - n \cdot T_d), \quad (2.1)$$

получаемой умножением аналогового сигнала  $x(t)$  на **дискретизирующую функцию**  $f_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_d)$  в виде периодической последовательности импульсов с периодом, равным  $T_d$ :

$$\delta(t - n \cdot T_d) = \begin{cases} \infty, & t = n \cdot T_d; \\ 0, & t \neq n \cdot T_d. \end{cases}$$

Графически дискретные сигналы представляются функцией номера выборки  $n$  или дискретного времени  $n \cdot T_d$  (рис. 2.3). Приводимую на графиках функцию непрерывного времени отождествляют либо с аналоговым сигналом  $x(t)$ , соответствующим дискретному сигналу  $x(n \cdot T_d)$ , либо с некоторой условной огибающей дискретной последовательности  $x(n)$ , более наглядно отображающей ее функциональную зависимость.

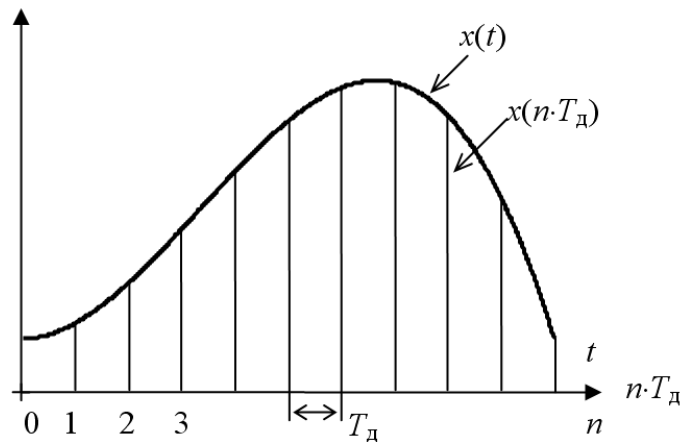


Рис. 2.3. График непрерывного  $x(t)$  и дискретного  $x(n \cdot T_d)$  сигнала



Сигналы  $x_d(t)$  и  $x(n \cdot T_d)$  связаны линейным соотношением  $x(n \cdot T_d) = \int_{(n-0,5)T_d}^{(n+0,5)T_d} x_d(t) dt$  и имеют одинаковые свойства (но разные размерности). Поэтому все вышеприведенные определения дискретного сигнала являются **математически адекватными**:  $x(n \cdot T_d)$ ,  $x(n)$ ,  $x_d(t)$ . Первые из них ( $x(n \cdot T_d)$  и  $x(n)$ ) непосредственно используются при описании и анализе дискретных и цифровых систем. Сигналы, представленные функцией номера выборки  $n$ , называют также **дискретными, или числовыми последовательностями**. Определение дискретного сигнала функцией непрерывного времени (2.1) эквивалентно **балансной модуляции**, или взвешиванию площади периодически следующих  $\delta$ -импульсов  $f_\delta(t)$  дискретизируемым сигналом  $x(t)$  или его выборками  $x(n \cdot T_d)$  (рис. 2.4). Это определение позволяет с помощью известных методов описания аналоговых сигналов и систем получить математические описания и сопоставить свойства соответствующих им дискретных сигналов и систем.

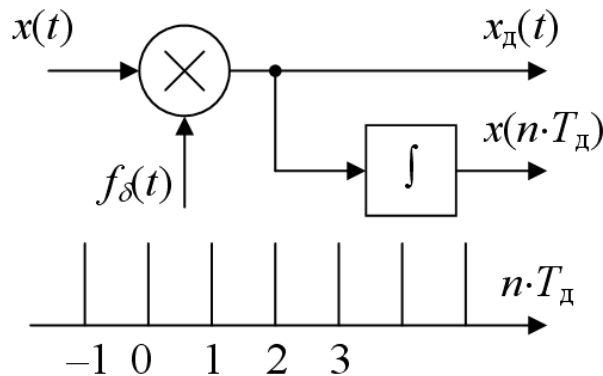


Рис. 2.4. Эквивалентная схема дискретизации сигнала по времени

В математике дискретные сигналы относятся к классу так называемых **решетчатых функций** или **временных рядов**.

### 2.3. Спектр дискретного сигнала

**Спектральную плотность** дискретного сигнала  $X(j \cdot \omega)$ , для упрощения называемую в дальнейшем **спектром**, можно найти, дискретизировав по времени преобразование Фурье соответствующего ему аналогового сигнала,

$$X_a(j \cdot \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt.$$

Заменяв  $t$  на  $n \cdot T_d$ , интеграл на сумму и  $dt$  на  $T_d$ , получим

$$X(j \cdot \omega) = T_d \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n \cdot T_d) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot n \cdot T_d}. \quad (2.2)$$

С другой стороны, спектр может быть найден и прямым преобразованием Фурье дискретного сигнала, представленного функцией непрерывного времени (2.1):

$$\begin{aligned} X(j \cdot \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n \cdot T_d) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot n \cdot T_d} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - n \cdot T_d) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt, \end{aligned} \quad (2.3)$$

при выводе использовано фильтрующее свойство  $\delta$ -функции.

Выражения (2.2) и (2.3) отличаются только масштабным (и размерным) множителем  $T_d$ , который при однокоростной обработке обычно опускают в силу периодичности комплексной экспоненты  $e^{-j \cdot \omega \cdot n \cdot T_d} = e^{-j \cdot (\omega + k \cdot \omega_d) \cdot n \cdot T_d}$ . Спектр дискретного сигнала в отличие от аналогового периодичен по частоте с периодом  $\omega_d$ :  $X(j \cdot \omega) = X[j \cdot (\omega + k \cdot \omega_d)]$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (рис. 2.5). Периодизация спектра обусловлена дискретизацией сигнала по времени. Справедливо и обратное утверждение о периодичности сигналов с дискретным по частоте (или линейчатым) спектром. Оба эти свойства отвечают фундаментальному положению о взаимосвязи дискретизации и периодизации сигналов во временной и частотной области. Определяют спектр дискретного сигнала в основной полосе частот ( $0 \pm \omega_d/2$ ).

### 2.3.1. Связь между спектрами дискретного и аналогового сигналов, явление наложения спектров

Связь между спектрами дискретного и аналогового сигналов получается на основе определения дискретного сигнала (2.1), в котором дискретизирующая функция  $f_\delta(t)$  представляется или заменяется аппроксимирующим ее рядом Фурье:  $f_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega_d \cdot t}$ .

$$x_d(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega_d \cdot t}. \quad (2.4)$$

Коэффициенты ряда

$$C_k = \frac{1}{T_d} \cdot \int_{n \cdot T_d - T_d/2}^{n \cdot T_d + T_d/2} \delta(t - n \cdot T_d) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_d \cdot t} dt = \frac{1}{T_d} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_d \cdot n \cdot T_d} = \frac{1}{T_d},$$

как и следовало ожидать, соответствуют равномерному дискретному (или линейчатому) спектру этой периодической функции. Такой спектр

может быть описан также непрерывным преобразованием Фурье с помощью частотной дискретизирующей функции

$$F_\delta(j \cdot \omega) = \frac{1}{T_d} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \cdot \omega_d).$$

Преобразование Фурье (2.4) при  $C_k = 1/T_d$  приводит к выражению

$$\begin{aligned} X_d(j \cdot \omega) &= \frac{1}{T_d} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega_d \cdot t} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} dt = \\ &= \frac{1}{T_d} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[j \cdot (\omega - k \cdot \omega_d)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Этот же результат дает свертка спектра аналогового сигнала и частотной дискретизирующей функции, соответствующая произведению (2.1) во временной области:

$$\begin{aligned} X_d(j \cdot \omega) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j \cdot \vartheta) \cdot F_\delta(j \cdot (\omega - \vartheta)) d\vartheta = \\ &= \frac{1}{T_d} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j \cdot \vartheta) \cdot \delta(\omega - k \cdot \omega_d - \vartheta) d\vartheta = \frac{1}{T_d} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[j \cdot (\omega - k \cdot \omega_d)]. \end{aligned}$$

Из (2.5) следует, что спектр дискретного сигнала с точностью до постоянного множителя равен сумме спектров аналогового сигнала  $X_a(j \cdot \omega)$ , смещенных по частоте на  $k \cdot \omega_d$ . Перенос спектра  $X_a(j \cdot \omega)$  на частоты  $k \cdot \omega_d$  вызван умножением аналогового сигнала на множество комплексных экспонент  $e^{-j \cdot k \cdot \omega_d \cdot t}$ , являющихся гармониками дискретизирующей функции  $f_\delta(t)$  (см. (2.4) и рис. 2.4). Он физически объясняет явление периодизации спектров при дискретизации.

Выражение (2.5) может быть проиллюстрировано для различных случаев дискретизации аналоговых сигналов с ограниченным (финитным) и неограниченным спектрами, которые во временной области имеют соответственно бесконечную и конечную длительности.

**Первый случай** соответствует аналоговому сигналу с финитным спектром, ограниченным максимальной частотой  $\omega_m$ , отвечающей условию:  $\omega_m < \omega_d / 2$ . При этом условии (рис. 2.5) спектр дискретного сигнала в основной полосе частот  $\pm \omega_d / 2$  (при  $|\omega| \leq \omega_d / 2$ ) точно совпадает (до постоянного множителя  $T_d$ ) со спектром аналогового сигнала:  $T_d \cdot X_d(j \cdot \omega) = X_a(j \cdot \omega)$ . Дискретизация не сопровождается здесь искажениями. Условие  $\omega_m < \omega_d / 2$  отвечает теореме отсчетов Котельникова. В этом случае **возможно точное восстановление аналогового сигнала по его дискретным выборкам** с помощью идеального ФНЧ с прямоугольной частотной характеристикой  $\Pi(j \cdot \omega)$ , равной  $T_d$  при  $|\omega| \leq \omega_d / 2$  и равной нулю при  $|\omega| > \omega_d / 2$  (рис. 2.5).

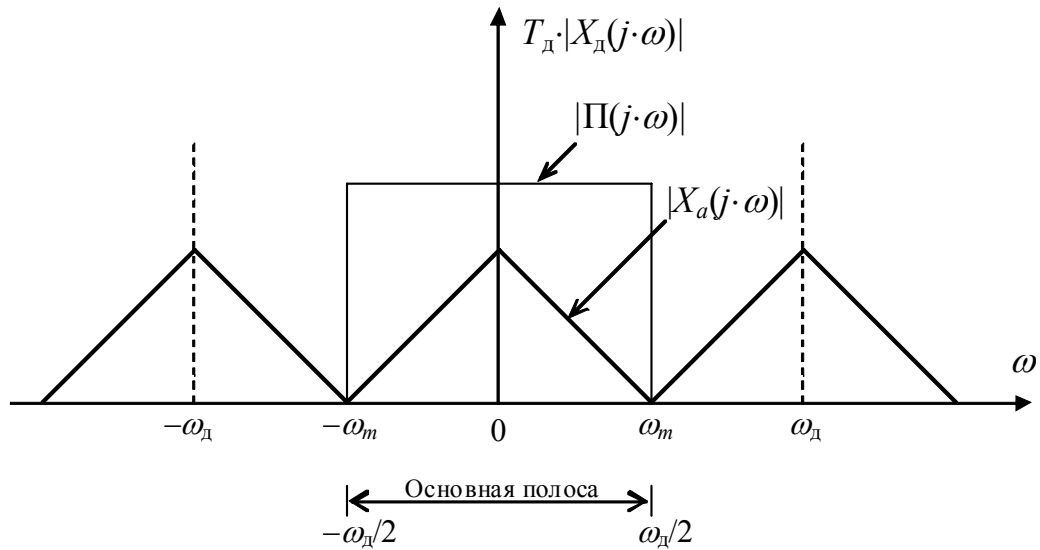


Рис. 2.5. Спектральные преобразования при дискретизации аналогового сигнала с финитным спектром в случае  $\omega_d \geq 2 \cdot \omega_m$

Сигнал на выходе ФНЧ соответствует обратному преобразованию Фурье депериодизированного спектра дискретного сигнала  $\Pi(j \cdot \omega) \cdot X_d(j \cdot \omega)$ :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{T_d}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} \Pi(j \cdot \omega) \cdot X_d(j \cdot \omega) \cdot e^{j \cdot \omega t} d\omega = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n \cdot T_d) \cdot \frac{\sin[\omega_d(t - n \cdot T_d)/2]}{\omega_d(t - n \cdot T_d)/2}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Выражение (2.6) является разложением аналогового сигнала  $x(t)$  в ряд по базисным интерполирующим функциям  $\sin(x)/x$  с весовыми коэффициентами  $x(n \cdot T_d)$  (**ряд Котельникова**), в соответствии с которым и осуществляется его восстановление.

Восстановление аналогового сигнала может быть представлено также сверткой дискретного сигнала  $x_d(t)$  с импульсной характеристикой идеального ФНЧ  $h(t)$ , связанной обратным преобразованием Фурье с его частотной характеристикой:

$$h(t) = \frac{T_d}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} \Pi(j \cdot \omega) \cdot e^{j \cdot \omega t} d\omega = \frac{\sin[\omega_d \cdot t / 2]}{\omega_d \cdot t / 2}. \tag{2.7}$$

Подстановка (2.7) в интеграл свертки  $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_d(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$  и его вычисление приводят к интерполяционному ряду (2.6).

Частота, определяемая как  $\omega_d = 2 \cdot \omega_m$ , носит известное по зарубежной литературе название **частоты Найквиста**.

**Во втором случае**, когда сигнал с финитным спектром дискретизируется с частотой  $\omega_d < 2 \cdot \omega_m$  (рис. 2.6), спектр дискретного сигнала в основной полосе частот  $|\omega| \leq \omega_d / 2$  отличается от спектра аналогового сигнала:  $T_d \cdot X_d(j \cdot \omega) \neq X_a(j \cdot \omega)$ . Периодизация спектра  $X_a(j \cdot \omega)$  здесь приводит к перекрытию и суммированию его с соседними смещенными по частоте спектрами  $X_a[j \cdot (\omega - k \cdot \omega_d)]$  (на рис. 2.6  $k = \pm 1$ ). **Это явление называют наложением спектров при дискретизации.** Связанные с ним погрешности дискретизации также называют погрешностями или **искажениями наложения.** При наложении **невозможно точное восстановление** аналогового сигнала по его дискретным выборкам.

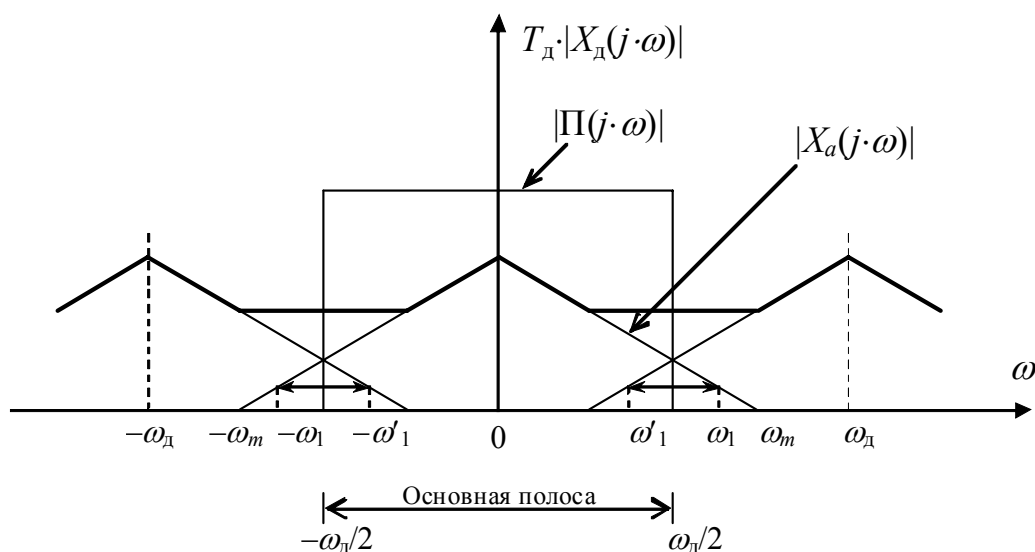


Рис. 2.6. Спектральные преобразования при дискретизации аналогового сигнала с финитным спектром в случае  $\omega_d < 2 \cdot \omega_m$

**Третий случай** соответствует сигналу  $x(t)$  конечной длительности  $T_c$  с неограниченным по частоте, но затухающим спектром.

Такой сигнал можно представить произведением соответствующего ему сигнала бесконечной длительности  $x_\infty(t)$  и прямоугольной весовой функции  $\Pi_{T_c}(t)$  конечной длины  $T_c$ :  $x(t) = x_\infty(t) \cdot \Pi_{T_c}(t)$  (так называемый временной фильтр). В частотной области это соответствует свертке спектра  $X_{a\infty}(j \cdot \omega)$  сигнала  $x_\infty(t)$  с частотной характеристикой  $\Pi_{T_c}(j \cdot \omega) = \sin(\omega \cdot T_c / 2) / (\omega \cdot T_c / 2)$  весовой функции  $X_d(j \cdot \omega) = X_{a\infty}(j \cdot \omega) \cdot \Pi_{T_c}(j \cdot \omega)$ , которая и приводит к размыванию по частоте спектра сигнала конечной длительности. Это относится, в частности, и к простому гармоническому колебанию, спектр которого при конечной длине сигнала является теоретически бесконечным. Наложение спектров в данном случае (рис. 2.7) имеет место при любом значении частоты дискретизации, но уровни смещенных по частоте спектров, перекрывающиеся в основной полосе, уменьшаются с ростом частоты дискретизации.

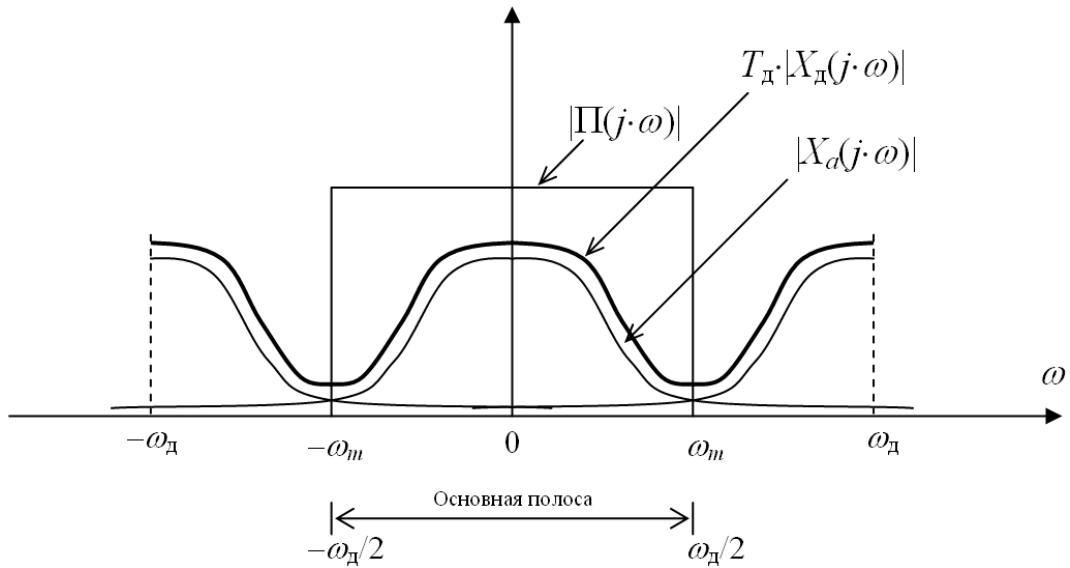


Рис. 2.7. Спектральные преобразования при дискретизации аналогового сигнала конечной длительности

Восстановленный с помощью идеального ФНЧ или интерполяционного ряда Котельникова сигнал  $x^*(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n \cdot T_d) \cdot \frac{\sin[\omega(t - n \cdot T_d)/2]}{\omega(t - n \cdot T_d)/2}$

отличается по форме от сигнала  $x(t)$  и имеет бесконечную длительность. Частота дискретизации сигнала конечной длительности  $f_d = 2 \cdot f_m$  и число его отсчетов или выборок  $N = f_d \cdot T_c = 2 \cdot f_m \cdot T_c$ , называемое базой сигнала  $x(t)$ , связываются в данном случае с некоторой частотой его спектра  $f_m$ , условно принимаемой за максимальную. Она является граничной частотой финитного спектра аппроксимирующего сигнала  $x^*(t)$ , совпадающего со спектром дискретного сигнала  $x(n \cdot T_d)$  в основной полосе частот  $\pm f_d / 2$ .

С наложением спектров при дискретизации реальных сигналов связано также явление подмены или маскирования частот, в результате которого частотный состав дискретного сигнала в основной полосе частот  $\pm f_d / 2$  может отличаться от состава частот аналогового сигнала в той же полосе частот. Это обусловлено тем, что высокочастотные составляющие сигнала, а также внешние шумы или помехи с частотами  $\omega_{вч} > \omega_d / 2$  при дискретизации трансформируются или преобразуются в основную полосу частот дискретного сигнала, создавая помехи наложения на частотах  $\omega'_{вч} = |\omega_{вч} - k \cdot \omega_d| \leq \omega_d / 2$ .

В общем случае такие частотные составляющие либо отсутствуют во входном сигнале, либо накладываются на существующие, искажая исходный спектр. Например, частота  $\omega_1$  на рис. 2.6 преобразуется в частоту  $\omega'_1 = \omega_d - \omega_1$ . Говорят, что она подменяет частоту  $\omega'_1$  или маскируется под частоту  $\omega'_1$ , которой во входном сигнале могло и не быть.

График преобразования частот аналогового сигнала  $f_{AC}$  и дискретного сигнала  $f_{DC}$  показан на рис. 2.8.

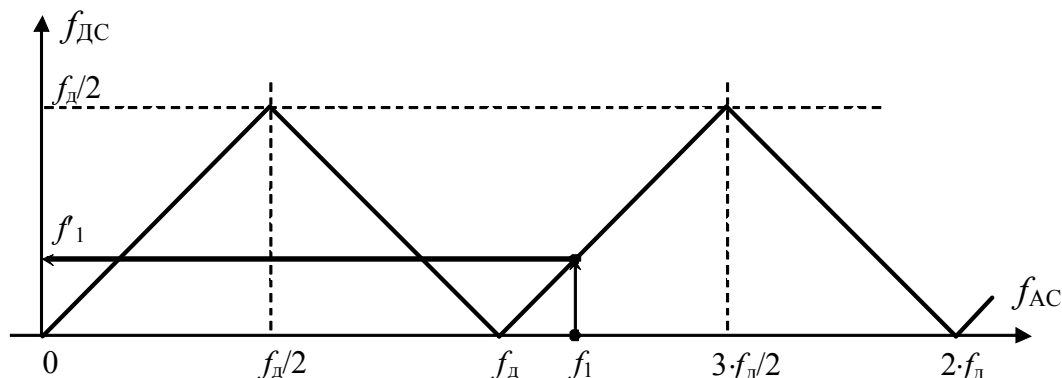


Рис. 2.8. График преобразования частот при дискретизации сигнала

Ослабить уровень помех наложения можно, только ограничив полосу частот дискретизируемого сигнала, приведя ее в соответствие с частотой дискретизации сигнала. В этом и заключается роль аналогового ФНЧ<sub>1</sub> на входе системы ЦОС, как и его название – **противомаскировочный**.

#### 2.4. Определение и классификация дискретных систем

Дискретной по определению называется система, осуществляющая обработку дискретных сигналов. Если не учитываются эффекты квантования и дискретизации, то используются математические модели цифровой системы и цифрового сигнала с неограниченной разрядностью и точностью обработки.

**Дискретная система**, как и аналоговая, полностью определяется **математическим оператором**, устанавливающим связь между ее выходным и входным сигналами или последовательностями:

$$y(n) = \Phi[x(n)]. \quad (2.8)$$

Оператор системы, реализуемый аппаратными или программными средствами, называют алгоритмом обработки системы.

По виду оператора дискретные системы классифицируются на линейные и нелинейные, инвариантные и неинвариантные ко времени. Линейные дискретные системы с постоянными параметрами (или коэффициентами) удовлетворяют принципам суперпозиции:

$$y(n) = \Phi[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1\Phi[x_1(n)] + a_2\Phi[x_2(n)] \quad (2.9)$$

(отклик системы на сумму воздействий равен сумме откликов на каждое воздействие) и инвариантности к временному сдвигу, т. е. независимости отклика от момента приложения воздействия:

$$y(n - m) = \Phi[x(n - m)]. \quad (2.10)$$

Здесь  $x(n - m)$ ,  $y(n - m)$  – последовательности, задержанные (или сдвинутые вправо) относительно  $x(n)$  и  $y(n)$  на  $m$  отсчетов или периодов дискретизации  $T_d$ .

## 2.5. Методы математического описания линейных дискретных систем во временной области и алгоритмы цифровой фильтрации на их основе

Аналоговые линейные системы во временной области математически описываются дифференциальными уравнениями и интегралом свертки:

$$\sum_{k=0}^M a'_k \cdot \left[ \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right] = \sum_{r=0}^N b'_r \cdot \left[ \frac{d^r x(t)}{dt^r} \right]; \quad (2.11)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \cdot x(\tau) d\tau, \quad (2.12)$$

где  $h(t)$  – импульсная характеристика, являющаяся реакцией аналоговой системы на сигнал типа дельта-импульс:  $h(t) = \Phi[\delta(t)]$ .

В дискретных системах аналогом дифференциального уравнения (2.11) является **разностное уравнение**:

$$\sum_{k=0}^M a_k \cdot y(n - k) = \sum_{i=0}^N b_i \cdot x(n - i). \quad (2.13)$$

В нем, как и в дифференциальном уравнении (2.11),  $M$  обозначает порядок уравнения ( $M \geq N$ );  $a_k$ ,  $b_i$  – его весовые коэффициенты;  $x(n - i)$ ,  $y(n - k)$  – входной и выходной сигналы системы, задержанные на  $i$  и  $k$  отсчетов или периодов дискретизации.

Разностное уравнение может быть получено, в частности, дискретизацией по времени дифференциального уравнения с помощью замен вида:

$dx \rightarrow x(n) - x(n - 1)$  – первая разность и т. д.

При  $a_0 = 1$  разностное уравнение (2.13) приводится к виду:

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i \cdot x(n - i) - \sum_{k=1}^M a_k \cdot y(n - k). \quad (2.14)$$

Устройство или программа, реализующие разностное уравнение (2.14) (т. е. выполняющие обработку сигнала в соответствии с разностным уравнением), называются дискретным или **цифровым фильтром** (ЦФ).

Сигнал на выходе цифрового фильтра равен сумме текущего отсчета входного сигнала  $x(n)$  и предыдущих ( $N$  и  $M$ ) отсчетов входного и выходного сигналов  $x(n - i)$ ,  $y(n - k)$ , взвешенных (или взятых) с весовыми коэффициентами  $a_k$ ,  $b_i$  (рис. 2.9). Достигаемое в результате целенаправленное изменение формы, а следовательно, и спектра сигнала отвечает общей задаче **частотной фильтрации сигналов**.



При значениях коэффициентов  $a_k \neq 0$  ЦФ называется **рекурсивным** (РЦФ). Рекурсия означает наличие в фильтре **обратной связи**, т. е. зависимости выходного сигнала  $y(n)$  от его предыдущих отсчетов  $y(n - k)$  (рис. 2.9).

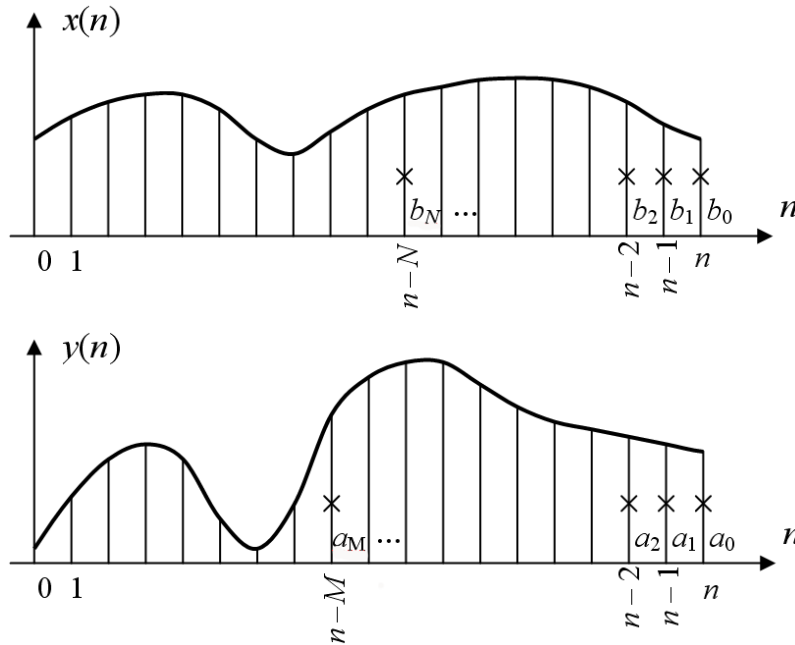


Рис. 2.9. Графическая иллюстрация обработки сигнала в соответствии с разностным уравнением

Разностному уравнению (2.14) с коэффициентами  $a_k = 0$  соответствует **нерекурсивный цифровой фильтр** (НРЦФ):

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i \cdot x(n-i). \quad (2.15)$$

Это фильтр без обратной связи, его выходной сигнал определяется взвешенной с весами  $b_i$  суммой текущего и  $N$  предыдущих отсчетов входного сигнала (рис. 2.9, верхний график). Уравнение (2.15) называют также **алгоритмом скользящего весового усреднения** (с нормирующим или без нормирующего множителя перед знаком суммы).

Аналогом интеграла свертки (2.2) в дискретных системах является **дискретная временная свертка** (ДВС). Ее выражение получают с помощью замен:  $t \rightarrow n \cdot T_d$ ,  $\tau \rightarrow m \cdot T_d$ ,  $d\tau \rightarrow 1$ ,  $\int \rightarrow \sum$ , т. е. дискретизацией (2.12):

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \cdot x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m) \cdot x(m). \quad (2.16)$$

Входящая в (2.16) дискретная функция  $h(m)$  (или  $h(n)$ ) называется **импульсной характеристикой дискретной системы**. Она определяет

ся как отклик дискретной системы на сигнал типа **единичный импульс**  $u_0(m) = 1, m = 0$  и  $u_0(m) = 0$  при  $m > 0$ :  $h(m) = \Phi[u_0(m)]$ . Для физически реализуемой системы  $h(m) = 0$  при  $m < 0$  (отклик не может опережать воздействие); поэтому ДВС обычно представляют в виде:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) \cdot x(n-m). \quad (2.17)$$

Возможны два вида импульсных характеристик ЦФ: **бесконечной и конечной длительности** (рис. 2.10).

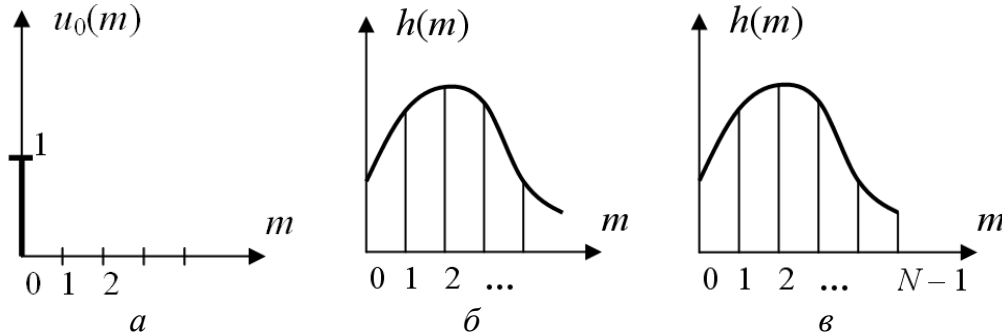


Рис. 2.10. Единичный импульс (а) и импульсные характеристики цифровых фильтров БИХ-типа (б) и КИХ-типа (в)

Бесконечную импульсную характеристику имеют **рекурсивные фильтры**, поэтому их часто называют также **БИХ-фильтрами**. По импульсной характеристике можно судить об устойчивости РЦФ. Устойчивому РЦФ отвечает затухающая со временем импульсная характеристика, что математически выражается как  $\sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| < \infty$ .

**Нерекурсивные цифровые фильтры** относятся к классу **КИХ-фильтров**, т. е. фильтров с конечной импульсной характеристикой. Выражение ДВС (2.17) для НФ имеет конечные пределы суммирования, определяемые длиной импульсной характеристики  $N$ :

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) \cdot x(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} h(n-m) \cdot x(m). \quad (2.18)$$

Это означает, что ДВС можно непосредственно использовать при реализации НРЦФ в качестве алгоритма обработки, что невозможно для РЦФ вследствие бесконечности их импульсной характеристики и требуемого в связи с этим бесконечно большого объема вычислений.

Из сопоставления (2.15) и (2.18) следует, что значения импульсной характеристики в выражении ДВС (2.18) тождественны коэффициентам  $b_i$  в разностном уравнении НРЦФ (2.15):  $h(m) = b_i|_{i=m}$ , и являются, таким образом, коэффициентами НРЦФ. Поэтому, учитывая большое значение и информативность свертки при описании дискретных сигна-

лов и систем, принято говорить, что НРЦФ реализуют **алгоритм цифровой фильтрации на основе ДВС** (2.18), а РЦФ – алгоритм на основе разностного уравнения в его общей форме (2.14).

## 2.6. Методы математического описания сигналов дискретных систем на комплексной плоскости (в частотной области)

Наиболее общим для аналоговых сигналов является **операторный метод** их описания на комплексной плоскости:

$$X_a(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt, \quad (2.19)$$

где  $s = \sigma + j \cdot \omega$  – комплексный оператор Лапласа, или комплексная частота.

Преобразованию Лапласа на мнимой оси  $j \cdot \omega$  (оси частот) соответствует преобразование Фурье аналогового сигнала, определяющее его спектр:

$$X_a(j \cdot \omega) = X_a(s) \Big|_{s=j \cdot \omega} = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt. \quad (2.20)$$

Для дискретных сигналов преобразование Лапласа получается из (2.19) с помощью замен:  $t \rightarrow n \cdot T_d$ ,  $\int \rightarrow \sum$ ,  $dt \rightarrow 1$ , т. е. дискретизацией (2.19) по времени:

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot e^{-s \cdot n \cdot T_d}. \quad (2.21)$$

Однако в отличие от аналоговых сигналов и систем преобразование (2.19) не приводит к рациональным функциям при математическом описании дискретных сигналов и систем на комплексной  $S$ -плоскости. Этому важнейшему условию отвечает **Z-преобразование дискретных сигналов**, определяемое соотношением

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}. \quad (2.22)$$

Комплексная переменная  $Z$  в (2.22) связана с переменной  $S$  (оператором Лапласа):  $z = e^{s \cdot T_d} = a + j \cdot b = e^{\sigma \cdot T_d} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot T_d}$ .

Эта связь иллюстрируется отображениями точек из комплексной  $S$ -плоскости на комплексную  $Z$ -плоскость (рис. 2.11). Особенность этих отображений заключается в их цикличности по переменной  $\omega$ , обусловленной периодичностью комплексной экспоненты  $e^{j \cdot \omega \cdot T_d}$  с периодом  $\omega_d$ :

$$z = e^{\sigma \cdot T_d} \cdot e^{j[\omega + k \cdot \omega_d] T_d}, \quad k = 0; \pm 1; \pm 2 \text{ и т. д.}$$

Так, точки мнимой оси  $j \cdot \omega$   $S$ -плоскости ( $\sigma = 0$ ) циклически переносятся на окружность единичного радиуса  $Z$ -плоскости; каждой полосе частот шириной  $\omega_d$  при этом соответствует один обход этой окружности.

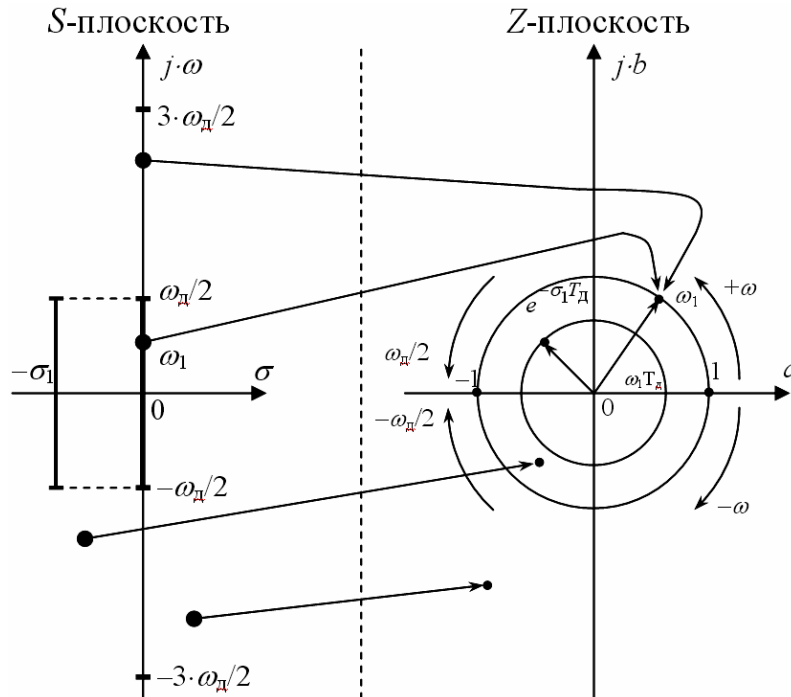


Рис. 2.11. Отображения точек с комплексной  $S$ -плоскости на  $Z$ -плоскость

Однозначное отображение точек имеет место в основной полосе частот  $\pm\omega_d/2$ . Левая  $S$ -полуплоскость ( $\sigma < 0$ ) свертывается внутрь круга единичного радиуса  $Z$ -плоскости, а правая  $S$ -полуплоскость ( $\sigma > 0$ ) отображается за его пределы.

$Z$ -преобразование, вычисленное на единичной окружности, приводит к **преобразованию Фурье дискретного сигнала** (2.2), определяющему его спектр:

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega T_d}} = X(j\cdot\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n T_d}. \quad (2.23)$$

Следует отметить, что  $Z$ -преобразование, как и преобразование Лапласа, может быть **односторонним** для последовательностей  $x(n) = 0$  при  $n < 0$ , так и **двусторонним**, если  $x(n) \neq 0$  при  $n < 0$ ; в последнем случае пределы суммирования по  $n$  берутся от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Свойства  $Z$ -преобразования:

- **линейность:**

$$Z\{a_1 \cdot x_1(n) + a_2 \cdot x_2(n)\} = a_1 \cdot X_1(z) + a_2 \cdot X_2(z) \quad (2.24)$$

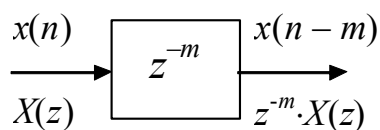
( $Z$ -преобразование суммы равно сумме  $Z$ -преобразований);

- **задержки:**

$$Z\{x(n-m)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m) \cdot z^{-(n-m)} \cdot z^{-m} = X(z) \cdot z^{-m} \quad (2.25)$$

( $Z$ -преобразование задержанного на  $m$  отсчетов дискретного сигнала  $x(n-m)$  равно произведению  $Z$ -образа  $X(z)$  незадержанного сигнала  $x(n)$ )

на множитель задержки  $z^{-m}$ . Этим объясняется использование символа  $z^{-m}$  для обозначения элемента задержки на структурных схемах систем ЦОС:



В частности, элемент задержки на один отсчет, т. е. период дискретизации, обозначается как  $z^{-1}$ :  $Z\{x(n-1)\} = X(z) \cdot z^{-1}$ ;

• **свертки:**

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m) \cdot x_2(n-m);$$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m) \cdot x_2(n-m) \cdot z^{-(n-m)} \cdot z^{-m} = X_1(z) \cdot X_2(z) \quad (2.26)$$

( $Z$ -преобразование свертки двух последовательностей равно произведению  $Z$ -преобразований этих последовательностей);

• **произведения:**

$$y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n); \quad Y(z) = \frac{1}{2\pi \cdot j} \cdot \oint_C X_1(\vartheta) \cdot X_2(\vartheta) \frac{d\vartheta}{\vartheta} \quad (2.27)$$

( $Z$ -преобразование произведения двух последовательностей равно комплексной свертке  $Z$ -образов этих последовательностей, где  $\vartheta$  – переменная интегрирования,  $C$  – контур интегрирования, охватывающий все особые точки подынтегральной функции).

На основе свойства (2.27)  $Z$ -преобразования произведения дискретных последовательностей доказывается важное для практики **равенство Парсеваля**, имеющее тот же смысл, что и для аналоговых сигналов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n \cdot T_d)|^2 = \frac{1}{2\pi \cdot j} \cdot \oint_C X(z) \cdot X(z^{-1}) \cdot z^{-1} dz = \frac{T_d}{\pi} \cdot \int_0^{\omega_d/2} |X(j \cdot \omega)|^2 d\omega. \quad (2.28)$$

Оно означает **тождественность временной и частотной оценок энергии сигнала**.

Аналогичными свойствами обладает и преобразование Фурье дискретного сигнала.

Обратные  $Z$ - и Фурье-преобразования определяются выражениями:

$$x(n) = \frac{T_d}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(j \cdot \omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot n \cdot T_d} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(j \cdot \lambda) \cdot e^{j \cdot \lambda \cdot n} d\lambda; \quad (2.29)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi \cdot j} \cdot \oint_C X(z) \cdot z^{n-1} dz = \sum_i \text{res}_i [X(z) \cdot z^{n-1}] \Big|_{z=z_{pi}}. \quad (2.30)$$

Здесь обозначены:  $\lambda = \omega \cdot T_d = 2 \cdot \pi \cdot f / f_d$  – относительная частота, называемая также цифровой частотой;  $\text{res}$  – вычеты подынтегральной функции.

$F(z) = X(z) \cdot z^{n-1}$  в особых точках, охватываемых контуром  $C$ , по которому ведется интегрирование. Для дробно-рациональных функций  $X(z) = P(z) / Q(z)$  такими особыми точками являются корни полинома  $Q(z)$ , называемые полюсами  $z_{pi}$  функции  $X(z)$ . Полюсы могут быть вещественными, комплексно-сопряженными, простыми и кратными. Вычеты в полюсах находятся с помощью выражений:

- для простого полюса

$$res_i [F(z)]_{z=z_{pi}} = \lim_{z \rightarrow z_{pi}} [(z - z_{pi}) \cdot F(z)]; \quad (2.31)$$

- для полюса кратностью  $r$

$$res_i [F(z)]_{z=z_{pi}} = \frac{1}{(r-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_{pi}} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} [(z - z_{pi})^r \cdot F(z)]. \quad (2.32)$$

При  $n = 0$  к (2.30) добавляется дополнительный вычет  $res_0 [X(z)/z]_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} [X(z)]$  в полюсе  $z_{p0} = 0$ , который дает множитель  $1/z = z^{n-1} \Big|_{n=0}$ .

Существуют специальные таблицы обратных  $Z$ -преобразований для широкого класса дискретных функций.

Корни числителя  $P(z) = 0$ , дробно-рациональной функции, описывающей сигнал  $X(z)$ , называются ее нулями. Отображение или представление нулей и полюсов на комплексной  $Z$ -плоскости используется в качестве геометрической интерпретации  $Z$ -образов дискретных сигналов.

## 2.7. Тестовые последовательности дискретных систем

Приводимые дискретные последовательности часто используются в системах ЦОС, в том числе в качестве их испытательных сигналов.

**1. Единичный импульс:**  $u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$  имеет  $Z$ -образ  $U_0(z) = 1$

и равномерный частотный спектр  $U_0(j \cdot \omega) = 1$ . Для дискретных систем единичный импульс имеет такое же значение, как и дельта-импульс для аналоговых. Откликом на него является **импульсная характеристика** дискретной системы.

**2. Единичный импульс, задержанный на  $m$  отсчетов:**

$$u_0(n - m) = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

С учетом свойства задержки его  $Z$ - и  $F$ - (Фурье) образы:

$$Z \{u_0(n - m)\} = z^{-m}; \quad F \{u_0(n - m)\} = e^{-j \cdot \omega \cdot m \cdot T_d}.$$

С помощью  $u_0(n - m)$  любая дискретная последовательность может быть представлена в виде дискретной свертки:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot u_0(n - m).$$

**3. Единичный скачок:**  $u_1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$  (функция включения).

Его Z-образ  $U_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$  соответствует сумме бесконечного

числа членов геометрической прогрессии. Сигнал имеет один полюс  $z_p = 1$  и нуль  $z_0 = 0$  в начале координат (рис. 2.12, а).

Выражение для спектра единичного скачка находится следующим образом:

$$\begin{aligned} U_1(j \cdot \omega) &= U_1(z) \Big|_{z=e^{j \cdot \omega \cdot T_d}} = \frac{1}{1 - e^{-j \cdot \omega \cdot T_d}} = \frac{1}{e^{-j \cdot \omega \cdot T_d / 2} \cdot [e^{j \cdot \omega \cdot T_d / 2} - e^{-j \cdot \omega \cdot T_d / 2}]} = \\ &= \frac{e^{-j \cdot (\omega \cdot T_d - \pi) / 2}}{2 \cdot \sin(\omega \cdot T_d / 2)} \end{aligned}$$

(при выводе использована формула Эйлера:  $e^{\pm j \cdot \alpha} = \cos(\alpha) \pm j \cdot \sin(\alpha)$ ).

График модуля спектра  $|U_1(j \cdot \omega)| = \frac{1}{2 \cdot |\sin(\omega \cdot T_d / 2)|}$  показан на рис. 2.13, а. Откликом на сигнал  $u_1(n)$  является **переходная характеристика** дискретной системы.

**4. Прямоугольный импульс конечной длительности:**

$$u_N(n) = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, n < 0, n \geq N. \end{cases}$$

Его Z-образ  $U_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$  равен сумме конечного числа членов геометрической прогрессии. К этому же результату можно прийти, представив сигнал  $u_N(n)$  в виде  $u_N(n) = u_1(n) - u_1(n - N)$ , что в Z-области означает:

$$U_N(z) = U_1(z) - z^{-N} \cdot U_1(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}.$$

Сигнал имеет один полюс  $z_p = 1$  и  $N$  нулей:  $(1-z^{-N}) = 0$ ,  $z_{0i} = \sqrt[N]{1} = e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot i / N}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , равномерно размещенных на единичной окружности (рис. 2.12, б).

Спектр импульса определяется выражением

$$\begin{aligned} U_N(j \omega) &= \frac{1 - e^{-j \cdot \omega \cdot N \cdot T_d}}{1 - e^{-j \cdot \omega \cdot T_d}} = \frac{e^{-j \cdot \omega \cdot N \cdot T_d / 2} \cdot [e^{j \cdot \omega \cdot N \cdot T_d / 2} - e^{-j \cdot \omega \cdot N \cdot T_d / 2}]}{e^{-j \cdot \omega \cdot T_d / 2} \cdot [e^{j \cdot \omega \cdot T_d / 2} - e^{-j \cdot \omega \cdot T_d / 2}]} = \\ &= e^{-j \omega (N-1) T_d / 2} \frac{\sin(\omega N T_d / 2)}{\sin(\omega T_d / 2)}. \end{aligned}$$

График модуля спектра  $|U_N(j \cdot \omega)| = \left| \frac{\sin(\omega \cdot N \cdot T_d / 2)}{\sin(\omega \cdot T_d / 2)} \right|$  показан на рис. 2.13, б. Он соответствует дискретной функции sinc и имеет следующие значения в характерных точках:

$$|U_N(j \cdot \omega)| = \begin{cases} N, & \omega = 0; \\ 0, & \omega = 2 \cdot \pi \cdot i / N \cdot T_d = i \cdot \omega_d / N, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

**Сигнал 4** применяется для анализа переходных процессов в аperiodических дискретных системах.

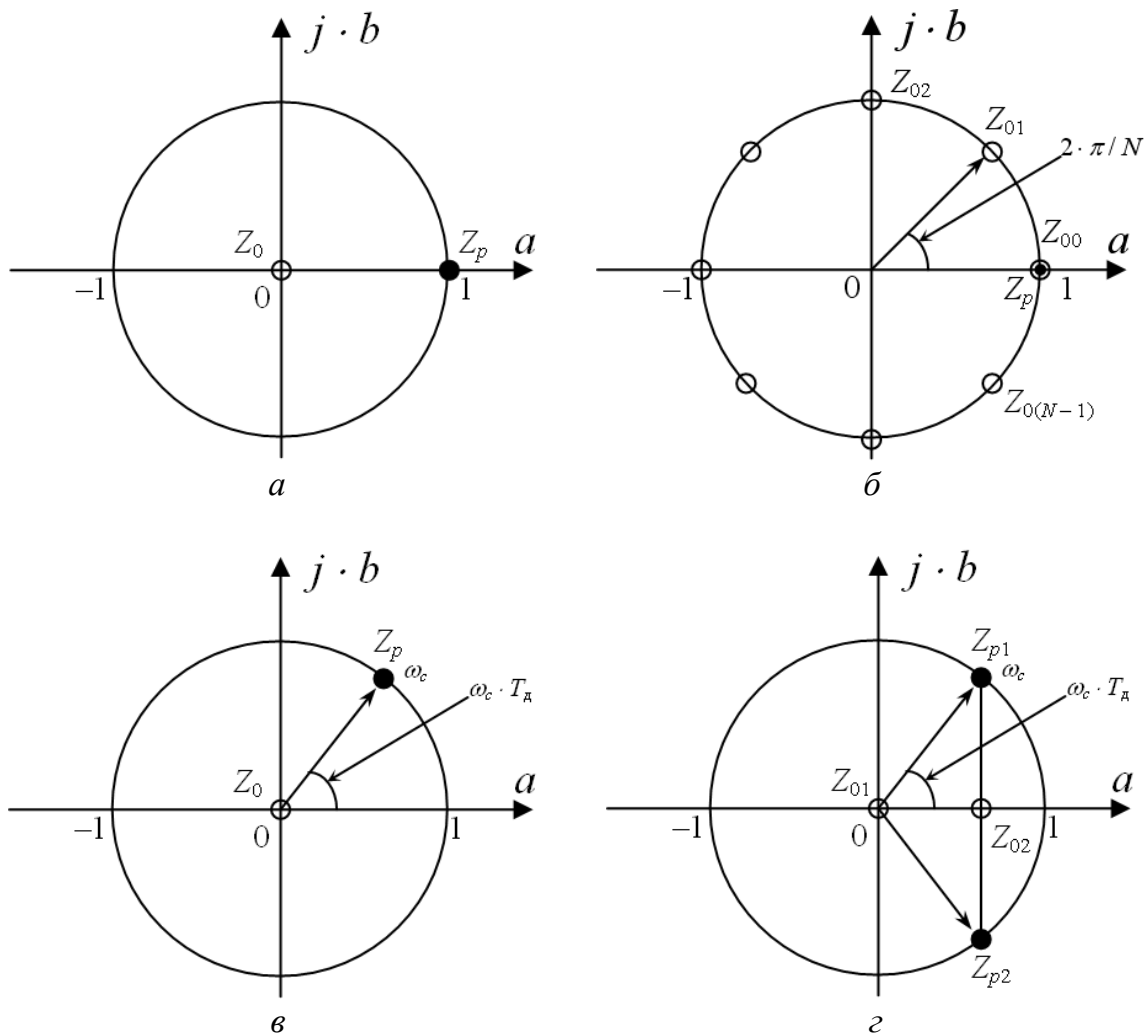


Рис. 2.12. Картины нулей и полюсов для дискретных сигналов типа единичный скачок (а), импульс конечной длительности (б), комплексный (в) и вещественный (г) радиоскачок



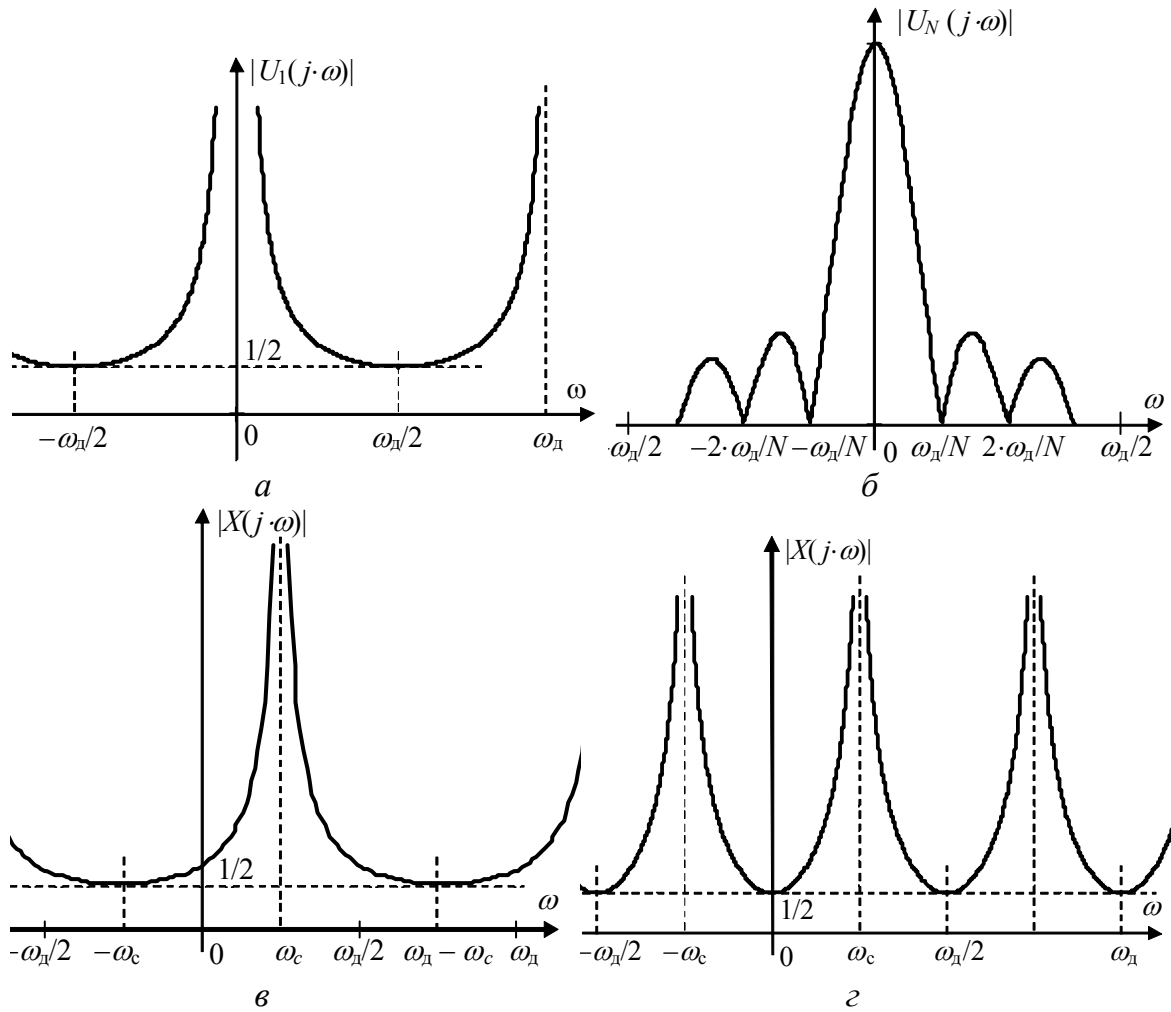


Рис. 2.13. Графики модулей спектров дискретных сигналов типа единичный скачок (а), импульс конечной длительности (б), комплексный (в) и вещественный (г) радиоскачок

### 5. Комплексный радиоскачок с частотой заполнения $\omega_c$ :

$$x(n) = e^{j\omega_c \cdot n \cdot T_d} = \cos(\omega_c \cdot n \cdot T_d) + j \cdot \sin(\omega_c \cdot n \cdot T_d), \quad n \geq 0.$$

Z-образ его, как и вещественного скачка, определяется суммой бесконечного числа членов геометрической прогрессии:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega_c \cdot n \cdot T_d} \cdot z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{j\omega_c \cdot T_d} \cdot z^{-1}}.$$

Сигнал имеет один нуль  $z_0 = 0$  и один комплексный полюс  $z_p = e^{j\omega_c \cdot T_d}$  на частоте  $\omega_c$  (рис. 2.12, в). Спектр сигнала описывается выражением

$$X(j \cdot \omega) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_d}} = \frac{1}{1 - e^{j\omega_c \cdot T_d} \cdot e^{-j\omega T_d}} = \frac{e^{j \cdot [(\omega - \omega_c) \cdot T_d - \pi] / 2}}{2 \cdot \sin\left(\frac{(\omega - \omega_c) \cdot T_d}{2}\right)}.$$

Модуль его  $|X(j \cdot \omega)| = \frac{1}{2 \cdot \left| \sin \left( \frac{(\omega - \omega_c) \cdot T_d}{2} \right) \right|}$  для  $\omega_c = \omega_d / 4$  показан

на рис. 2.13, в.

**6. Вещественный радиоскачок с частотой заполнения  $\omega_c$ :**

$$x(n) = \cos(\omega_c \cdot n \cdot T_d) = \frac{e^{j\omega_c \cdot n \cdot T_d} + e^{-j\omega_c \cdot n \cdot T_d}}{2}, \quad n \geq 0.$$

Его Z-преобразование

$$X(z) = \frac{1/2}{1 - e^{-j\omega_c \cdot T_d} \cdot z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - e^{j\omega_c \cdot T_d} \cdot z^{-1}} = \frac{1 - \cos(\omega_c \cdot T_d) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot \cos(\omega_c \cdot T_d) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$$

имеет пару комплексно-сопряженных полюсов  $z_{p1,2} = e^{\pm j\omega_c \cdot T_d}$  и пару нулей  $z_{01} = 0$  и  $z_{02} = \cos(\omega_c \cdot T_d)$  (рис. 2.12, з).

Спектр сигнала  $X(j \cdot \omega) = X(z)|_{z=e^{j\omega T_d}}$ , взятый по модулю, показан на рис. 2.13, з для  $\omega_c = \omega_d / 4$ .

**Сигналы 5, 6** используются для анализа переходных процессов и избирательности селективных дискретных систем.

**7. Комплексный радиоимпульс** конечной длительности  $N \cdot T_d$ :

$$x(n) = e^{j\omega_0 n T_d} = \cos(\omega_0 \cdot n \cdot T_d) + j \cdot \sin(\omega_0 \cdot n \cdot T_d), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Ему соответствует Z-образ

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega_0 n T_d} \cdot z^{-n} = \frac{1 - e^{j\omega_0 N T_d} \cdot z^{-N}}{1 - e^{j\omega_0 T_d} \cdot z^{-1}}$$

и Фурье-преобразование

$$X(j \cdot \omega) = \frac{1 - e^{-j(\omega - \omega_0) N T_d}}{1 - e^{-j(\omega - \omega_0) T_d}} = e^{-j \frac{\omega - \omega_0}{2} (N-1) T_d} \cdot \frac{\sin \left( \frac{\omega - \omega_0}{2} \cdot N \cdot T_d \right)}{\sin \left( \frac{\omega - \omega_0}{2} \cdot T_d \right)}.$$

Спектр комплексного радиоимпульса и его график соответствуют спектру видеоимпульса 4, смещенному на частоту  $\omega_0$  (влево или вправо в зависимости от знака частоты  $\omega_0$ ).

**8. Вещественный радиоимпульс** конечной длительности  $N \cdot T_d$ :

$$x(n) = \cos(\omega_0 \cdot n \cdot T_d), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Его Z-образ и Фурье-преобразование могут быть представлены полусуммой Z-образов и спектров радиоимпульсов  $e^{j\omega_0 n T_d}$  и  $e^{-j\omega_0 n T_d}$ :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{[e^{j\omega_0 n T_d} + e^{-j\omega_0 n T_d}]}{2} z^{-n} = \left[ \frac{1 - e^{j\omega_0 N T_d} z^{-N}}{2 \cdot [1 - e^{j\omega_0 T_d} z^{-1}]} + \frac{1 - e^{-j\omega_0 N T_d} z^{-N}}{2 \cdot [1 - e^{-j\omega_0 T_d} z^{-1}]} \right];$$

$$X(j \cdot \omega) = \frac{e^{-j \frac{\omega - \omega_0}{2} (N-1) T_d}}{2} \cdot \frac{\sin \left( \frac{\omega - \omega_0}{2} N T_d \right)}{\sin \left( \frac{\omega - \omega_0}{2} T_d \right)} + \frac{e^{j \frac{\omega + \omega_0}{2} (N-1) T_d}}{2} \cdot \frac{\sin \left( \frac{\omega + \omega_0}{2} N T_d \right)}{\sin \left( \frac{\omega + \omega_0}{2} T_d \right)}.$$

График модуля спектра можно получить путем смещения по частоте спектра видеоимпульса на  $+\omega_0$  и  $-\omega_0$  и суммирования смещенных спектров.

## 2.8. Передаточная функция и частотная характеристика дискретной системы

Передаточная функция аналоговой системы определяется отношением преобразований Лапласа ее выходного и входного сигналов:  $H(s) = Y(s) / X(s)$ .

Операторное представление описывающего такие системы дифференциального уравнения (2.11) и интеграла свертки (2.12) дает общие выражения для передаточных функций аналоговых систем соответственно в виде дробно-рациональной функции комплексной переменной  $S$ :

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i \cdot s^i}{\sum_{k=0}^M a_k \cdot s^k} \quad (2.33)$$

и в виде преобразования Лапласа импульсной характеристики системы  $h(t)$

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt. \quad (2.34)$$

Корням полиномов числителя  $B(s) = 0$  и знаменателя  $A(s) = 0$  передаточной функции (2.34) соответствуют нули  $s_{0i}$  и полюса  $s_{pi}$  системы, через которые передаточная функция представляется в так называемой нуль-полюсной форме:

$$H(s) = C \cdot \prod_{i=1}^M \frac{s - s_{0i}}{s - s_{pi}}, \quad (2.35)$$

где  $C$  – нормирующая константа.

По передаточной функции аналоговой системы непосредственно находится ее частотная характеристика

$$H(j \cdot \omega) = \frac{Y(j \cdot \omega)}{X(j \cdot \omega)} = H(s) \Big|_{s=j \cdot \omega},$$

которая в соответствии с (2.35) выражается и как Фурье-преобразование ее импульсной характеристики:

$$H(j \cdot \omega) = H(s) \Big|_{s=j \cdot \omega} = \int_0^{\infty} h(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt.$$

Передаточной функцией дискретной системы называется отношение Z-образов выходного и входного сигналов системы

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

Конкретные ее выражения, получаемые  $Z$ -преобразованием разностных уравнений (2.13), (2.14) или (2.15), имеют при таком определении вид дробно-рациональной или целой рациональной функций. В результате решение разностного уравнения дискретной системы заменяется более простым решением алгебраических уравнений, описывающих ее передаточную функцию (аналогично операторному методу решения дифференциальных уравнений для аналоговых систем).

Из  $Z$ -преобразования левых и правых частей ДВС (2.16)

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m)z^{-n} = H(z)X(z)$$

следует, что передаточная функция дискретной системы является  $Z$ -преобразованием ее импульсной характеристики

$$H(z) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) \cdot z^{-m}.$$

Импульсная характеристика системы соответствует, в свою очередь, обратному  $Z$ -преобразованию ее передаточной функции

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C H(z)z^{n-1} dz.$$

Частотная характеристика дискретной системы, определяемая отношением Фурье-образов выходного и входного сигналов, с учетом связи между  $Z$ - и Фурье-преобразованиями (2.12) находится по передаточной функции системы  $H(z)$  простой заменой  $z$  на  $e^{j\omega T_d}$ :

$$H(j \cdot \omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_d}} = \frac{Y(j \cdot \omega)}{X(j \cdot \omega)}.$$

Легко заметить, что как Фурье-образы дискретных сигналов, так и частотные характеристики дискретной системы представляют собой функции относительной или нормированной частоты  $\lambda = \omega \cdot T_d = 2 \cdot \pi \cdot f / f_d$ , называемой также цифровой частотой. Значениям круговой частоты  $\omega$  в пределах  $(0 \dots \omega_d)$  и  $(-\omega_d / 2 \dots \omega_d / 2)$  соответствуют значения цифровой частоты  $\lambda$  в пределах  $(0 \dots 2\pi)$  и  $(-\pi \dots \pi)$ . Частотная характеристика дискретной системы, как функция цифровой частоты  $\lambda$ , определяется выражениями:

$$H(j \cdot \lambda) = H(z) \Big|_{z=e^{j\lambda}} = \frac{Y(j \cdot \lambda)}{X(j \cdot \lambda)},$$

$$H(j \cdot \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot e^{-j\lambda \cdot n}.$$

Заданная таким образом частотная характеристика не зависит от значения частоты дискретизации  $\omega_d$ , а соответствующая ей импульсная характеристика имеет период дискретизации  $T_d = 1$ .

Полезно и еще одно возможное представление частотной характеристики в виде отношения мгновенных значений выходного и входного комплексных гармонических сигналов системы в установившемся режиме:

$$H(j \cdot \omega) = \frac{y(n)}{x(n)} \text{ при } x(n) = e^{j \cdot \omega \cdot n \cdot T_d}.$$

Модуль и аргумент частотной характеристики дискретной системы обладают свойством соответственно четной и нечетной симметрии и называются соответственно амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристиками системы.

Это же относится и к реальной и мнимой частям комплексной частотной характеристики, первая из которых является четной функцией частоты, а вторая – нечетной.

Из определения частотной характеристики дискретной системы как преобразования Фурье импульсной характеристики следует также свойство ее периодичности с периодом по частоте  $\omega_d$  или  $2 \cdot \pi$  (рис. 2.14). Оно присуще Фурье-преобразованиям любых дискретных последовательностей, в том числе спектрам дискретных сигналов.

Математически это объясняется периодичностью комплексной экспоненты  $e^{j \cdot \omega \cdot n \cdot T_d} = e^{j \cdot (\omega + k \cdot \omega_d) \cdot n \cdot T_d} = e^{j \cdot (\lambda + 2 \cdot \pi \cdot k) \cdot n}$ .

$$H(j \cdot \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot e^{j \cdot (\omega + k \cdot \omega_d) \cdot n \cdot T_d} = H[j \cdot (\omega + k \cdot \omega_d)],$$

или  $H(j \cdot \lambda) = H[j \cdot (\lambda + 2 \cdot \pi \cdot k)]$ , где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

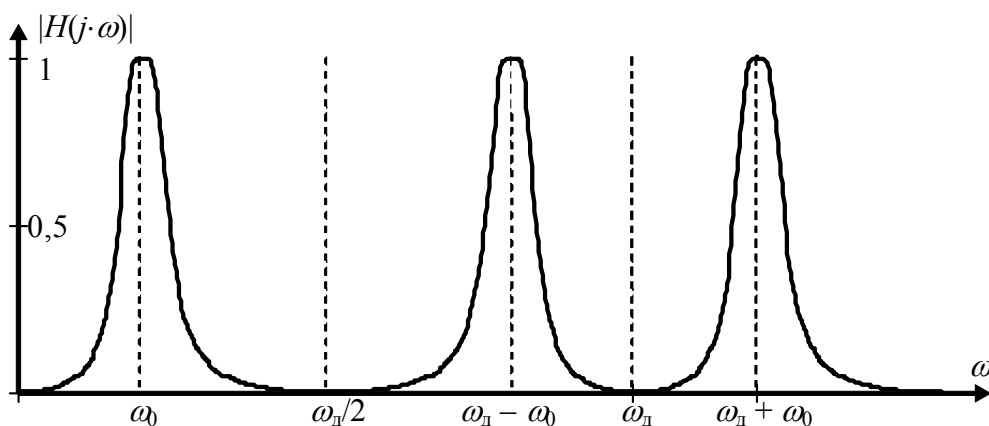


Рис. 2.14. Примерный вид АЧХ цифрового полосового фильтра

При математическом анализе и синтезе цифровых фильтров учитывается один период их частотной характеристики в основной полосе от 0 до  $\pm \omega_d / 2$ .

Требования к цифровым фильтрам и технические описания их характеристик приводятся, как и для аналоговых фильтров, только для реальных положительных частот, в данном случае в диапазоне  $0 \dots \omega_d / 2$ .

Зависимость частотной характеристики цифрового фильтра от частоты дискретизации сигнала, отождествляемой с частотой дискретизации импульсной характеристики фильтра, является еще одной важной для понимания особенностью частотных свойств таких фильтров. Изменение частоты дискретизации с  $\omega_d$  на  $\omega'_d$  изменяет масштаб частотной характеристики  $H(j\omega)$  по обоим осям в  $\alpha = \omega'_d / \omega_d$  раз, пропорционально сжимая или растягивая частотную характеристику цифрового фильтра (это отвечает одному из свойств преобразования Фурье). Частотной характеристике  $H(j\omega') = \alpha H(j\alpha \cdot \omega)$  соответствуют новые значения граничных и центральных частот цифрового фильтра  $\omega'_i$ , связанные с их исходными значениями  $\omega_i$  (например,  $\omega_0$  на рис. 2.14) соотношением  $\omega'_i = \alpha \omega_i$ .

Следовательно, с изменением частоты дискретизации сигнала частотная характеристика цифрового фильтра автоматически перестраивается к новому значению частоты дискретизации.

Таким образом, **периодичность, зависимость от частоты дискретизации и конечный верхний предел граничной частоты, равный  $\omega_d / 2$** , принципиально отличают частотные характеристики цифровых фильтров и дискретных систем от аналоговых.

## 2.9. Передаточные функции рекурсивных цифровых фильтров.

### Условие физической реализуемости

Рекурсивный фильтр (РЦФ) реализует алгоритм обработки, описываемый разностным уравнением (2.14). Выполним  $Z$ -преобразование левых и правых частей (2.14), учитывая свойства линейности и задержки  $Z$ -преобразования (2.24), (2.25):

$$Y(z) = \sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i} \cdot X(z) - \sum_{k=1}^M a_k \cdot z^{-k} \cdot Y(z).$$

Переходя к отношению  $Y(z) / X(z)$ , получим общее выражение для передаточной функции рекурсивного фильтра:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k \cdot z^{-k}}. \quad (2.36)$$

Оно представляет отношение двух полиномов по степеням комплексной переменной  $z^{-1}$ . Его можно рассматривать так же, как произведение двух передаточных функций:  $H_H(z) = B(z^{-1})$  – нерекурсивной части фильтра и  $H_P(z) = 1 / A(z^{-1})$  – рекурсивной части фильтра, т. е.

$$H(z) = H_H(z) \cdot H_P(z).$$

Выражение передаточной функции (2.36) относительно переменной  $z^{-1}$ , которая, как выше показано, отражает задержку на один период дискретизации, удобно тем, что по нему можно формально составить соответствующее передаточной функции **разностное уравнение системы**, определяющее ее алгоритм обработки.

Например, передаточной функции  $H(z) = b_0 / (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$  отвечает разностное уравнение  $y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$ .

Очевидно, что столь же формальным способом, основанным на сопоставлении разностного уравнения (2.14) и передаточной функции (2.36), можно непосредственно записать выражение для передаточной функции системы по ее известному разностному уравнению, не прибегая, как выше, к его  $Z$ -преобразованию.

В выражении (2.36) передаточной функции, как и разностного уравнения (2.14), предполагается, что порядок  $N$  полинома  $B(z^{-1})$  не превышает порядка  $M$  полинома  $A(z^{-1})$ , определяющего порядок цифрового фильтра  $M$ , т. е. выполняется **условие  $N \leq M$** . В случае  $N > M$  передаточная функция (2.36), полученная по разностному уравнению (2.14) делением числителя на знаменатель, приводится к сумме двух передаточных функций, первая из которых (частное) соответствует передаточной функции нерекурсивного фильтра  $(N-M)$ -го порядка, а вторая (остаток от деления) – передаточной функции рекурсивного фильтра, порядок числителя которой всегда меньше  $M$ .

При анализе цифровых фильтров передаточную функцию (2.36) выражают также в виде отношения полиномов  $B(z)$  и  $A(z)$  по положительным степеням переменной  $Z$ . Для этого достаточно числитель и знаменатель (2.36) умножить на  $z^M$ :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = z^{M-N} \cdot \frac{\sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{N-i}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k \cdot z^{M-k}}. \quad (2.37)$$

Множитель  $z^{M-N}$  при  $N < M$  означает наличие  $(M-N)$  нулевых корней числителя, которые, ни на что не влияя, обеспечивают равенство корней числителя и знаменателя (т. е. числа нулей и полюсов).

Передаточная функция рекурсивного фильтра может быть получена не только из  $Z$ -преобразования разностного уравнения, но и задана в виде отношения двух полиномов по положительным степеням переменной  $Z$ :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{N-i}}{\sum_{k=0}^M a_k \cdot z^{M-k}}. \quad (2.38)$$

В данном случае выполнение условия  $N \leq M$  является обязательным. Чтобы убедиться в этом, поделим числитель и знаменатель (2.38) на  $z^M$ :

$$H(z) = \frac{b_0 \cdot z^{N-M} + b_1 \cdot z^{N-M-1} + \dots + b_{N-M} \cdot z^0 + b_{N-M+1} \cdot z^{-1} + \dots + b_N \cdot z^{-M}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_M \cdot z^{-M}}. \quad (2.39)$$

Выражению (2.39) соответствует следующее разностное уравнение:

$$\begin{aligned} y(n) = & b_0 \cdot x(n + (N - M)) + b_1 \cdot x(n + (N - M - 1)) + \dots + \\ & + b_{N-M} \cdot x(n) + b_{N-M+1} \cdot x(n-1) + \dots + b_N \cdot x(n-M) - \\ & - [a_1 \cdot y(n-1) + a_2 \cdot y(n-2) + \dots + a_M \cdot y(n-M)]. \end{aligned}$$

По этому уравнению текущий отсчет выходного сигнала  $y(n)$  вычисляется не только по текущему  $x(n)$  и предыдущим  $x(n-i)$  отсчетам входного сигнала, но и по  $(N-M)$  его будущим, т. е. **неизвестным отсчетам**  $x(n + N - M)$ ,  $x(n + N - M - 1)$ , ...,  $x(n + 1)$ , что практически невозможно. Таким образом, **условие  $N \leq M$** , при котором степень числителя передаточной функции, заданной в форме (2.38), не превышает степень ее знаменателя, является одним из вариантов **условия физической реализуемости** дискретной системы (выходной сигнал не должен опережать входной).

Если в выражении (2.38)  $N < M$ , то соответствующее разностное уравнение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} y(n) = & b_0 \cdot x(n - (M - N)) + b_1 \cdot x(n - (M - N + 1)) + \dots + \\ & + b_{M-N} \cdot x(n) + b_{M-N+1} \cdot x(n-1) + \dots + b_N \cdot x(n-M) - \\ & - [a_1 \cdot y(n-1) + a_2 \cdot y(n-2) + \dots + a_M \cdot y(n-M)]. \end{aligned}$$

Здесь отсчеты входного сигнала  $x(n)$ ,  $x(n-1)$ , ...,  $x(n-M+N+1)$  используются при вычислении  $y(n)$ , что равнозначно запаздыванию отклика фильтра на  $(M-N)$  отсчетов.

Таким образом, передаточные функции рекурсивного фильтра в форме (2.37), (2.38) могут быть обобщенно представлены отношением двух полиномов  $B(z)$  и  $A(z)$  одинакового порядка  $N = M$ :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{N-i}}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot z^{N-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (2.40)$$

Передаточные функции (2.37), (2.38) с  $N < M$  приводятся к (2.40) приравниванием к нулю коэффициентов  $b_i$  при  $N < i \leq M$ .

В приведенных выше вариантах полиномиальной формы передаточной функции коэффициенты полиномов  $b_0$  и  $a_0$  (при  $i = k = 0$ ) играют масштабирующую роль и без потери общности могут быть приняты равными единице.



По передаточной функции в форме (2.40) находятся ее нули и полюса, играющие главную роль при синтезе и анализе рекурсивных фильтров.

**Нули** передаточной функции являются корнями числителя (2.40), т. е. значениями переменной  $Z$ , обращающими в нуль полином  $B(z)$ :

$$B(z) = 0 \text{ при } z = z_{0i}.$$

**Полюса** соответствуют корням знаменателя передаточной функции:

$$A(z) = 0 \text{ при } z = z_{pi}.$$

Цифровые фильтры с вещественными коэффициентами  $a_k, b_i$  имеют вещественные (в частном случае нулевые) и/или комплексно-сопряженные нули и полюса.

Нули и полюса могут быть простыми и кратными.

Если порядок числителя передаточной функции  $N$  меньше порядка знаменателя  $M$ , то такой фильтр имеет  $(M - N)$  нулей, равных нулю, т. е. размещенных в начале координат комплексной  $Z$ -плоскости.

Зная нули и полюсы передаточной функции, ее можно представить в так называемой нуль-полюсной форме, используя разложение полиномов числителя и знаменателя на элементарные сомножители:

$$H(z) = \prod_{i=1}^N \frac{(z - z_{0i})}{(z - z_{pi})} = \prod_{i=1}^N \frac{(1 - z_{0i} \cdot z^{-1})}{(1 - z_{pi} \cdot z^{-1})}. \quad (2.41)$$

В выражении (2.41) может присутствовать нормирующий множитель  $C = b_0 / a_0$ , если коэффициенты  $b_0$  и  $a_0$  передаточной функции не равны единице.

Выражение для передаточной функции в форме (2.41) используется при реализации рекурсивных фильтров. Кроме того, оно упрощает поиск аналитических выражений импульсных характеристик рекурсивных фильтров по их передаточным функциям.

Если передаточная функция задана в виде суммы элементарных дробей (2.42):

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{D(z)}{(z - z_{pr})^r \cdot (z - z_{p(r+1)}) \cdot \dots \cdot (z - z_{pM})} = \\ &= \sum_{u=1}^r \frac{B_u}{(z - z_{pr})^u} + \sum_{i=r+1}^M \frac{B_i}{(z - z_{pi})} + B_0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

то для **простых полюсов** выражение для импульсной характеристики получается в виде

$$h(n) = \sum_{i=1}^M B_i \cdot z_{pi}^{n-i}, \quad n > 0; \quad h(0) = B_0. \quad (2.43)$$

При наличии **полюса кратности  $r$**  в выражение для импульсной характеристики добавляются коэффициенты

$$h_r(n) = \frac{B_r}{(r-1)!} \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(r-1)) \cdot z_{pr}^{n-r}, \quad h_r(0) = 0. \quad (2.44)$$

Таким образом, выражения (2.43), (2.44) для элементарных дробей с простыми и кратными полюсами позволяют непосредственно определить импульсную характеристику рекурсивного фильтра по его передаточной функции, заданной в форме (2.42).

## 2.10. Частотные характеристики рекурсивных фильтров.

### Условие устойчивости

Частотную характеристику РЦФ можно получить на основе любого из выражений его передаточной функции  $H(z)$ : дробно-полиномиального (2.40), (2.36), нуль-полюсного (2.41) или разложения на элементарные дроби (2.42), используя замену  $z = e^{j\omega T_d}$ .

Передаточной функции (2.36) соответствует частотная характеристика РЦФ вида

$$H(j \cdot \omega) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i \cdot e^{-j\omega T_d \cdot i}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k \cdot e^{-j\omega T_d \cdot k}}. \quad (2.45)$$

Передаточной функции РЦФ в нуль-полюсной форме (2.41) отвечает выражение для ЧХ, указывающее способ ее графоаналитического вычисления:

$$H(j \cdot \omega) = \prod_{i=1}^M \frac{e^{j\omega T_d} - |z_{0i}| \cdot e^{j\omega_{0i} T_d}}{e^{j\omega T_d} - |z_{pi}| \cdot e^{j\omega_{pi} T_d}} = \prod_{i=1}^M \frac{R_{0i}(j \cdot \omega)}{R_{pi}(j \cdot \omega)}. \quad (2.46)$$

Числитель и знаменатель (2.46) представляют векторные расстояния  $R_{0i}$ ,  $R_{pi}$  от точки на единичной окружности с угловой координатой  $\omega \cdot T_d$  соответственно до нулей  $z_{0i}$  и полюсов  $z_{pi}$  РЦФ. Переход к модулю и аргументу (2.46) дает выражения для АЧХ и ФЧХ РЦФ в виде

$$|H(j \cdot \omega)| = \prod_{i=1}^M \frac{|R_{0i}(j \cdot \omega)|}{|R_{pi}(j \cdot \omega)|}, \quad (2.47)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^M \psi_{0i} - \psi_{pi}, \quad (2.48)$$

где  $|R_{0i}|$ ,  $|R_{pi}|$  – длины векторов  $R_{0i}(j\omega)$ ,  $R_{pi}(j\omega)$ , а  $\psi_{0i}$ ,  $\psi_{pi}$  – углы, образуемые ими с осью абсцисс.

Расположив нули и полюса на комплексной  $Z$ -плоскости (рис. 2.15) и измерив модули и углы векторов, соединяющих их с точ-

кой на единичной окружности, соответствующей заданной частоте  $\omega \cdot T_d$  или  $\lambda$  (например, с точкой  $A$  на рис. 2.15), с помощью (2.47), (2.48) можно вычислить АЧХ и ФЧХ фильтра для любых значений частоты сигнала в диапазоне  $(0 \dots \omega_d / 2)$ .

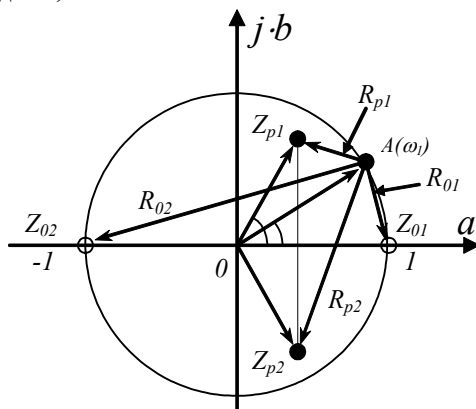


Рис. 2.15. Картина нулей и полюсов ЦФ

Такой графический способ очень удобен для качественной оценки вида частотной характеристики и частотных свойств РЦФ по значениям его нулей и полюсов. В соответствии с (2.47) и рис. 2.15 частотам  $\omega = \omega_{pi}$  минимального расстояния до полюсов  $R_{pi \min}$  отвечают максимальные значения АЧХ или коэффициента передачи РЦФ, частотам  $\omega = \omega_{0i}$  минимального расстояния до нулей  $R_{0i \min}$  – минимальные значения коэффициента передачи фильтра.

Таким образом, **положение нулей определяет полосу пропускания** частотной характеристики фильтра, а **положение полюсов – ее полосу задерживания**.

В качестве примера в табл. 2.1 приведены значения АЧХ РЦФ 2-го порядка, вычисленные по картине нулей и полюсов рис. 2.15 для ряда нормированных цифровых частот  $\lambda$ . Отображенные на рисунке нули и полюса имеют значения  $z_{01} = 1$ ;  $z_{02} = -1$ ;  $z_{p1} = 0,4 + j \cdot 0,6$ ;  $z_{p2} = 0,4 - j \cdot 0,6$ . По виду АЧХ такой фильтр можно отнести к полосно-пропускающему фильтру.

Таблица 2.1

$\lambda = \omega T_d$	0	$\lambda_A$	$\lambda_{p1}$	$\pi / 2$	$\pi$
$A(\lambda)$	0	1,5	4,82	2,24	0

Располагая должным образом нули и полюса на комплексной  $Z$ -плоскости и оптимизируя их значения, можно синтезировать РЦФ с заданной частотной характеристикой, в том числе и произвольного вида.

С помощью нулей, размещаемых на единичной окружности, при этом формируются частоты бесконечного затухания АЧХ.

Нулям, превышающим по модулю единицу, отвечают РЦФ неминимально-фазового типа, используемые в качестве амплитудных и фазовых корректоров.

По картине нулей и полюсов на комплексной плоскости судят также об устойчивости РЦФ.

### **Критерий устойчивости**

Полюса устойчивого РЦФ, не превышающие по модулю единицу ( $|z_{pi}| < 1$ ), находятся внутри круга единичного радиуса. Для устойчивого аналогового фильтра полюса находятся в левой  $S$ -полуплоскости, которая (рис. 2.11) при  $Z$ -преобразовании отображается внутрь круга единичного радиуса.

## **2.11. Формы реализации рекурсивных фильтров**

Рекурсивные фильтры осуществляют обработку сигнала в соответствии с разностным уравнением (2.14). Основными формами их реализации являются:

- прямая форма 1;
- прямая форма 2 (каноническая);
- дуальная (обращенная каноническая).

Известны также **лестничные и решетчатые структуры РЦФ**, используемые в **адаптивных системах**.

При соединении блоков фильтров возможны следующие структуры:

- каскадная;
- параллельная;
- с обратной связью.

Разностные уравнения включают вычислительные операции умножения, суммирования и задержки.

На структурных схемах и при аппаратной реализации ЦФ им соответствуют элементы цифровой задержки или памяти ( $Z^{-1}$ ), множители ( $X$ ) и сумматоры ( $\Sigma$ ).

РЦФ порядка выше второго (по числу полюсов или порядку  $M$  общего разностного уравнения (2.14)) реализуются, как правило, путем последовательного или параллельного соединения базовых звеньев второго порядка, что соответствует каскадной (последовательной) и параллельной формам их реализации.

Базовые биквадратные звенья РЦФ выполняются в соответствии с прямой или канонической формами реализации РЦФ.

Число последовательных или параллельных звеньев  $L$  при четном порядке фильтра  $M$  находится как  $L = M / 2$ , а при нечетном –

как  $L = (M + 1) / 2$ , при этом одно звено фильтра является звеном первого порядка (звеном с одним вещественным полюсом).

### Каскадная структура

Передаточная функция каскадно реализуемого РЦФ (рис. 2.16) определяется произведением передаточных функций его звеньев:

$$H(z) = C_0 \cdot \prod_{J=1}^L H_J(z). \quad (2.49)$$

$$H_J(z) = \frac{1 + b_{1J} \cdot z^{-1} + b_{2J} \cdot z^{-2}}{1 + a_{1J} \cdot z^{-1} + a_{2J} \cdot z^{-2}} = \frac{z^2 + b_{1J} \cdot z + b_{2J}}{z^2 + a_{1J} \cdot z + a_{2J}} = \frac{(z - z_{01J}) \cdot (z - z_{02J})}{(z - z_{p1J}) \cdot (z - z_{p2J})},$$

где  $H_J(z)$  – передаточная функция  $J$ -го биквадратного звена при значении коэффициента  $b_{0J} = 1$ ;  $C_0$  – нормирующий или масштабирующий множитель.

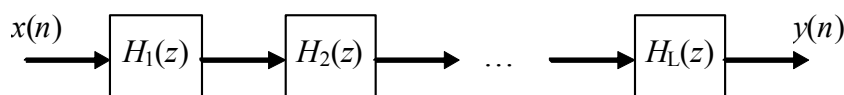


Рис. 2.16. Каскадная структура ЦФ

Для звена первого порядка коэффициенты  $b_{2J}$  и  $a_{2J}$  в (2.49) равны нулю. Входным сигналом  $J$ -го звена  $x_J(n)$  в такой структуре является выходной сигнал  $y_{J-1}(n)$  предыдущего ( $J - 1$ )-го звена:  $x_J(n) = y_{J-1}(n)$ .

Коэффициенты звеньев и их полюса, нули связаны соотношениями:

$$z_{01,2J} = \frac{-b_{1J} \pm \sqrt{b_{1J}^2 - 4 \cdot b_{2J}}}{2}, \quad z_{p1,2J} = \frac{-a_{1J} \pm \sqrt{a_{1J}^2 - 4 \cdot a_{2J}}}{2},$$

$$b_{1J} = -(z_{01J} + z_{02J}), \quad a_{1J} = -(z_{p1J} + z_{p2J}),$$

$$b_{2J} = z_{01J} \cdot z_{02J}, \quad a_{2J} = z_{p1J} \cdot z_{p2J}.$$

Для звена первого порядка  $a_1 = -z_{p1}$ ,  $b_1 = -z_{01}$ .

Например, значениям нулей и полюсов

$$z_{01} = 1; z_{02} = -1; z_{p1} = 0,4 + j \cdot 0,6; z_{p2} = 0,4 - j \cdot 0,6,$$

графически отображенным на рис. 2.15, соответствуют следующие значения коэффициентов рекурсивного звена 2-го порядка:

$$b_0 = 1; b_1 = 0; b_2 = -1; a_1 = -0,8; a_2 = 0,7211.$$

### Параллельная структура

Передаточная функция параллельно реализуемого РЦФ (рис. 2.17) определяется суммой передаточных функций звеньев  $H_J(z)$ , а также константы  $C$ :

$$H(z) = C + \sum_{J=1}^L H_J(z); \quad H_J(z) = \frac{b_{0J} + b_{1J} \cdot z^{-1}}{1 + a_{1J} \cdot z^{-1} + a_{2J} \cdot z^{-2}}. \quad (2.50)$$

Для звена первого порядка коэффициенты  $b_{1J}$  и  $a_{2J}$  в (2.50) равны нулю.

Выходной сигнал фильтра равен сумме выходных сигналов звеньев:

$$y(n) = C \cdot x(n) + \sum_{J=1}^L y_J(n).$$

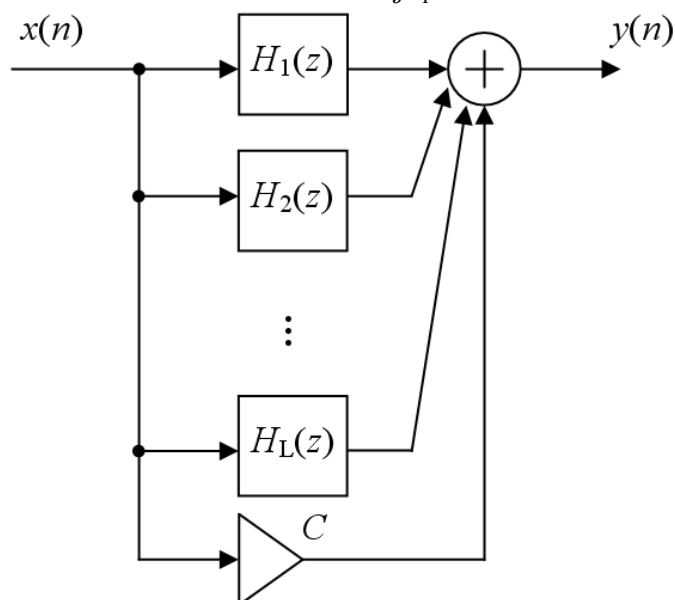


Рис. 2.17. Параллельная структура ЦФ

Передаточная функция, соответствующая параллельной структуре РЦФ, получается разложением на простые дроби передаточной функции фильтра, представленной в полиномиальной или нуль-полюсной форме. При этом порядок числителя передаточной функции звеньев параллельной структуры  $H_J$  (2.50) на единицу меньше порядка знаменателя передаточной функции.

Коэффициенты  $a_{1J}$  и  $a_{2J}$  (2.50) определяются полюсами фильтра с помощью тех же соотношений, что и для каскадно реализуемого РЦФ.

Коэффициент  $C$  в выражении для передаточной функции связан с нулями и полюсами фильтра соотношением

$$C = \prod_{i=1}^M \frac{z_{0i}}{z_{pi}}.$$

Коэффициенты  $C$ ,  $b_{0J}$ ,  $b_{1J}$  можно выразить также через коэффициенты каскадной формы РЦФ, которые связаны с полюсами, нулями фильтра более простой зависимостью.

**Прямая форма (прямая форма 1)** реализации биквадратного звена (рис. 2.18) описывается разностным уравнением вида

$$y(n) = b_0 \cdot x(n) + b_1 \cdot x(n-1) + b_2 \cdot x(n-2) - [a_1 \cdot y(n-1) + a_2 \cdot y(n-2)]. \quad (2.51)$$

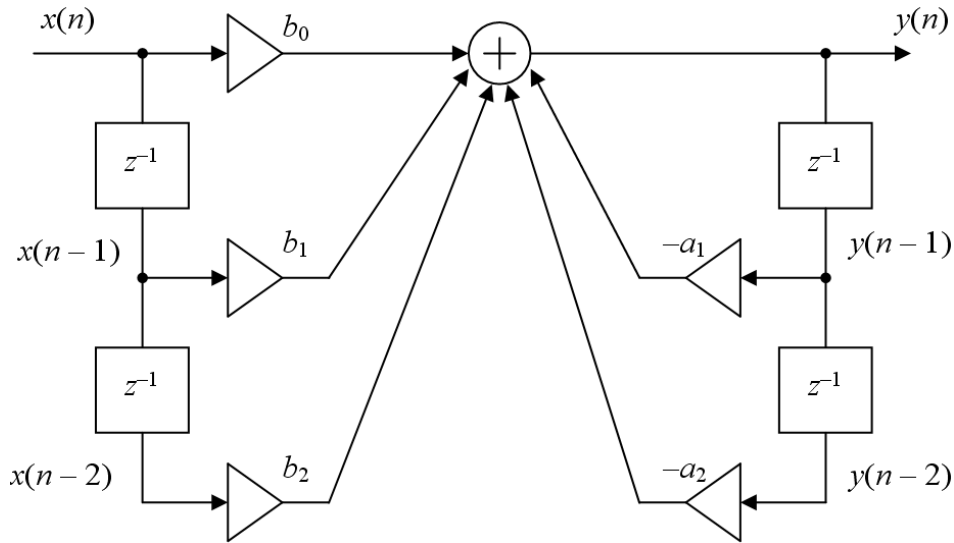


Рис. 2.18. Структура биквадратного звена для прямой формы реализации (прямая форма 1)

Символом  $Z^{-1}$  на схеме обозначен элемент задержки или запоминания сигнала на один период дискретизации  $T_d$ .

Уравнению звена (2.51) эквивалентна также пара разностных уравнений вида:

$$\begin{aligned} w(n) &= b_0 \cdot x(n) + b_1 \cdot x(n-1) + b_2 \cdot x(n-2); \\ y(n) &= w(n) - a_1 \cdot y(n-1) - a_2 \cdot y(n-2), \end{aligned}$$

которые отдельно описывают нерекурсивную и чисто рекурсивную части звена при прямой форме его реализации.

Для аппаратной реализации звена необходимы 4 элемента памяти, сумматор на 5 входов и 5 умножителей (при  $b_0 = 1$  число умножителей 4).

При программной реализации нужно выполнить 5 (или 4) операций умножения и 4 операции сложения на 1 отсчет сигнала.

**Каноническая форма (прямая форма 2)** реализации звена 2-го порядка получается путем представления его передаточной функции в следующем виде:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{A(z)} \cdot B(z) = \frac{W(z)}{X(z)} \cdot \frac{Y(z)}{W(z)} = H_P(z) \cdot H_H(z), \quad (2.52)$$

где  $W(z)$  – вспомогательная переменная;  $H_P(z) = \frac{1}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}$  – передаточная функция рекурсивной части звена;  $H_H(z) = b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}$  – передаточная функция нерекурсивной части звена.

Структура такого звена (рис. 2.19) имеет в 2 раза меньшее число элементов памяти  $Z^{-1}$ .

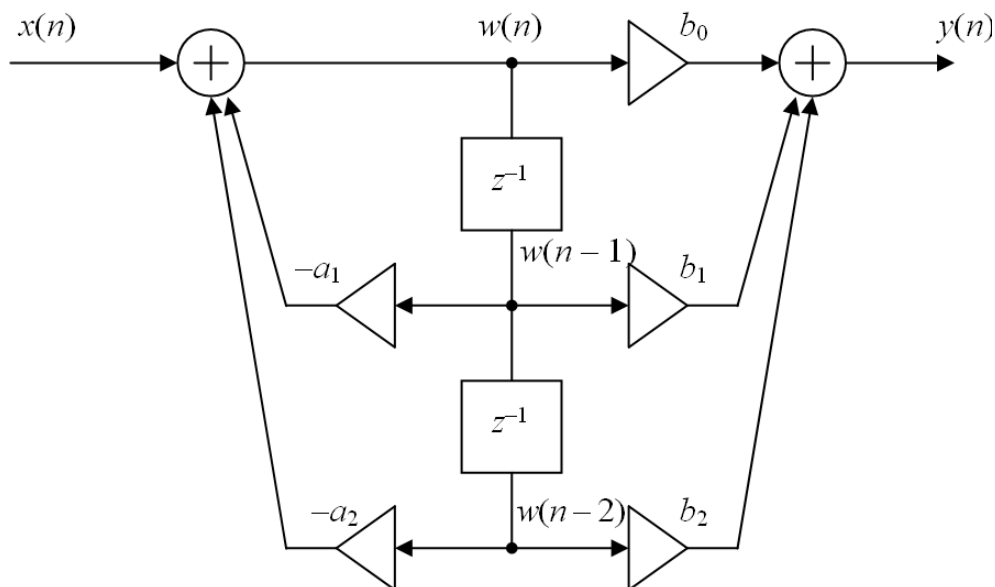


Рис. 2.19. Структурная схема биквадратного звена для канонической формы его реализации (**прямая форма 2**)

Такое звено описывается двумя разностными уравнениями:

$$\begin{aligned} y(n) &= b_0 \cdot w(n) + b_1 \cdot w(n-1) + b_2 \cdot w(n-2); \\ w(n) &= x(n) - a_1 \cdot w(n-1) - a_2 \cdot w(n-2), \end{aligned} \quad (2.53)$$

первое из которых соответствует разностному уравнению рекурсивной, а второе – нерекурсивной части звена в канонической форме. Эти уравнения подобны приведенной выше паре разностных уравнений звена в прямой форме, если поменять местами его нерекурсивную и рекурсивную части и обозначения символов.

Очевидно, что прямая форма и каноническая (**прямая форма 2**) реализации звеньев могут быть легко обобщены и на РЦФ, порядок которых выше 2. Однако каскадная и параллельная формы реализации имеют определенные преимущества с точки зрения модульности структуры и меньшей чувствительности к влиянию конечной разрядности чисел. При этом наиболее часто используемой является каскадная форма реализации РЦФ, что связано с особенностями форматирования коэффициентов фильтров и большей их однородностью, т. е. степенью близости.

На рис. 2.20, 2.21 приведены блок-схемы алгоритмов программной реализации РЦФ на основе каскадного и параллельного соединения биквадратных звеньев. Программы ЦФ имеют циклическую структуру. Во внутреннем цикле по переменной  $J$  осуществляется последовательная обработка текущего отсчета сигнала биквадратными звеньями фильтра в соответствии с их базовой операцией. Базовая операция включает разностные уравнения звена (2.53) и пересылки (или сдвиги) сигнальной па-



мента  $W2(J) = W1(J)$ ,  $W1(J) = W$ , которые предшествуют обработке следующего отсчета сигнала в соответствии с внешним циклом алгоритма.

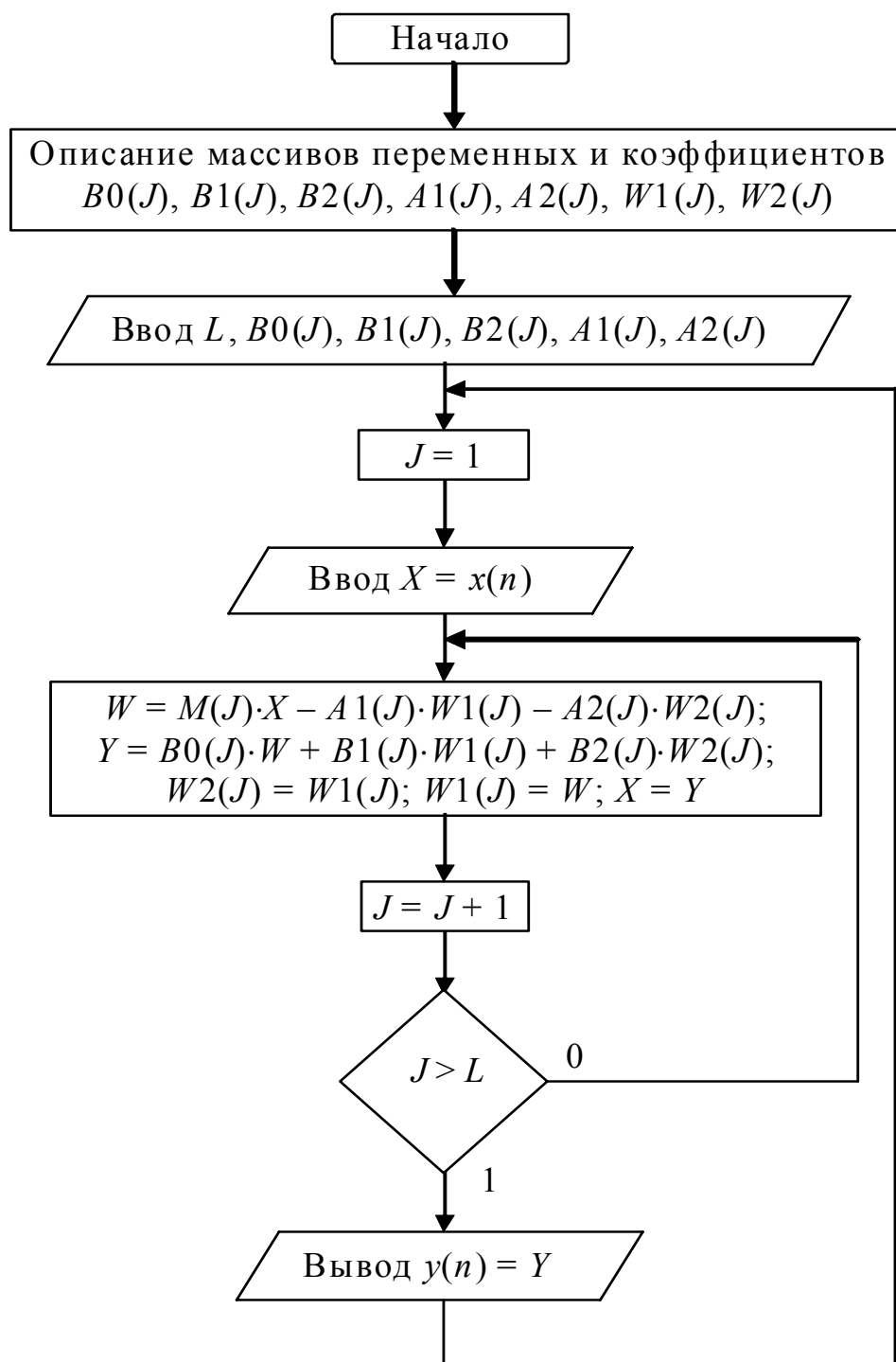


Рис. 2.20. Блок-схема алгоритма программной реализации РЦФ (каскадная форма реализации, прямая форма 2)

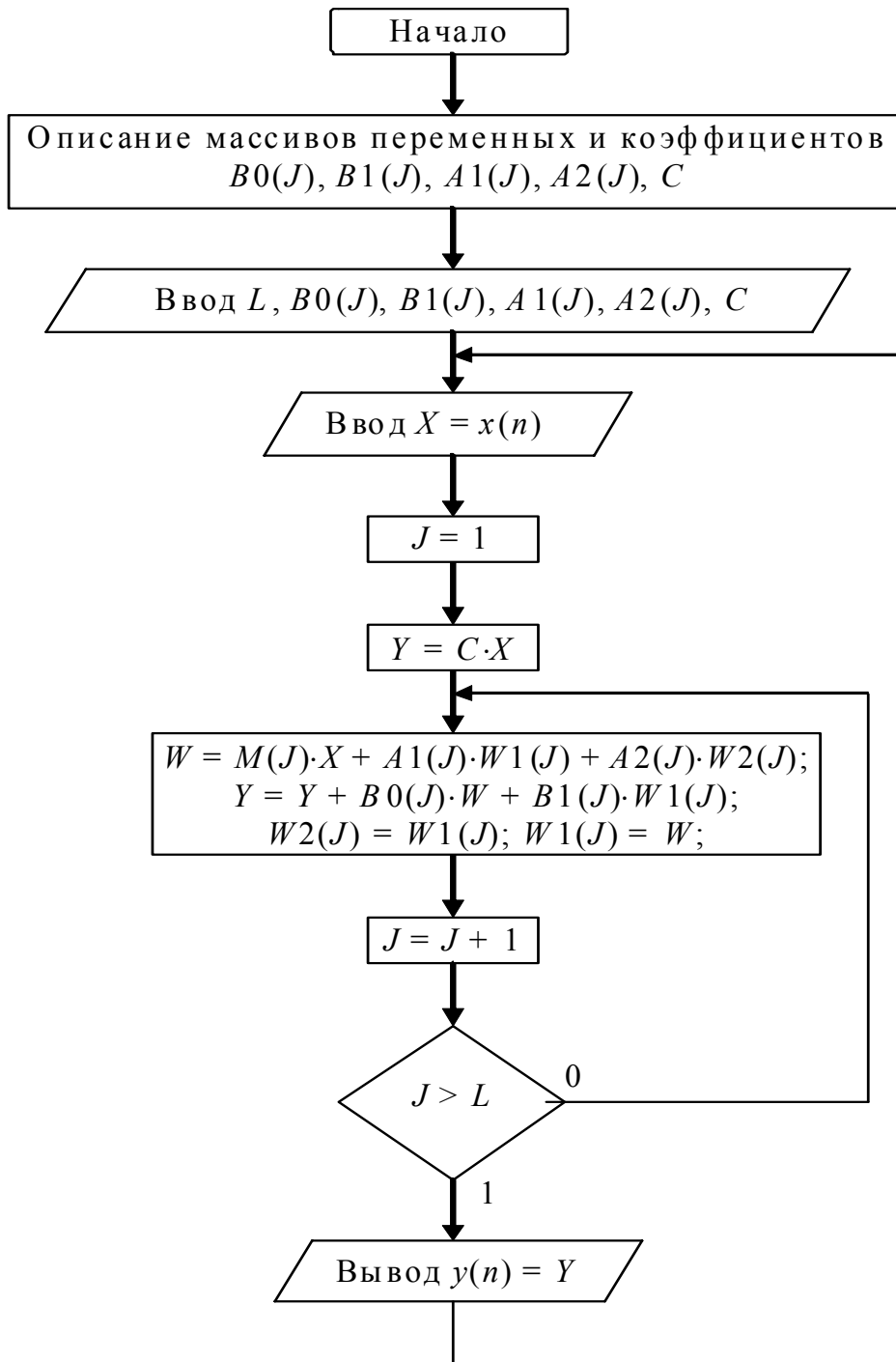


Рис. 2.21. Блок-схема алгоритма программной реализации РЦФ (параллельная форма реализации)

На блок-схемах (рис. 2.20, 2.21) использованы программные переменные (идентификаторы):  $B0(J)$ ,  $B1(J)$ ,  $B2(J)$ ,  $A1(J)$ ,  $A2(J)$  – для коэффициентов звеньев  $b_{0j}$ ,  $b_{1j}$ ,  $b_{2j}$ ,  $a_{1j}$ ,  $a_{2j}$  и  $X$ ,  $Y$ ,  $W$ ,  $W1(J)$ ,  $W2(J)$  – для отсчетов сигнала  $x(n)$ ,  $y(n)$ ,  $w_j(n - 1)$ ,  $w_j(n - 2)$ . С помощью коэффициентов  $M(J)$  осуществляется масштабирование входных сигналов звеньев.

При переходе к прямой форме 1 реализации звеньев базовая операция в соответствии с (2.51) преобразуется к виду

$$X = M(J)X;$$

$$Y = B0(J)X + B1(J)X1(J) + B2(J)X2(J) - A1(J)Y1(J) - A2(J)Y2(J);$$

$$X2(J) = X1(J); X1(J) = X; Y2(J) = Y1(J); X = Y.$$

Идентификаторам  $X1(J)$ ,  $X2(J)$ ,  $Y1(J)$ ,  $Y2(J)$  соответствуют здесь сигналы  $x_j(n-1)$ ,  $x_j(n-2)$ ,  $y_j(n-1)$ ,  $y_j(n-2)$ .

Из других структур РЦФ интерес с точки зрения реализации представляет **дуальная** или **обращенная каноническая структура** биквадратного звена (рис. 2.22). При построении дуальных структур входы заменяются выходами, сумматоры – узлами, а узлы – сумматорами.

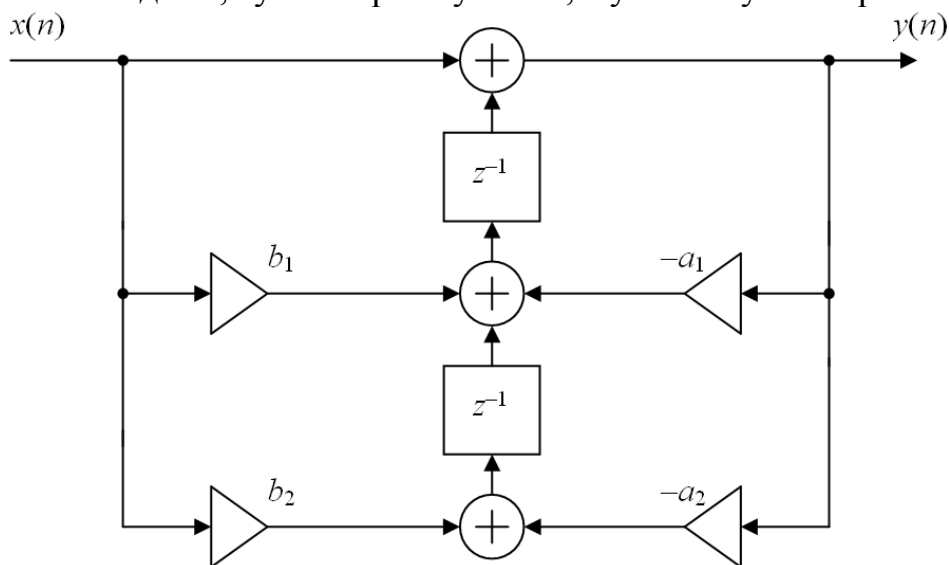


Рис. 2.22. Дуальная каноническая структура биквадратного звена

Базовая операция обращенной структуры звена включает следующие операторы:

$$X = M(J)X;$$

$$Y = X + W1(J); W1(J) = B1(J)X - A1(J)Y + W2(J); W2(J) = B2(J) - A2(J).$$

Для обеспечения нулевых начальных условий работы фильтров переменные, определяющие содержимое ячеек сигнальной памяти, должны быть обнулены при их описании. Это переменные  $W1(J)$ ,  $W2(J)$  для канонической формы звеньев и  $X1(J)$ ,  $X2(J)$ ,  $Y1(J)$ ,  $Y2(J)$  – для прямой.

## 2.12. Прямая форма реализации нерекурсивных фильтров

Нерекурсивному фильтру, основанному на прямом вычислении ДВС, соответствует структурная схема (рис. 2.23).

Для аппаратной реализации НРЦФ необходимы  $(N - 1)$  элемент памяти,  $N$  умножителей и сумматор на  $N$  входов.

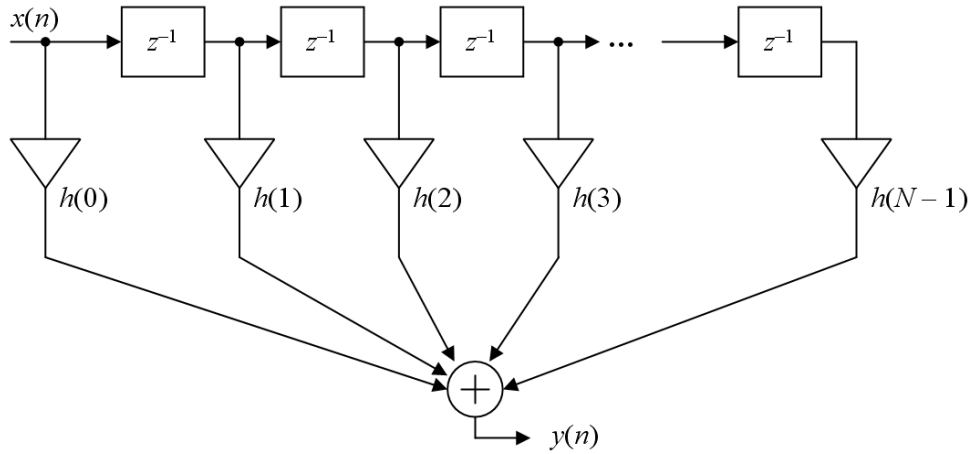


Рис. 2.23. Структурная схема нерекурсивного фильтра на основе ДВС

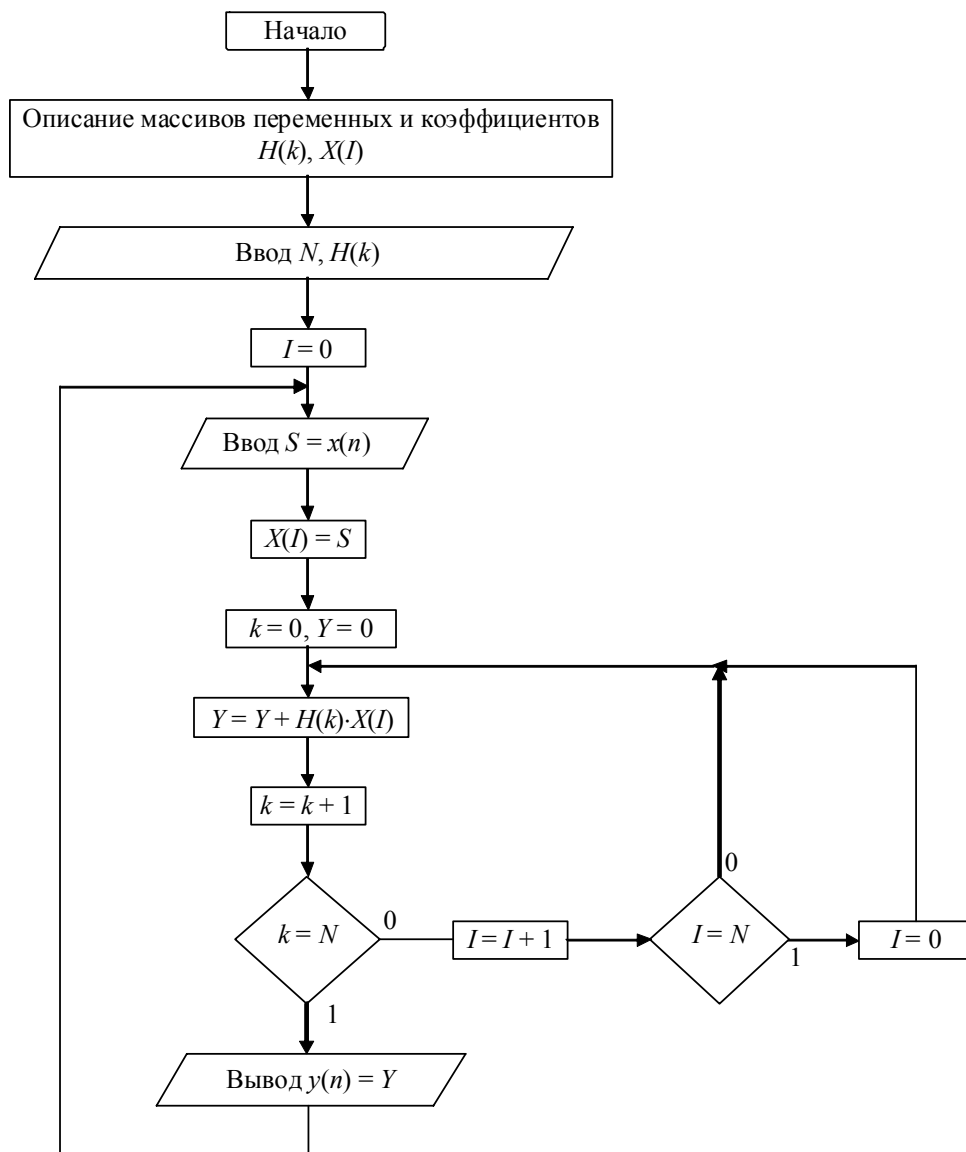


Рис. 2.24. Блок-схема алгоритма программной реализации НРЦФ на основе прямого вычисления ДВС

Блок-схема алгоритма программной реализации НРЦФ приведена на рис. 2.24. Алгоритм обработки представлен в «машинных» переменных  $Y \leftarrow y(n)$ ,  $H(k) \leftarrow h(m)$ ,  $X(l) \leftarrow x(n - m)$ . Фильтр реализует базовую операцию  $Y = Y + H(k)X(l)$ . Переменные  $X(l)$  должны быть обнулены при их описании.

Требуемый объем вычислений при программной реализации составляет  $(N - 1)$  операций сложения и  $N$  операций умножения на каждый отсчет выходного сигнала.

### 2.13. Передаточная функция и частотная характеристика нерекурсивного фильтра

Передаточная функция  $H(z)$  и частотная характеристика  $H(j\omega)$  НРЦФ определяются  $Z$ -преобразованием и преобразованием Фурье его импульсной характеристики:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot z^{-n}, \quad H(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot e^{-j\omega n T_d}. \quad (2.54)$$

При большой крутизне срезов АЧХ нерекурсивные фильтры имеют достаточно длинные импульсные характеристики, требующие большого объема памяти и вычислений.

В то же время им свойственны абсолютная устойчивость и возможность получения строго линейной ФЧХ или постоянного группового времени запаздывания (ГВЗ).

Условием линейности ФЧХ является симметрия импульсной характеристики фильтра:  $h(n) = h(N - 1 - n)$ . Отвечающие данному условию НРЦФ имеют ФЧХ:  $\varphi(\omega) = -\omega \cdot T_d \cdot (N - 1) / 2$  и время запаздывания  $t_3 = -[(N - 1) / 2] \cdot T_d$ .

### 2.14. Нерекурсивные фильтры с линейной фазочастотной характеристикой

Передаточную функцию и частотную характеристику НРЦФ (2.54) с импульсной характеристикой, отвечающей условию симметрии  $h(n) = h(N - 1 - n)$  (рис. 2.25), при нечетном  $N$  можно привести к виду:

$$H(z) = z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) \cdot \left[ z^{-(n-\frac{N-1}{2})} + z^{(n-\frac{N-1}{2})} \right] \right\}; \quad (2.55)$$

$$H(j\omega) = e^{-j\omega T_d \left(\frac{N-1}{2}\right)} \left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2 \cdot h(n) \cos \left[ \omega T_d \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \right] \right\}. \quad (2.56)$$

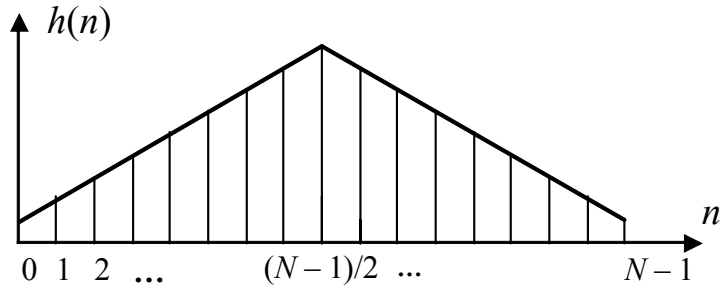


Рис. 2.25. Пример симметричной импульсной характеристики НРЦФ

При четном  $N$  слагаемое  $h((N - 1) / 2)$  в обоих выражениях отсутствует, а верхний предел суммирования заменяется на  $(N / 2) - 1$ .

Из выражения для ЧХ следует, что ФЧХ такого фильтра  $\varphi(\omega) = -\omega \cdot T_d \cdot (N - 1) / 2$  строго линейна, а время запаздывания  $t_3 = -[(N - 1) / 2] \cdot T_d$  не зависит от частоты.

Передаточной функции (2.55) можно поставить в соответствие структуру НРЦФ, требующую вдвое меньшего количества операций умножения (рис. 2.26).

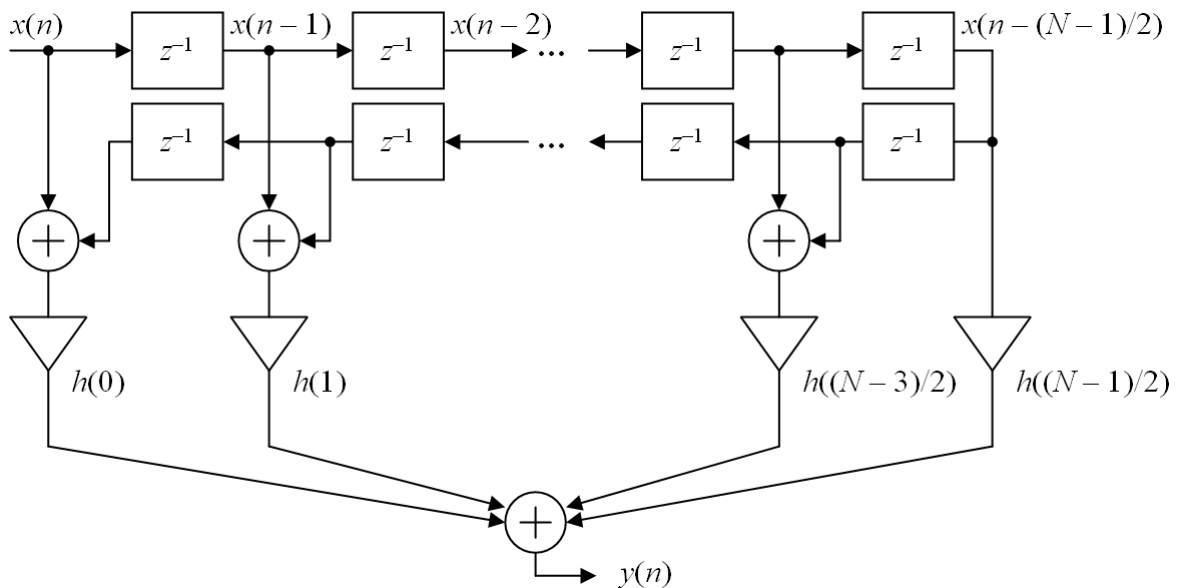


Рис. 2.26. Структурная схема НРЦФ с симметричной импульсной характеристикой

Такая структура реализует алгоритм

$$y(n) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) \cdot x\left(n - \frac{N-1}{2}\right) + \sum_{m=0}^{\frac{N-3}{2}} h(m) \cdot [x(n-m) + x(n-(N-1)-m)].$$

Аналогичную структуру и алгоритм можно составить и для четного  $N$ . Следует отметить, что при четном  $N$   $|H(j\omega_d / 2)| = 0$ , и  $\varphi(\omega_d / 2) = 0$ .

Для НРЦФ, как и РЦФ, также существуют дуальная, или обращенная (рис. 2.27), и решетчатая структуры.

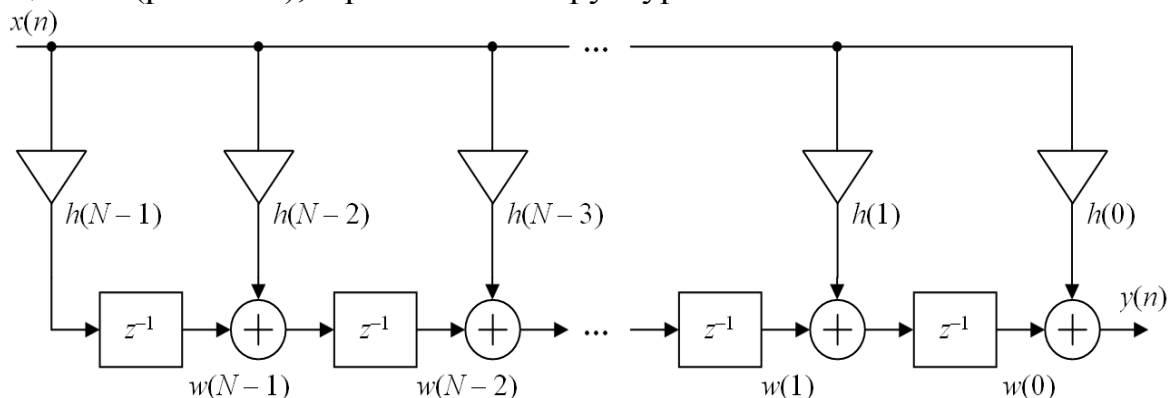


Рис. 2.27. Дуальная структура НРЦФ на основе ДВС

Обработка в обращенной структуре осуществляется в соответствии с базовой операцией:

$$Y = H(0) \cdot X + W(0); W(k) = H(k) \cdot X + W(k + 1), k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Переменные  $W(k), k = 0, 1, \dots, N$  должны быть обнулены при их описании.

## 2.15. Примеры решения задач по теории цифровых сигналов

### Задача 1

Алгоритм работы цифровой системы  $y(n) = x(n) + b_1 \cdot x(n-1), b_1 = 2$ .

Определить реакцию системы на прямоугольный сигнал вида

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1; \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

### Решение

При нулевых начальных условиях  $x(-1) = 0$  выполняем непосредственную подстановку в алгоритм работы.

$$y(0) = x(0) + b_1 \cdot x(-1) = 1 + 2 \cdot 0 = 1, y(1) = x(1) + b_1 \cdot x(0) = 1 + 2 \cdot 1 = 3;$$

$$y(2) = x(2) + b_1 \cdot x(1) = 0 + 2 \cdot 1 = 2, y(3) = x(3) + b_1 \cdot x(2) = 0 + 2 \cdot 0 = 0.$$

Видно, что все выходные отсчеты  $y(n) = 0$  при  $n \geq 3$  равны нулю.

### Задача 2

Алгоритм работы цифровой системы  $y(n) = x(n-2)$ .

Определить реакцию системы на сигнал вида  $x(n) = a^n, |a| < 1$ . Определить Z-преобразования входного и выходного сигналов.

## Решение

1. При нулевых начальных условиях  $x(-1) = 0$ ,  $x(-2) = 0$  выполняем непосредственную подстановку.

Тогда выходной сигнал будет равен  $y(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, 1; \\ a^{n-2}, & n > 1. \end{cases}$

2.  $Z$ -преобразование входного сигнала равно сумме членов бесконечной геометрической прогрессии (убывающей при  $|a| < 1$ ).

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a \cdot z^{-1})^{-k} = \frac{1}{1 - (a \cdot z^{-1})}.$$

3.  $Z$ -преобразование выходного сигнала определяем, используя свойство задержки  $Z\{x(n-m)\} = z^{-m} \cdot Z\{x(n)\}$ :

$$Y(z) = z^{-2} \cdot X(z) = z^{-2} \cdot \frac{1}{1 - (a \cdot z^{-1})}.$$

## Задача 3

Цифровой сигнал имеет  $Z$ -преобразование  $X(z) = \frac{1}{1 - 5 \cdot z^{-1} + 6 \cdot z^{-2}}$ .

Определить сигнал в виде последовательности  $x(n)$ .

## Решение

1. Обратное  $Z$ -преобразование может быть вычислено по вычетам функции  $X(z) \cdot z^{n-1}$ :

$$x(n) = \sum \text{Res} [X(z) \cdot z^{n-1}] = \sum \lim_{z \rightarrow z_k} [(z - z_k) \cdot X(z) \cdot z^{n-1}],$$

где  $z_k$  – полюса функции  $X(z)$ .

Для функции вида  $X(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}}$  вычет определяется в полюсе  $z = a$ .

$$x(n) = \lim_{z \rightarrow a} [(z - a) \cdot \frac{z}{z - a} \cdot z^{n-1}] = \lim_{z \rightarrow a} [z^n] = a^n.$$

Учитывая свойство линейности  $Z$ -преобразования, получаем обратное  $Z$ -преобразование вида

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k \cdot z^{-1}}, \Rightarrow x(n) = \sum_{k=1}^N \beta_k \cdot (\alpha_k)^n.$$

2. Применим последнее свойство для функции  $X(z) = \frac{1}{1 - 5 \cdot z^{-1} + 6 \cdot z^{-2}}$ , предварительно разложив ее по полюсам ( $z_{p1} = 2$ ,  $z_{p2} = 3$ ) на слагаемые.

$$X(z) = \frac{1}{1 - 5 \cdot z^{-1} + 6 \cdot z^{-2}} = \frac{-2}{1 - 2 \cdot z^{-1}} + \frac{3}{1 - 3 \cdot z^{-1}}, \Rightarrow x(n) = (-2) \cdot (2)^n + (3) \cdot (3)^n.$$



#### Задача 4

Известны входной и выходной сигнал цифровой системы:

$$x(n) = \{1, 0, 1, 2\}, \quad y(n) = \{0, 1, 2, 1\}.$$

Определить Z-преобразования входного и выходного сигналов, а также передаточную функцию системы.

#### Решение

1. Z-преобразование определяется выражением  $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k}$ .

Однако в приведенном примере известны только первые 4 отсчета последовательностей (остальные равны нулю). Следовательно,

$$X(z) = 1 \cdot z^{-0} + 0 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 2 \cdot z^{-3}, \quad Y(z) = 1 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3}.$$

2. Передаточная функция системы определяется отношением

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3}}{1 + 1 \cdot z^{-2} + 2 \cdot z^{-3}} = z^{-1} \cdot \frac{1 + 2 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2}}{1 + 1 \cdot z^{-2} + 2 \cdot z^{-3}}.$$

#### Задача 5

Алгоритм работы цифровой системы  $y(n) = a \cdot y(n-1) + x(n)$ .

Определить передаточную функцию системы.

#### Решение

Выполняем формальную подстановку  $y(n) \rightarrow Y(z)$ ,  $x(n) \rightarrow X(z)$ , учитывая **свойство задержки**  $y(n-1) \rightarrow z^{-1} \cdot Y(z)$ .

$$Y(z) = a \cdot z^{-1} \cdot Y(z) + X(z).$$

Приводим подобные слагаемые:

$$Y(z) \cdot [1 - a \cdot z^{-1}] = X(z).$$

Передаточная функция системы определяется отношением

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}}.$$

#### Задача 6

Алгоритм работы цифровой системы  $y(n) = a \cdot y(n-1) + b \cdot x(n)$ .

Определить импульсную характеристику системы.

#### Решение

Импульсная характеристика системы представляет реакцию системы на единичный импульс  $u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n > 0. \end{cases}$

При нулевых начальных условиях  $y(-1) = 0$  выполняем непосредственную подстановку в алгоритм работы.

$$h(0) = y(0) = a \cdot y(-1) + b \cdot x(0) = a \cdot 0 + b \cdot 1 = b;$$

$$h(1) = y(1) = a \cdot y(0) + b \cdot x(1) = a \cdot b + b \cdot 0 = a \cdot b;$$

$$h(2) = y(2) = a \cdot y(1) + b \cdot x(2) = a \cdot a \cdot b + b \cdot 0 = a^2 \cdot b;$$

.....

$$h(n) = a^n \cdot b.$$

### Задача 7

Передаточная функция цифровой системы

$$H(z) = b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + b_3 \cdot z^{-3}.$$

Определить импульсную характеристику системы, а также тип импульсной характеристики (КИХ или БИХ).

### Решение

Импульсная характеристика системы представляет реакцию системы на единичный импульс:  $x(n) = u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n > 0. \end{cases}$

Выполняем непосредственную подстановку в алгоритм работы, который в данном случае равен

$$y(n) = b_0 \cdot x(n) + b_1 \cdot x(n-1) + b_2 \cdot x(n-2) + b_3 \cdot x(n-3);$$

$$h(0) = y(0) = b_0 \cdot x(0) = b_0;$$

$$h(1) = y(1) = b_0 \cdot x(1) + b_1 \cdot x(0) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 = b_1;$$

$$h(2) = y(2) = b_0 \cdot x(2) + b_1 \cdot x(1) + b_2 \cdot x(0) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 1 = b_2;$$

$$h(3) = y(3) = b_0 \cdot x(3) + b_1 \cdot x(2) + b_2 \cdot x(1) + b_3 \cdot x(0) = b_3;$$

$$h(4) = y(4) = 0.$$

Видно, что при  $n > 3$  отсчеты импульсной характеристики равны нулю, следовательно, фильтр КИХ-типа. Из приведенного примера ясно также, что отсчеты импульсной характеристики нерекурсивного фильтра равны его коэффициентам.

### Задача 8

Передаточная функция цифровой системы  $H(z) = \frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}}$ .

Определить тип импульсной характеристики системы (КИХ или БИХ).

### Решение

Используем разложение передаточной функции на слагаемые:

$$H(z) = \frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-5}}{1-z^{-1}}.$$

Обратное Z-преобразование функции  $\frac{1}{1-z^{-1}}$  соответствует единичному ступенчатому сигналу  $u_1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0; \\ 0, n < 0. \end{cases}$

Импульсная характеристика представляет обратное Z-преобразование передаточной функции системы. С учетом свойства задержки получаем  $h(n) = u_1(n) - u_1(n-5)$ .

Далее выполняем непосредственную подстановку в алгоритм работы:

$$h(0) = u_1(0) - u_1(-5) = 1; \quad h(1) = u_1(1) - u_1(-4) = 1;$$

$$h(2) = u_1(2) - u_1(-3) = 1; \quad h(3) = u_1(3) - u_1(-2) = 1;$$

$$h(4) = u_1(4) - u_1(-1) = 1; \quad h(5) = u_1(5) - u_1(0) = 1 - 1 = 0.$$

Все отсчеты импульсной характеристики при  $n > 4$  равны нулю, следовательно, фильтр КИХ-типа.

### Задача 9

Передаточная функция цифровой системы  $H(z) = \frac{1}{1-a \cdot z^{-1}}$ .

Определить тип импульсной характеристики системы (КИХ или БИХ).

### Решение

Импульсная характеристика представляет обратное Z-преобразование передаточной функции системы. В данном случае импульсная характеристика равна  $h(n) = a^n$ . Поскольку показательная функция стремится к нулю только при  $n \rightarrow \infty$  ( $|a| < 1$ ), то фильтр БИХ-типа.

### Задача 10

Задана передаточная функция цифровой системы.

$$1. H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-0,2 \cdot z^{-1}}; \quad 2. H(z) = \frac{1-z^{-3}}{1-0,6 \cdot z^{-1} + 0,25 \cdot z^{-2}}; \quad 3. H(z) = \frac{1}{1+1,2 \cdot z^{-1}}.$$

Определить устойчивость системы.

### Решение

Для цифровых систем может быть использован следующий **критерий устойчивости**: полюса передаточной функции должны находиться на комплексной Z-плоскости внутри круга единичного радиуса  $|z_p| < 1$ . Нерекурсивные фильтры всегда устойчивы, поскольку их полюса находятся в бесконечно удаленной точке  $|z_p| = \infty$ .

1. Функция имеет один полюс  $z_p = 0,2$ . Поскольку  $|z_p| = 0,2 < 1$ , система устойчива.

2. Функция имеет два полюса  $z_{p1,2} = 0,3 \pm j \cdot 0,4$ . Поскольку  $|z_{p1,2}| = 0,5 < 1$ , система устойчива.

3. Функция имеет один полюс  $z_p = -1,2$ . Поскольку  $|z_p| = 1,2 > 1$ , система неустойчива.

## 2.16. Контрольные вопросы

1. Математическое описание цифровых последовательностей, импульсная характеристика системы, условие устойчивости.

2. Разностные уравнения систем, реализация цифрового фильтра на основе простейших элементов.

3. Связь между спектром непрерывного и дискретизированного сигнала, явление наложения спектров.

4.  $Z$ -преобразование для цифровых систем. Одностороннее  $Z$ -преобразование. Обратное  $Z$ -преобразование.

5. Применение  $Z$ -преобразования при описании цифровых систем. Структурные схемы цифровых фильтров.

6. Возможна ли практическая реализация рекурсивных фильтров на основе дискретной временной свертки?

7. Как определяется импульсная характеристика цифрового фильтра, какие цифровые фильтры называют фильтрами БИХ и КИХ?

8. В соответствии с каким алгоритмом осуществляется обработка сигнала рекурсивным цифровым фильтром?

9. Какой смысл имеют коэффициенты нерекурсивных цифровых фильтров?

10. Как определяется  $Z$ -преобразование дискретных последовательностей, каковы его основные свойства и какую роль оно играет в теории цифровых фильтров?

11. Как определяется передаточная функция рекурсивного фильтра по его разностному уравнению?

12. Какой вид имеет нуль-полюсная форма передаточной функции рекурсивного фильтра и каково ее практическое значение?

13. Как отображаются нули и полюса цифрового фильтра на комплексной  $Z$ -плоскости и какую информацию о фильтре можно получить по картине его нулей и полюсов?

14. Какова структура и математическое описание прямой и канонической форм реализации рекурсивных звеньев второго порядка?

15. Какова структура и математическое описание нерекурсивного фильтра на основе ДВС?

16. Какой объем вычислительных операций выполняется в рекурсивном и нерекурсивном фильтрах при обработке одного отсчета сигнала?

### 3. ПОГРЕШНОСТИ КВАНТОВАНИЯ СИГНАЛОВ

При подготовке раздела использованы следующие источники: [1].

#### 3.1. Статистические характеристики погрешности квантования

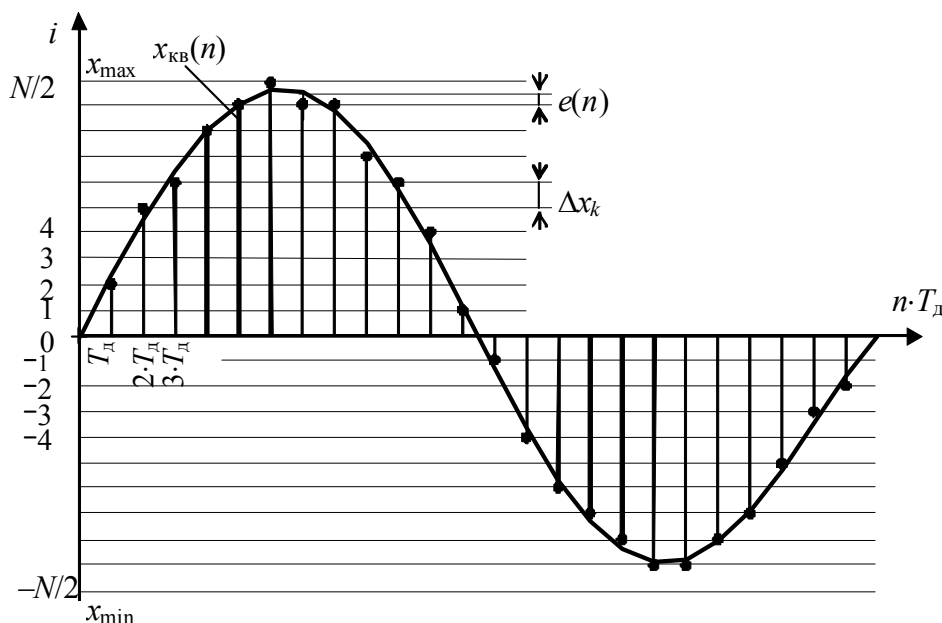


Рис. 3.1. Квантование сигналов по уровню и дискретизация по времени

При квантовании сигнала возникает погрешность метода измерения, которая называется погрешностью от квантования. Математическое ожидание и дисперсия этой погрешности будут зависеть от закона распределения сигнала, числа уровней квантования  $N$ , размера ступени квантования  $\Delta x_k$ .

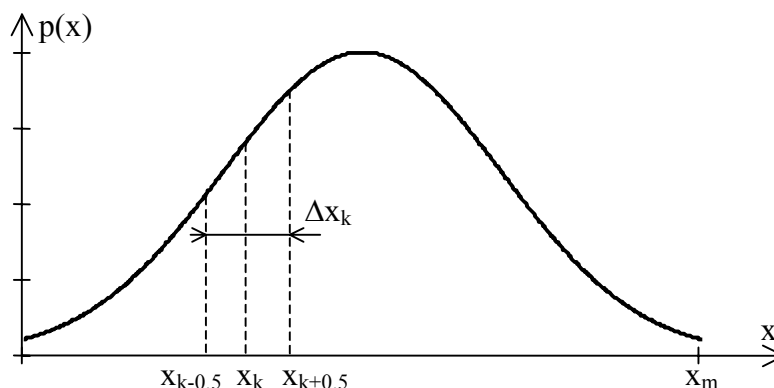


Рис. 3.2. К определению статистических характеристик погрешности от квантования случайного сигнала с законом распределения  $p(x)$

Рассмотрим статистические характеристики погрешности от квантования случайного сигнала с законом распределения  $p(x)$  (рис. 3.2) при ступени квантования  $\Delta x_k$ , если значение  $x$ , соответствующее середине данной ступени квантования, равно  $x_k$ .

Математическое ожидание погрешности от квантования при отсутствии корреляции между измеряемой величиной и процессом квантования

$$M(\Delta x_k) = \int_{x_{k-0,5}}^{x_{k+0,5}} (x - x_k) \cdot p(x) dx. \quad (3.1)$$

Дисперсия

$$D(\Delta x_k) = \int_{x_{k-0,5}}^{x_{k+0,5}} (x - x_k)^2 \cdot p(x) dx. \quad (3.2)$$

При большом числе ступеней квантования можно предположить, что значение плотности вероятности случайного сигнала внутри данной ступени квантования постоянно и равно  $p(x_k)$  – своему значению при  $x = x_k$ . Тогда

$$M(\Delta x_k) = p(x_k) \int_{x_{k-0,5}}^{x_{k+0,5}} (x - x_k) dx = \frac{1}{2} p(x_k) [(x_{k+0,5} - x_k)^2 - (x_{k-0,5} - x_k)^2].$$

Если  $x_k$  соответствует середине интервала, то  $M(\Delta x_k) = 0$ .

Дисперсия погрешности

$$D(\Delta x_k) = p(x_k) \int_{x_{k-0,5}}^{x_{k+0,5}} (x - x_k)^2 dx = \frac{1}{3} p(x_k) [(x_{k+0,5} - x_k)^3 - (x_{k-0,5} - x_k)^3].$$

При условии, что  $x_k$  соответствует середине интервала,

$$D(\Delta x_k) = \frac{1}{12} \cdot p(x_k) \cdot \Delta x_k^3.$$

Если принять во внимание, что произведение  $p(x_k) \cdot \Delta x_k$  равно вероятности нахождения случайного сигнала внутри данного интервала  $\Delta x_k$ , то

$$D(\Delta x_k) = \frac{1}{12} \cdot [p(x_k) \cdot \Delta x_k] \cdot \Delta x_k^2.$$

Дисперсия погрешности от квантования с учетом изменения случайного сигнала во всем диапазоне значений от 0 до  $x_m$ :

$$D(\Delta x_k) = \frac{1}{12} \cdot \sum_{k=1}^N p(x_k) \cdot \Delta x_k^3.$$

При равномерном квантовании  $\Delta x_k = \Delta x_i = \text{const}$  ( $i \neq k$ ), и

$$D(\Delta x_k) = \frac{\Delta x_k^2}{12} \cdot \sum_{k=1}^N p(x_k) \cdot \Delta x_k.$$

Поскольку  $\sum_{k=1}^N p(x_k) \cdot \Delta x_k = 1$ , то  $D(\Delta x_k) = \frac{\Delta x_k^2}{12}$ .

Таким образом, получено выражение для дисперсии погрешности при равномерном квантовании в случае достаточно большого числа ступеней квантования для любого закона  $p(x)$ .

Среднеквадратическое отклонение погрешности при равномерном квантовании

$$\sigma(\Delta x_k) = \sqrt{D(\Delta x_k)} = \frac{\Delta x_k}{\sqrt{12}} = \frac{x_m}{N \cdot \sqrt{12}}.$$

Если среднеквадратическое отклонение погрешности задано, то можно определить необходимое при равномерном квантовании номинальное число ступеней квантования:

$$N = \frac{x_m}{\Delta x_k} = \frac{x_m}{\sigma(\Delta x_k) \cdot \sqrt{12}}.$$

Следовательно, необходимое уменьшение погрешности от квантования при равномерном квантовании достигается обычно соответствующим увеличением номинального числа ступеней квантования.

### **3.2. Погрешность равномерного квантования при различных законах ее распределения**

Измеряемая непрерывная величина, которая может иметь бесконечное множество значений после измерения, представляется ограниченным количеством показаний, отсчитываемых оператором со шкалы или индицируемых автоматически на цифровом отсчетном устройстве. При этом данное значение  $x$  представляется одним из ближайших квантованных значений  $n_x \cdot \Delta x_k$  или  $(n_x \pm 1) \cdot \Delta x_k$ . В результате из-за конечности ступени квантования в показаниях измерительного прибора возникает аддитивная погрешность от квантования.

Определим значения погрешности от квантования для четырех законов распределения погрешности  $p(\Delta x)$ :

- равномерного симметричного в пределах  $\pm \Delta x_k$ ;
- равномерного несимметричного;
- равномерного симметричного в пределах  $\pm 0,5 \cdot \Delta x_k$ ;
- треугольного симметричного закона Симпсона.

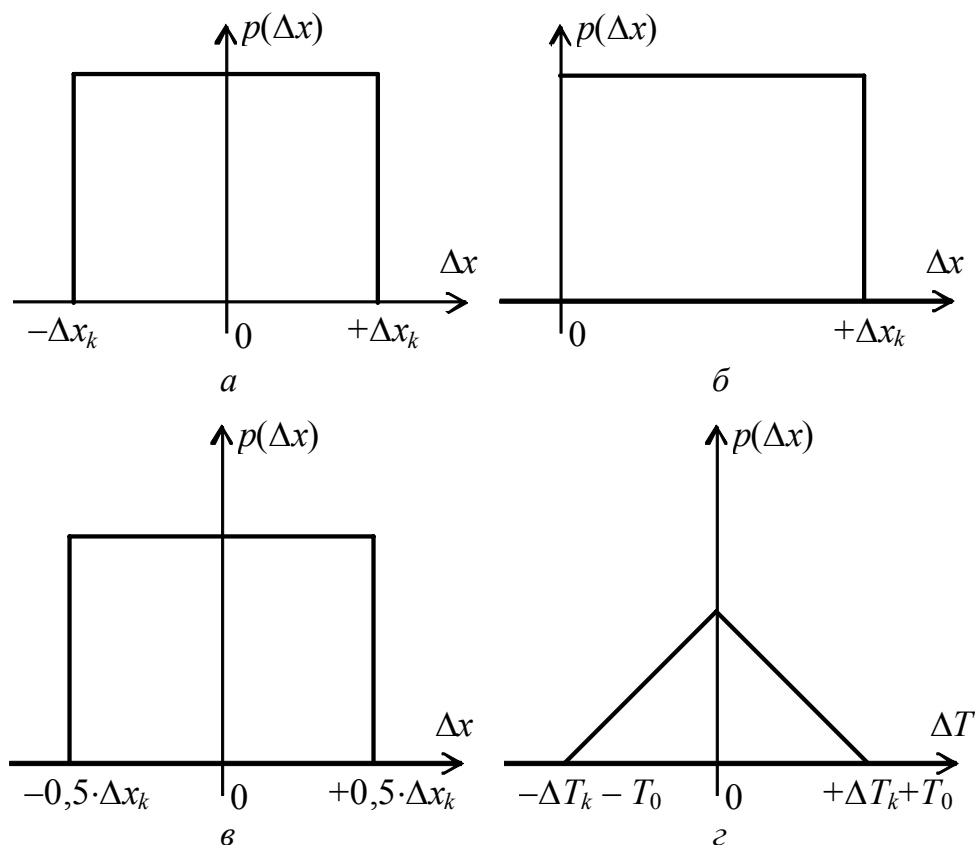


Рис. 3.3. К определению погрешности от квантования для четырех законов распределения погрешности  $p(\Delta x)$

**Равномерный симметричный закон** распределения в пределах  $\pm\Delta x_k$  (рис. 3.3, а) имеет место в некоторых цифровых измерительных приборах при **реверсивном подходе** к точке равновесия.

Максимальное значение погрешности от квантования

$$|\Delta x|_{\max} = \pm\Delta x_k.$$

Приведенная погрешность

$$\gamma_k = \pm \frac{\Delta x_k}{x_m}.$$

Среднее значение погрешности

$$M(\Delta x) = 0.$$

Среднеквадратическое отклонение погрешности по отношению к результату измерения  $n_x \cdot \Delta x_k$ , т. е. по отношению к точке начала координат (рис. 3.3, а),

$$\sigma(\Delta x) = \sqrt{2 \cdot \int_0^{\Delta x_k} p(\Delta x) \cdot \Delta x^2 d\Delta x} = \frac{\Delta x_k}{\sqrt{3}}.$$



**Равномерный несимметричный закон** распределения (рис. 3.3, б) имеет место в цифровых измерительных приборах **развертывающего уравнивания**, в которых подход к точке равновесия осуществляется с одной стороны; вся совокупность равновероятных значений в диапазоне от  $n_x \cdot \Delta x_k$  до  $(n_x + 1) \cdot \Delta x_k$  представляется результатом измерения  $n_x \cdot \Delta x_k$ .

В этом случае максимальная погрешность

$$|\Delta x|_{\max} = \pm \Delta x_k.$$

Приведенная погрешность

$$\gamma_k = \pm \frac{\Delta x_k}{x_m}.$$

Среднее значение погрешности

$$M(\Delta x) = \frac{\Delta x_k}{2}.$$

Среднеквадратическое отклонение погрешности по отношению к результату измерения  $n_x \cdot \Delta x_k$ , т. е. по отношению к точке начала координат (рис. 3.3, б),

$$\sigma(\Delta x) = \sqrt{\int_0^{\Delta x_k} p(\Delta x) \cdot \Delta x^2 d\Delta x} = \frac{\Delta x_k}{\sqrt{3}}.$$

**Равномерный симметричный закон** распределения  $p(\Delta x)$  в пределах  $\pm 0,5 \cdot \Delta x_k$  (рис. 3.3, в) имеет место в цифровых приборах **развертывающего уравнивания** с односторонним подходом к точке равновесия **при введении в компенсирующую величину постоянной поправки**, равной  $0,5 \cdot \Delta x_k$ . Вся совокупность равновероятных значений  $x$  в узком диапазоне от  $(n_x - 0,5) \cdot \Delta x_k$  до  $(n_x + 0,5) \cdot \Delta x_k$  представляется результатом измерения  $n_x \cdot \Delta x_k$ . Этот же закон распределения имеет место **при округлении результата** измерения. В этом случае максимальная суммарная погрешность

$$|\Delta x|_{\max} = \pm \frac{\Delta x_k}{2}.$$

Приведенная погрешность

$$\gamma_k = \pm \frac{\Delta x_k}{2 \cdot x_m}.$$

Среднее значение погрешности

$$M(\Delta x) = 0.$$

Среднеквадратическое отклонение погрешности по отношению к результату измерения  $n_x \cdot \Delta x_k$ , т. е. по отношению к точке начала координат (рис. 3.2, в),

$$\sigma(\Delta x) = \sqrt{2 \cdot \int_0^{0,5 \cdot \Delta x_k} p(\Delta x) \cdot \Delta x^2 d\Delta x} = \frac{\Delta x_k}{\sqrt{12}}.$$

**Треугольный симметричный закон** распределения (рис. 3.2, г) имеет место **при квантовании интервала времени квантующими импульсами с периодом повторения  $T_0$** . Треугольный закон в данном случае возникает как свертка двух равномерных несимметричных законов с пределами от  $-T_0$  до  $0$  и от  $0$  до  $+T_0$ . В этом случае максимальная погрешность

$$|\Delta T|_{\max} = \pm T_0.$$

Приведенная погрешность

$$\gamma_k = \pm \frac{T_0}{T_m}.$$

Среднее значение погрешности

$$M(\Delta T) = 0.$$

Среднеквадратическое отклонение погрешности по отношению к результату измерения  $n_x \cdot T_0$ , т. е. по отношению к точке начала координат (рис. 3.3, г),

$$\sigma(\Delta T) = \sqrt{2 \cdot \int_0^{T_0} p(\Delta T) \cdot \Delta T^2 d\Delta T} = \sqrt{2 \cdot \int_0^{T_0} \frac{1}{T_0} \cdot \left(1 - \frac{\Delta T}{T_0}\right) \cdot \Delta T^2 d\Delta T} = \frac{T_0}{\sqrt{6}}.$$

### 3.3. Погрешность от квантования при измерении среднеквадратичного и среднего значений величины

В ряде случаев при измерении исследователя интересуют не мгновенные значения измеряемой величины, а ее средние или среднеквадратичные значения за определенный промежуток времени. Это бывает тогда, когда на ход процесса влияют не мгновенные значения величины, а средние или среднеквадратичные за заданный промежуток времени. Например, нагрев шихты электропечи определяется не мгновенными значениями отдельных кратковременных пиков тока, а его среднеквадратичным значением за определенный промежуток времени. В этом случае число ступеней квантования по заданной погрешности при измерении мгновенных значений определять нецелесообразно.

Задача определения числа ступеней квантования по значению при измерении среднеквадратичного значения величины возникает также и при определении числа ступеней квантования у цифровых приборов,

измеряющих, например, действующие значения периодических величин, изменяющихся с инфранизкой частотой. В таких приборах производится математическая обработка результатов измерения мгновенных значений. Определение действующего и среднего значений измеряемых величин при инфранизких частотах удобнее производить с помощью цифровых приборов.

Определим число ступеней квантования по заданной погрешности при измерении среднеквадратичного и среднего значений путем обработки результатов измерения мгновенных значений. Считаем, что цифровой прибор выдает новые значения величины **точно в моменты достижения ею данного дискретного значения**. Предполагаем **ступенчатую аппроксимацию** горизонтальными прямыми.

Для вычисления погрешности от квантования при определении среднеквадратичного значения найдем среднеквадратичные значения  $x(t)$  на протяжении времени  $T_d = t_{i+1} - t_i$  (между моментами выдачи соседних дискретных значений) **после и до квантования**  $x_{ск}$  и  $x'_{ск}$ . Время  $T_d$  – длительность участка квантования – зависит от крутизны  $x(t)$  на данном участке.

Среднеквадратичное значение величины  $x(t)$  на данном участке **после квантования** определяем путем обработки результатов измерения мгновенных значений:

$$x_{ск} = \sqrt{\frac{1}{T_d} \cdot \int_{-T_d/2}^{T_d/2} [N \cdot \Delta x_k]^2 dt} = N \cdot \Delta x_k,$$

где  $N$  – отсчет цифрового прибора в течение времени  $T_d$ .

Среднеквадратичное значение  $x(t)$  **до квантования** на данном участке:

$$x'_{ск} = \sqrt{\frac{1}{T_d} \cdot \int_{-T_d/2}^{T_d/2} \left[ N \cdot \Delta x_k + t \cdot \frac{\Delta x_k}{T_d} \right]^2 dt} = \sqrt{[N \cdot \Delta x_k]^2 + \frac{\Delta x_k^2}{12}}.$$

Погрешность от квантования при определении среднеквадратичного значения на данном участке в течение времени  $T_d$ :

$$\gamma_{скз} = \frac{x_{ск} - x'_{ск}}{x'_{ск}} = \frac{N \cdot \Delta x_k - \sqrt{[N \cdot \Delta x_k]^2 + \frac{\Delta x_k^2}{12}}}{N \cdot \Delta x_k} \approx \frac{1}{24 \cdot N^2}.$$

Число шагов квантования  $N$  при измерении среднеквадратичных значений в случае, **если величина  $x(t)$  имеет ограниченное число максимумов и изменяется плавно** в небольших пределах вблизи  $x_n$ ,

$$N \approx \sqrt{\frac{1}{24 \cdot \gamma_{скз}}}.$$

Если задано  $\gamma_{\text{скз}} = 0,001$  (0,1 %), то  $N = 7$ .

Найдем необходимое число шагов квантования в случае, если  $x(t)$  изменяется в широком диапазоне от 0 до  $x_n$  по закону треугольника. Тогда среднеквадратичное значение  $x'_{\text{ск}}$  до квантования

$$x'_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{1}{T_{\text{пр}}} \cdot \int_0^{T_{\text{пр}}} \left[ N \cdot \frac{\Delta x_k}{T_{\text{пр}}} \right]^2 dt} = \frac{N \cdot \Delta x_k}{\sqrt{3}},$$

где  $T_{\text{пр}}$  – длительность процесса.

Среднеквадратичное значение  $x_{\text{ск}}$  после квантования:

$$x_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{1}{T_{\text{пр}}} \sum_{k=1}^N \int_{(k-1) \frac{T_{\text{пр}}}{N}}^{(k) \frac{T_{\text{пр}}}{N}} \left[ \frac{(k-1) \frac{T_{\text{пр}}}{N} + (k) \frac{T_{\text{пр}}}{N}}{2} \right]^2 \left[ \frac{N \cdot \Delta x_k}{T_{\text{пр}}} \right]^2 dt} = \frac{N \cdot \Delta x_k}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{8 \cdot N^2} \right).$$

Тогда погрешность от квантования при определении среднеквадратичного значения  $x(t)$  при принятых условиях равна

$$\gamma_{\text{скз}} = \frac{x_{\text{ск}} - x'_{\text{ск}}}{x'_{\text{ск}}} = \frac{\frac{N \cdot \Delta x_k}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{8 \cdot N^2} \right) - \frac{N \cdot \Delta x_k}{\sqrt{3}}}{\frac{N \cdot \Delta x_k}{\sqrt{3}}} = -\frac{1}{8 \cdot N^2}.$$

Число шагов квантования  $N$  при измерении среднеквадратичных значений в случае, если величина  $x(t)$  линейно изменяется в диапазоне от 0 до  $x_n$ ,

$$N = \sqrt{\frac{1}{8 \cdot \gamma_{\text{скз}}}}.$$

Если задано  $\gamma_{\text{скз}} = 0,001$  (0,1 %), то  $N = 12$ .

Если  $x(t)$  изменяется по закону синусоиды, то погрешность от квантования при измерении среднеквадратичных значений

$$\gamma_{\text{скз}} = \frac{x_{\text{ск}} - x'_{\text{ск}}}{x'_{\text{ск}}} = \frac{0,4}{\sqrt{N^3}}.$$

При  $\gamma_{\text{скз}} = 0,01$  (1 %) необходимо, чтобы  $N = 10$ , а при  $\gamma_{\text{скз}} = 0,001$  (0,1 %) необходимо, чтобы  $N = 50$ .

Следовательно, при малых  $\gamma_{\text{скз}}$  число ступеней квантования при измерении среднеквадратичных значений величины для указанных законов изменения  $x(t)$  невелико.

Однако при создании прибора со значительным диапазоном изменения  $x$  необходимо учесть, что погрешность  $\gamma_{\text{скз}}$  при уменьшении  $x$  растет очень быстро. Поэтому необходимо увеличивать число ступеней квантования для обеспечения заданного значения погрешности на ниж-

нем значении предела измерения  $x$  или автоматически адаптировать число ступеней квантования с изменением  $x$ .

Аналогично можно показать, что погрешность от квантования при измерении **среднего значения величины** при изменении  $x(t)$  по закону треугольника:

$$\gamma_{cp} = \frac{x_{cp} - x'_{cp}}{x'_{cp}} = \frac{0,01}{N^2},$$

а при изменении  $x(t)$  по синусоидальному закону –

$$\gamma_{cp} = \frac{0,084}{N^{1,43}}.$$

При  $\gamma_{скз} = 0,001$  (0,1 %) необходимо, чтобы  $N = 5$ , а при  $\gamma_{скз} = 0,001$  (0,1 %) необходимо, чтобы  $N = 23$ .

### 3.4. Определение погрешности от квантования с учетом суммирования с аддитивной погрешностью преобразования

Квантование величины обычно реализуется после измерительных преобразований, при которых возникают погрешности. Часто в аналоговых звеньях возникает аддитивная погрешность  $\Delta X_{адд}$ , распределенная по симметричному и равномерному законам. При определении в этих условиях суммарной погрешности возможны два подхода.

**При первом подходе** считают, что число ступеней квантования велико и  $\Delta x_k < \Delta X_{адд}$ . Тогда если измеряемая величина  $x$  распределена по равномерному закону,  $x$  и  $\Delta X_{адд}$  не коррелированы между собой, то среднеквадратическое отклонение (СКО) суммарной погрешности

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\frac{\Delta X_{адд}^2 + \Delta x_k^2}{12}}.$$

В предельном случае при  $\Delta X_{адд} = 0$   $\sigma_{\Sigma} = \frac{\Delta x_k}{\sqrt{12}}$ , что совпадает с формулой для погрешности квантования при общем статистическом подходе к определению погрешности от квантования. Однако должно выполняться условие  $\Delta x_k < \Delta X_{адд} = 0$ , следовательно,  $\sigma_{\Sigma} = 0$ .

**При втором подходе** предполагают, что при принятых выше законах распределения  $x$  и  $\Delta X_{адд}$  погрешность возникает только в том случае, если сумма  $x + \Delta X_{адд}$  переходит за пределы данной ступени квантования  $\Delta x_k$ .

Тогда, при  $\Delta x_k < \Delta X_{адд} < 2 \cdot \Delta x_k$ , СКО погрешности равно

$$\sigma_{\Sigma} = \frac{\sqrt{\Delta X_{адд} \cdot \Delta x_k}}{2}.$$

При  $\Delta x_k \cdot 2 < \Delta X_{\text{адд}}$  СКО погрешности равно  $\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\frac{\Delta X_{\text{адд}}^2 + 2 \cdot \Delta x_k^2}{12}}$ .

**В предельном случае** при  $\Delta x_k = 0$ , т. е. при  $N \rightarrow \infty$ , выражения для СКО суммарной погрешности при первом и втором подходах совпадают, и  $\sigma_{\Sigma} = \frac{\Delta X_{\text{адд}}}{\sqrt{12}}$ .

**Во втором предельном случае** при  $\Delta X_{\text{адд}} = 0$  при первом подходе  $\sigma_{\Sigma} = 0$ , при втором подходе  $\sigma_{\Sigma} = 0$ , так как по условию второго подхода при  $\Delta X_{\text{адд}} = 0$  переход в соседний квант, а значит, и погрешность возникнуть не могут.

### 3.5. Контрольные вопросы

1. Определение квантования, шага квантования и разрядности данных, виды квантования.
2. Погрешность равномерного квантования при различных законах распределения погрешности.
3. Погрешность квантования при измерении среднего значения синусоидального сигнала.
4. Погрешность квантования при измерении действующего значения синусоидального сигнала.
5. Погрешность квантования при наличии аддитивной помехи.

## 4. ПОГРЕШНОСТИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СИГНАЛОВ

При подготовке раздела использованы следующие источники: [1, 9, 10, 11, 12].

### 4.1. Аналитическое представление дискретизированного сигнала, равномерная и неравномерная дискретизация сигнала

Дискретизация непрерывного во времени сигнала  $x(t)$  является линейной операцией умножения функции  $x(t)$  на функцию дискретизации во времени  $\Delta^*(t)$ :  $x_{\text{дискр}}(t) = x(t) \cdot \Delta^*(t)$ .

Функция  $\Delta^*(t)$  является последовательностью единичных импульсов с периодом повторения  $T_d$ , длительностью, равной 0, и площадью, равной единице, т. е. является функцией Дирака:

$$\Delta^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot T_d).$$

Дискретизированный сигнал  $x_{\text{дискр}}(t_k)$  является последовательностью импульсов, площадь которых соответственно равна  $x(k \cdot T_d)$  ординатам сигнала  $x(t)$  в моменты  $k \cdot T_d$ , и может быть аналитически представлена в виде

$$x_{\text{дискр}}(k \cdot T_d) = \sum_{k=0}^N x(t_k) \cdot \delta(t - k \cdot T_d). \quad (4.1)$$

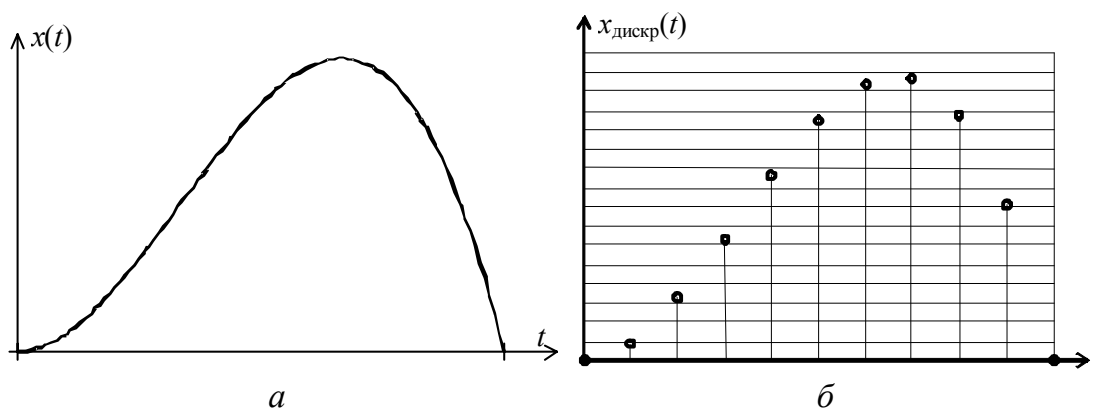


Рис. 4.1. Дискретизация сигнала по времени: а) непрерывный сигнал; б) дискретизированный сигнал

Дискретизация может производиться **равномерно**, т. е. с постоянным шагом  $T_d = \text{const}$ , и **неравномерно**, т. е. с переменным шагом. Сигналы бывают естественно-дискретизированными и искусственно-дискретизированными.

**Естественно-дискретизированным сигналом**, например, являются последовательности импульсов напряжения от чувствительного элемента – детектора радиоактивного излучения, в котором пространственная совокупность частиц преобразуется в последовательность импульсов. Удобство измерения частотно-временных параметров естественно-дискретизированной зависимости привело к все более широкому использованию различных процессов микромира, в которых имеет место функциональная зависимость между измеряемой величиной, интересующей исследователя, и частотой временной последовательности импульсов. Например, с этой целью используется явление Баркгаузена, в котором частота импульсов Баркгаузена прямо пропорциональна магнитной индукции.

Если устройство для определения числового значения естественно-дискретизированной величины путем счета является чрезмерно сложным (или естественно-дискретизированную величину нельзя измерять с помощью счетчика импульсов из-за недостаточности его быстродействия), то целесообразно такую величину преобразовать в непрерывную во времени, которая затем измеряется. Таким путем обычно измеряются различные потоки ядерных излучений в устройствах промышленного контроля и измерения, в которых поток частиц предварительно преобразуется в электрический ток.

**Искусственно-дискретизированными сигналами** являются последовательности импульсов, полученные в результате операции дискретизации. Физически дискретизация непрерывного сигнала  $x(t)$  реализуется пропусканием через ключ только мгновенных значений в заданные моменты времени – моменты дискретизации.

При искусственной дискретизации величины, изменяющейся во времени, **теряется часть информации о ней**. При восстановлении первоначальной зависимости возникает погрешность от дискретизации. Однако информативный параметр данного сигнала сохраняется в дискретизированном сигнале и становится более удобным для дальнейшего извлечения и использования.

**При дискретизации гармонического сигнала** с целью получения информации об его частотно-временных параметрах создается искусственно-дискретизированный сигнал в виде последовательности импульсов с определенным значением периода повторения. Таким путем преобразуется, например, частота электрических колебаний с помощью формирователя, выдающего импульсы в моменты перехода входного гармонического сигнала через нулевые значения. Это удобство дискретизации процесса электрических колебаний в том случае, если информативным его параметром является частота, привело к широкому рас-



пространению частотных измерительных преобразователей, в которых различные величины преобразуются в частоту.

Операция дискретизации сигналов  $x(t)$  дает возможность с меньшими аппаратными затратами выделить измерительную информацию о процессе по обеим координатам: значению и времени (в частности, подготовить возможность использования счетчиков импульсов).

**Дискретизация непрерывного сигнала может производиться с целью:**

- выборки определенных мгновенных значений, например экстремальных;
- масштабного преобразования временной координаты сигнала, например переноса частоты в сторону меньших частот путем стробирования;
- представления информации о непрерывном сигнале цифровым прибором;
- множественных измерений нескольких сигналов одним прибором.

#### **4.2. Восстановление непрерывного сигнала из дискретизированного**

Дискретизация является обычно промежуточным преобразованием сигнала в форму, более удобную для последующих операций (передачи, масштабного преобразования временной координаты сигнала и др.). Дискретизированный сигнал является также промежуточным состоянием при реализации операции воспроизведения сигнала по заданным числовым данным. В дискретизированном сигнале отсутствуют промежуточные значения, которые содержались в непрерывном сигнале. Для многих последующих операций: управления, при передаче, преобразовании вида сигнала – принципиально необходим непрерывный сигнал. Поэтому дискретизированный сигнал во многих случаях снова нужно преобразовать в непрерывный и восстановить в нем все его промежуточные значения.

**При «физической» дискретизации** сигнала на выходе аналоговых циклических преобразователей в моменты  $t_k$  получают физические мгновенные значения дискретизированного сигнала; такое преобразование называется также **амплитудно-импульсным**.

**При «аналитической» дискретизации** на выходе цифровых приборов получают числовые значения измеряемой величины  $N_k \cdot \Delta x_k$  в соответствующие моменты времени.

Целью исследования сигнала является получение непрерывной функции  $x(t)$  с оценкой ее точности. Для этого необходимо восстановить физически или аналитически все промежуточные значения  $x(t)$ .

Таким образом, возникают два случая восстановления непрерывного сигнала из дискретизированного:

- по физическим дискретизированным во времени мгновенным значениям сигнала;
- по известным числовым значениям дискретизированного сигнала в соответствующие моменты дискретизации  $t_k$ .

Восстановление сигнала в обоих случаях должно быть произведено с заданной погрешностью.

При восстановлении первичного сигнала из дискретизированного необходимо по известным мгновенным значениям в известные моменты времени, следующие при равномерной дискретизации через равные интервалы  $T_d$ , определить все промежуточные значения этого сигнала **аппроксимацией** путем **интерполяции** или **экстраполяции**, для которых, как известно, создан весьма обширный математический аппарат. При интерполяции и экстраполяции необходимо прежде всего предварительно подобрать для данного участка сигнала **восстанавливающую базисную функцию**. При этом восстанавливаемый сигнал обычно выражается суммой базисных функций:

$$x_{\text{восст}}(t) = \sum_{k=1}^N a_k \cdot C_k(t),$$

где  $C_k(t)$  – некоторая система базисных функций, которая обычно является ортогональной или ортонормированной;  $a_k$  – коэффициенты ряда.

Коэффициенты ряда  $a_k$  и базисные функции могут выбираться на основе различных критериев, например, по минимуму среднеквадратической погрешности или по критерию совпадения значений восстанавливаемого непрерывного сигнала с мгновенными значениями дискретизированного сигнала.

Координаты времени базисных функций могут изменяться в широком диапазоне, например, на всем протяжении интервала  $T$  – времени реализации данного сигнала либо только на протяжении одного или нескольких интервалов дискретизации  $T_d$ . Естественно, что базисные функции подбираются, прежде всего, из условий наибольшей простоты их реализации, что в свою очередь предопределяет также и степень несовершенства самой операции восстановления сигнала. Желательно также, чтобы для простоты реализации операции восстановления и коэффициенты ряда  $a_k$  определялись бы, в принципе, простейшим способом по параметрам дискретизированного сигнала, в частности по мгновенным значениям дискретизированного сигнала.

**В первом случае**, если базисные функции и коэффициенты ряда выбираются по критерию минимума среднеквадратической погрешности, система базисных функций выбирается ортонормированной или ортогональной, а коэффициенты ряда определяются, как коэффициенты соответствующего ряда Фурье:

$$a_k = \int_0^T x(t) \cdot C_k(t) dt.$$

При этом выполняется критерий

$$\min \int_0^T |x(t) - x_{\text{восст}}(t)|^2 dt.$$

Координата времени каждой базисной функции в этом случае изменяется во всем диапазоне времени реализации сигнала. Наиболее важным примером восстанавливающей функции является **ряд В.А. Котельникова**, который далее будет рассмотрен подробно. В этом ряду базисными являются **функции отсчета**, а коэффициенты ряда  $a_k$  (что весьма важно для наиболее простой реализации) равны соответствующим мгновенным значениям дискретизированного сигнала. Этот случай восстановления обычно представляет собой описание **физического восстановления сигнала**.

**Во втором случае**, если базисные функции и коэффициенты ряда выбираются по критерию совпадения значений восстанавливаемого непрерывного сигнала с мгновенными значениями дискретизированного сигнала, их параметры определяются путем решения системы уравнений

$$x(t_k + \tau) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^M a_i(t_k + \tau) \cdot C_i(t_k + \tau), \quad (4.2)$$

где  $\tau = t - t_k$ .

Для обеспечения простоты реализации в качестве базисных функций в этом случае выбирают функции типа «функция окна»:

$$C_i(t_k + \tau) = P_m(\tau) \cdot \Pi(\tau / T_d), \quad (4.3)$$

где  $T_d$  – период дискретизации сигнала;  $P_m(\tau)$  – полином  $m$ -ой степени от  $\tau$ .

$$\Pi(\tau / T_d) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 < \tau < T_d; \\ 0, & \text{при } T_d < \tau. \end{cases}$$

**Примером второго подхода** к решению этой задачи является аппроксимация **степенными полиномами**. Этот метод получил широкое применение в измерительной технике, так как в большей степени удобен для аналитического восстановления на основе наличия числовых результатов измерения мгновенных значений дискретизированного сигнала, а также потому, что отличается простотой реализации и достаточно высокой точностью.

### 4.3. Теорема В.А. Котельникова

Если функция  $x(t)$ , удовлетворяющая условиям Дирихле (т. е. ограничена, кусочно-непрерывна и имеет ограниченное число экстремумов) и обладающая спектром с граничной частотой  $f_c$ , дискретизирована циклически с периодом  $T_d \leq \frac{1}{2 \cdot f_c}$ , то она может быть восстановлена по этой совокупности ее мгновенных значений без погрешности.

При восстановлении используется **ряд Котельникова**:

$$x_{\text{восст}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \cdot T_d) \cdot \frac{\sin(\omega_c \cdot (t - k \cdot T_d))}{\omega_c \cdot (t - k \cdot T_d)}, \quad (4.4)$$

т. е. непрерывный сигнал  $x(t)$  может быть представлен суммой произведений мгновенных значений сигнала  $x(k \cdot T_d)$ , взятых с интервалом  $T_d$ , на некоторую функцию времени, называемую **функцией отсчетов**,

$$S = \frac{\sin(\omega_c \cdot (t - k \cdot T_d))}{\omega_c \cdot (t - k \cdot T_d)}.$$

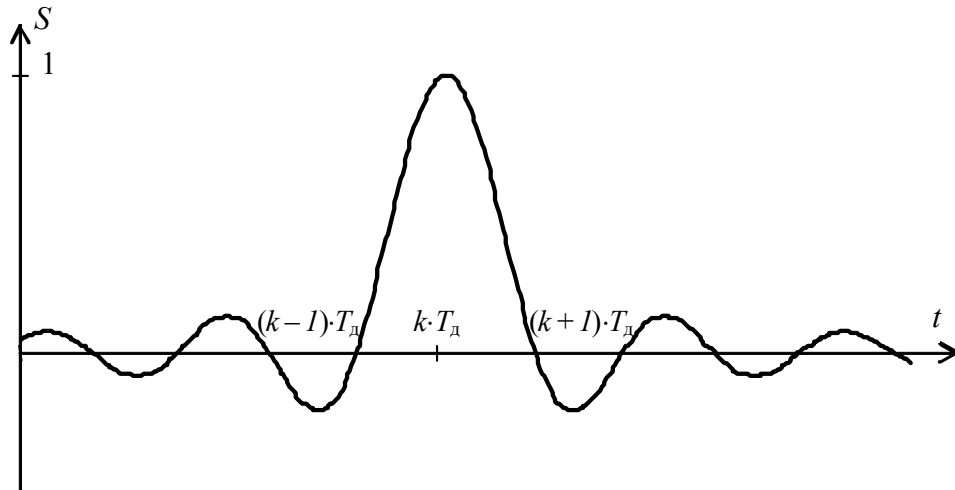


Рис. 4.2. График функции отсчетов

**Функция отсчетов обладает следующими свойствами:**

- в моменты времени  $t = k \cdot T_d$  достигает максимума, равного 1;
- в моменты времени  $t = (k + n) \cdot T_d$ , где  $n$  — любое целое число, равна нулю;
- ортогональна на бесконечном интервале времени.

Таким образом, **ряд Котельникова** является одним из примеров обобщенного **ряда Фурье** и замечателен тем, что его **коэффициенты равны мгновенным дискретизированным значениям сигнала  $x(t)$**  и, следовательно, определяются наиболее простым способом.

Функция отсчетов представляет собой **реакцию идеального фильтра нижних частот** на входное воздействие в виде единичной импульсной функции. Следовательно, если дискретизированный с шагом  $T_d$  сигнал  $x_{\text{дискр}}(t)$  подать на вход идеального фильтра с верхней границей пропускания  $f_c$ , то на выходе получится восстановленный без погрешностей непрерывный сигнал  $x(t)$ .

При использовании теоремы Котельникова возникает два принципиальных **затруднения**.

**Во-первых**, теорема Котельникова предназначена для сигналов с **ограниченным частотным спектром**, а реальные сигналы  $x(t)$  всегда ограничены во времени и поэтому имеют бесконечный частотный спектр. Однако с достаточной для практики точностью можно ограничить спектр частотой  $f_c$  (считая, что при  $f > f_c$  спектр близок к нулю) и пренебречь, таким образом, влиянием высших гармоник. При этом возникают погрешности в результате отбрасывания высокочастотной части спектра.

**Во-вторых**, дискретизированный по В.А. Котельникову реальный сигнал при пропускании его на приемном конце устройства через фильтры нижних частот восстанавливается приближенно, так как **реальные фильтры** не могут точно воспроизвести **функцию отсчетов**, обладающую бесконечной протяженностью во времени и для отрицательных значений  $t$ . Однако с помощью **фильтра с переменными параметрами** возможно генерирование сигналов, точно воспроизводящих функции отсчетов [9].

#### **4.4. Восстановление сигнала степенными полиномами, погрешности аппроксимации**

При аналитическом определении промежуточных значений измеряемого сигнала  $x(t)$  по его мгновенным значениям обычно применяется ступенчатая или линейная аппроксимация.

Для восстановления непрерывного сигнала  $x(t)$  необходимо аппроксимировать, т. е. приближенно определить, его промежуточные значения между мгновенными, измеренными прибором в определенные моменты времени. При аппроксимации  $x(t)$  на каждом участке между ее известными значениями заменяется кривой, изменяющейся по определенному закону (например, **горизонтальной прямой при ступенчатой аппроксимации**, отрезком **наклонной прямой при кусочно-линейной** и участком **параболы при параболической**).

**Наибольшую разность** между аппроксимированными, т. е. приближенными, и действительными промежуточными значениями функ-

ции  $x(t)$  называют **погрешностью дискретизации** во времени, или **мгновенной погрешностью от аппроксимации**  $\Delta x_{\text{ап}}$ .

Погрешность от аппроксимации зависит от закона изменения  $x(t)$ . Если  $x(t)$  – линейная функция, то оптимальный закон аппроксимации является линейным. **При усложнении способа аппроксимации значительно возрастает стоимость и сложность аппаратуры.** Погрешность от аппроксимации будет тем меньше, чем меньше шаг дискретизации  $T_d$ .

Рассмотрим погрешность от аппроксимации при различных законах аппроксимации.

**Ступенчатая аппроксимация.** В случае использования степенных полиномов **нулевого порядка**, т. е. при самой простой ступенчатой аппроксимации, согласно выражениям (4.2) и (4.3) при  $m = 0$

$$a_1 = x(t_k), \quad C_1(t_k + \tau) = \Pi(\tau / T_d), \quad (4.5)$$

где  $\Pi$  – функция окна.

Тогда восстанавливаемый сигнал

$$x_{\text{восст}}(t) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^M a_i(t_k + \tau) \cdot C_i(t_k + \tau) = \sum_{k=1}^N x(t_k) \cdot \Pi\left(\frac{\tau}{T_d}\right). \quad (4.6)$$

Предположим, что задана мгновенная погрешность от аппроксимации и принята ступенчатая аппроксимация, при которой все мгновенные значения  $x(t)$  в течение  $T_d$  между моментами измерения  $t_k$  и  $t_{k+1}$  заменяются значениями  $x(t_k)$ .

Максимальное значение погрешности от аппроксимации  $\Delta x_{\text{ап. max}}$  в этом случае будет на наиболее крутом участке функции, где первая производная достигает наибольшего значения. В момент, непосредственно предшествующий моменту измерения  $t_{k+1}$ , погрешность от аппроксимации

$$\Delta x_{\text{ап. max}} = |x_k - x_{k+1}| = x' \cdot T_d,$$

где  $x'$  – значение первой производной сигнала.

**При синусоидальном законе** изменения сигнала с частотой  $f$  минимально допустимая частота дискретизации определяется выражением

$$f_d = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{\gamma_{\text{ап}}}, \quad (4.7)$$

где  $\gamma_{\text{ап}}$  – приведенная погрешность от аппроксимации.

При  $f = 1$  Гц и  $\gamma_{\text{ап}} = 0,01$  (1 %) частота дискретизации должна быть **628 Гц**.

**Кусочно-линейная аппроксимация.** При использовании степенных полиномов **первого порядка**, т. е. при кусочно-линейной аппроксимации, следуя выражениям (4.2) и (4.3), при  $m = 1$  получаем

$$\begin{aligned}
a_1 &= x(t_k), \quad C_1(t_k + \tau) = \Pi(\tau / T_d); \\
a_2 &= \frac{x(t_k + T_d) - x(t_k)}{T_d}, \quad C_2(t_k + \tau) = \tau \cdot \Pi(\tau / T_d).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Тогда восстанавливаемый сигнал

$$x_{\text{восст}}(t) = \sum_{k=1}^N \left[ x(t_k) \cdot \Pi\left(\frac{\tau}{T_d}\right) + \frac{x(t_k + T_d) - x(t_k)}{T_d} \cdot \tau \cdot \Pi\left(\frac{\tau}{T_d}\right) \right]. \tag{4.9}$$

При кусочно-линейной аппроксимации кривая в промежутке между двумя известными значениями заменяется отрезком прямой. Погрешность  $\Delta x_{\text{ап}}$  при этом будет наибольшей на тех участках изменения функции, где **модуль второй производной** достигает наибольшего значения.

Рассмотрим погрешность от аппроксимации прибора, выдающего результат измерения через одинаковые промежутки времени, для случая измерения величины, изменяющейся **по синусоидальному закону** с частотой  $f$  ( $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ ). Погрешность будет наибольшей в этом случае в зоне максимума:

$$\Delta x_{\text{ап. max}} = x_1 - x_{\text{max}} = x_{\text{max}} \cdot \cos\left(\omega \cdot \frac{T_d}{2}\right) - x_{\text{max}} = x_{\text{max}} \cdot \left[ \cos\left(\omega \cdot \frac{T_d}{2}\right) - 1 \right].$$

Приведенная погрешность от аппроксимации

$$\gamma_{\text{ап}} = \frac{\Delta x_{\text{ап}}}{x_{\text{max}}} = \left[ \cos(\pi \cdot f \cdot T_d) - 1 \right].$$

При малых  $\pi \cdot f \cdot T_d$

$$\cos(\pi \cdot f \cdot T_d) - 1 = -\frac{1}{2} \cdot \sin^2(\pi \cdot f \cdot T_d) \approx -\frac{1}{2} \cdot (\pi \cdot f \cdot T_d)^2.$$

Следовательно, погрешность аппроксимации синусоидального сигнала равна

$$\gamma_{\text{ап}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\pi \cdot f)^2}{f_d} = \frac{1}{8} \cdot \frac{(2 \cdot \pi \cdot f)^2}{f_d^2}. \tag{4.10}$$

Минимально допустимая частота дискретизации равна

$$f_d = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{\sqrt{8 \cdot \gamma_{\text{ап}}}}.$$

Формула для получения и определения погрешности аппроксимации для **любой функции при кусочно-линейной аппроксимации** получена В.Н. Хлистуновым [10]:

$$f_d^2 = \frac{x''_{\text{max}}}{8 \cdot \gamma_{\text{ап}}}, \tag{4.11}$$

где  $x''_{\text{max}}$  – максимальное значение второй производной.

При  $f = 1$  Гц и  $\gamma_{\text{ап}} = 0,01$  (1 %) частота дискретизации для синусоидального сигнала должна быть  $f_d = 22$  Гц.

Если сравнить формулы для  $f_d$  при ступенчатой и кусочно-линейной аппроксимации, то можно убедиться, что  $f_d$  в первом случае должна быть во много раз больше. Так, например, для синусоидальной функции  $f_d$  при ступенчатой аппроксимации должна быть примерно в  $\frac{30}{\sqrt{\gamma_{\text{ап}}}}$  раз больше, чем при кусочно-линейной.

Частоту дискретизации  $f_d$  при кусочно-линейной аппроксимации можно сравнить также с частотой дискретизации  $f_{\text{д.к}}$  по В.А. Котельникову с учетом погрешности от ограничения спектра сигнала [9], например для сигнала экспоненциальной формы  $x(t) = x_m \cdot e^{-at}$ . В этом случае при кусочно-линейной аппроксимации  $f_d^2 = \frac{4 \cdot a}{\gamma_{\text{ап}}}$ .

Тогда, если  $a = 1$  и  $\gamma_{\text{ап}} = 0,01$  (1 %), то  $f_d = 4$  Гц.

В случае дискретизации по В.А. Котельникову с учетом амплитудной погрешности  $\gamma_{\text{ап}} = \frac{\Delta x}{x_m}$ , зависящей от соотношения мощности сигнала  $P_c$  и мощности отбрасываемой части спектра при ограничении [9], частота дискретизации

$$f_{\text{д.к}} = \frac{a \cdot \gamma_{\text{ап}}^2}{-\pi^2 \cdot \ln(\gamma_{\text{ап}})}.$$

Тогда, если  $a = 1$  и  $\gamma_{\text{ап}} = 0,01$  (1 %), то  $f_{\text{д.к}} = 222$  Гц.

Следовательно, кусочно-линейная аппроксимация сигнала в данном случае является более целесообразной.

**Параболическая аппроксимация.** Если осуществлена параболическая аппроксимация, то необходимая частота дискретизации

$$f_d^3 = \frac{x_{\text{max}}'''}{15,53 \cdot \gamma_{\text{ап}}}, \quad (4.12)$$

где  $x_{\text{max}}'''$  – максимальное значение третьей производной.

Например, для **синусоидальной функции** при параболической аппроксимации, если  $f = 1$  Гц и  $\gamma_{\text{ап}} = 1\%$ , то

$$f_d = \sqrt[3]{\frac{x_{\text{max}} \cdot \omega^3}{15,53 \cdot \gamma_{\text{ап}}}} \approx 11 \text{ Гц.}$$

Следовательно, при параболической аппроксимации для заданных условий частота дискретизации по сравнению с кусочно-линейной ап-



проксимацией **снижается только в два раза** при значительном усложнении аппаратуры.

#### 4.5. Понятие об адаптивной дискретизации и сравнение различных видов аппроксимации

Если такие параметры процесса, как  $x'''$ ,  $x''$  или  $x'$ , изменяются в широких пределах, то при рассмотренных выше способах аппроксимации с постоянной частотой дискретизации, которая определена по максимальному значению  $x'''_{\max}$ ,  $x''_{\max}$  или  $x'_{\max}$ , значительная часть измеренных мгновенных значений  $x_k$  является излишней при заданных требованиях к погрешности восстановления. Следовательно, в таких случаях **имеет место избыточная информация и завышенная частота дискретизации**. Это приводит к усложнению отдельных узлов измерительного устройства и перегрузке звеньев памяти и регистрации. Поэтому в сложных измерительно-информационных системах осуществляются различные способы **адаптивной дискретизации** с переменным шагом, зависящим от изменяющихся параметров процесса, **или следящее цифровое измерение** с квантованием сначала по значению, а затем соответствующей дискретизацией во времени.

С помощью приведенных выше формул можно определить необходимую частоту дискретизации сигнала в зависимости от заданной погрешности в нескольких частных случаях – при известных значениях максимумов первой, второй или третьей производной.

Задача определения необходимой частоты дискретизации в более общем случае при известном частотном спектре сигнала и в зависимости от способа аппроксимации и заданной погрешности решена с помощью цифровой вычислительной машины.

При ограниченном частотном спектре функции с частотой среза  $f_c$  и среднеквадратической погрешности аппроксимации  $\gamma_{\text{ап}} = 5\%$  необходимы следующие частоты дискретизации:

- $f_d = 21 \cdot f_c$  (при ступенчатой аппроксимации);
- $f_d = 5,9 \cdot f_c$  (при линейной аппроксимации).

А для получения  $\gamma_{\text{ап}} = 0,2\%$  –

- $f_d = 510 \cdot f_c$  (при ступенчатой аппроксимации);
- $f_d = 29 \cdot f_c$  (при линейной аппроксимации; примерно в 17 раз меньше, чем в предыдущем случае).

В результате такого машинного анализа функции с ограниченным частотным спектром при восстановлении идеальным фильтром была

**подтверждена теорема В.А. Котельникова**, необходимая минимальная частота дискретизации оказалась также равной  $f_d = 2 \cdot f_c$  [11].

Установлено, что для многих функций с бесконечным частотным спектром при линейной аппроксимации и заданном значении  $\gamma_{\text{ап}} = 5\%$  достаточна частота дискретизации  $f_d = 8 \cdot f_c$ , а для  $\gamma_{\text{ап}} = 0,2\%$   $f_d = (30 - 40) \cdot f_c$ . В этом случае под  $f_c$  подразумевается такая частота спектра, после которой начинается резкое снижение амплитуд спектральных составляющих.

Приведенные данные показывают, что при выборе частоты дискретизации по теореме Котельникова погрешности от аппроксимации могут быть значительными даже при относительно сложной линейной аппроксимации.

Ощутимый выигрыш в уменьшении необходимой частоты дискретизации получается при переходе от ступенчатой аппроксимации к линейной. При параболической аппроксимации, значительно более сложной, чем линейная, необходимая частота дискретизации снижается незначительно. Поэтому применение аппроксимации более сложной, чем линейная, обычно нецелесообразно.

Если исследователя в исходном сигнале интересуют только отдельные его параметры, например, среднее значение или первые производные, то частоту дискретизации целесообразно выбирать по условию не полного восстановления сигнала, а восстановления данного его параметра [12].

#### 4.6. Контрольные вопросы

1. Определение дискретизации и восстановления. Виды дискретизации.
2. Восстановление сигналов: общий подход.
3. Теорема Котельникова и ее ограничения.
4. Сравнение погрешностей ступенчатой, линейной и параболической аппроксимации.

## 5. ЦИФРОВЫЕ БИХ-ФИЛЬТРЫ

При подготовке раздела использованы следующие источники: [2, 3, 5, 7].

### 5.1. Задачи и методы синтеза цифровых фильтров

Синтез ЦФ в общем случае включает синтез передаточной функции и структуры фильтра по заданной его частотной или импульсной характеристике и оценку требуемой разрядности чисел для коэффициентов фильтра и отсчетов входного, выходного и внутренних сигналов.

**Синтез передаточной функции ЦФ  $H(z)$**  по заданной частотной характеристике  $H_d(j \cdot \omega)$  заключается в ее **аппроксимации** и определении **коэффициентов передаточной функции**. Методы синтеза разделяются:

- на аналитические;
- итерационные;
- численные.

**Аналитические методы** обеспечивают решение задачи аппроксимации в замкнутой аналитической форме. К ним относятся методы синтеза рекурсивных фильтров (РЦФ) по данным **аналогового фильтра-прототипа (АФП)** и, в первую очередь, **метод билинейного преобразования**.

**Итерационные методы**, сочетая аналитический и численный подходы, не дают однозначного соответствия параметров расчетных и заданных характеристик и требуют, как правило, ряда уточняющих процедур.

Итерационными являются **методы весовых функций и частотной выборки**, используемые для синтеза нерекурсивных фильтров (НРЦФ).

**Численные методы** основываются на непосредственной аппроксимации заданной частотной характеристики с минимальной погрешностью в соответствии с определенным критерием оптимальности.

По виду аппроксимируемой частотной характеристики  $H_d(j \cdot \omega)$  различают цифровые фильтры со ступенчато-образной амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ): фильтры нижних частот (ФНЧ); верхних частот (ФВЧ): полосно-пропускающие, или полосовые (ППФ или ПФ), полосно-заграждающие, или режекторные (ПЗФ или РФ), многополосные (МПФ) (рис. 5.1) и ЦФ с произвольной частотной характеристикой. Могут быть синтезированы также ЦФ с частотной характеристикой цифрового дифференциатора и преобразователя Гильберта.

Так как частотные характеристики ЦФ периодичны по частоте с периодом  $\omega_d$  и их модуль (АЧХ) и аргумент (ФЧХ) обладают свойствами соответственно четной и нечетной симметрии относительно частот  $\omega = 0$  или  $\omega_d / 2$ , то их достаточно задать в полосе частот  $(0 - \omega_d / 2)$  или полосе  $(0 - \pi)$  нормированных частот  $\lambda = \omega T_d$  (рис. 5.1).

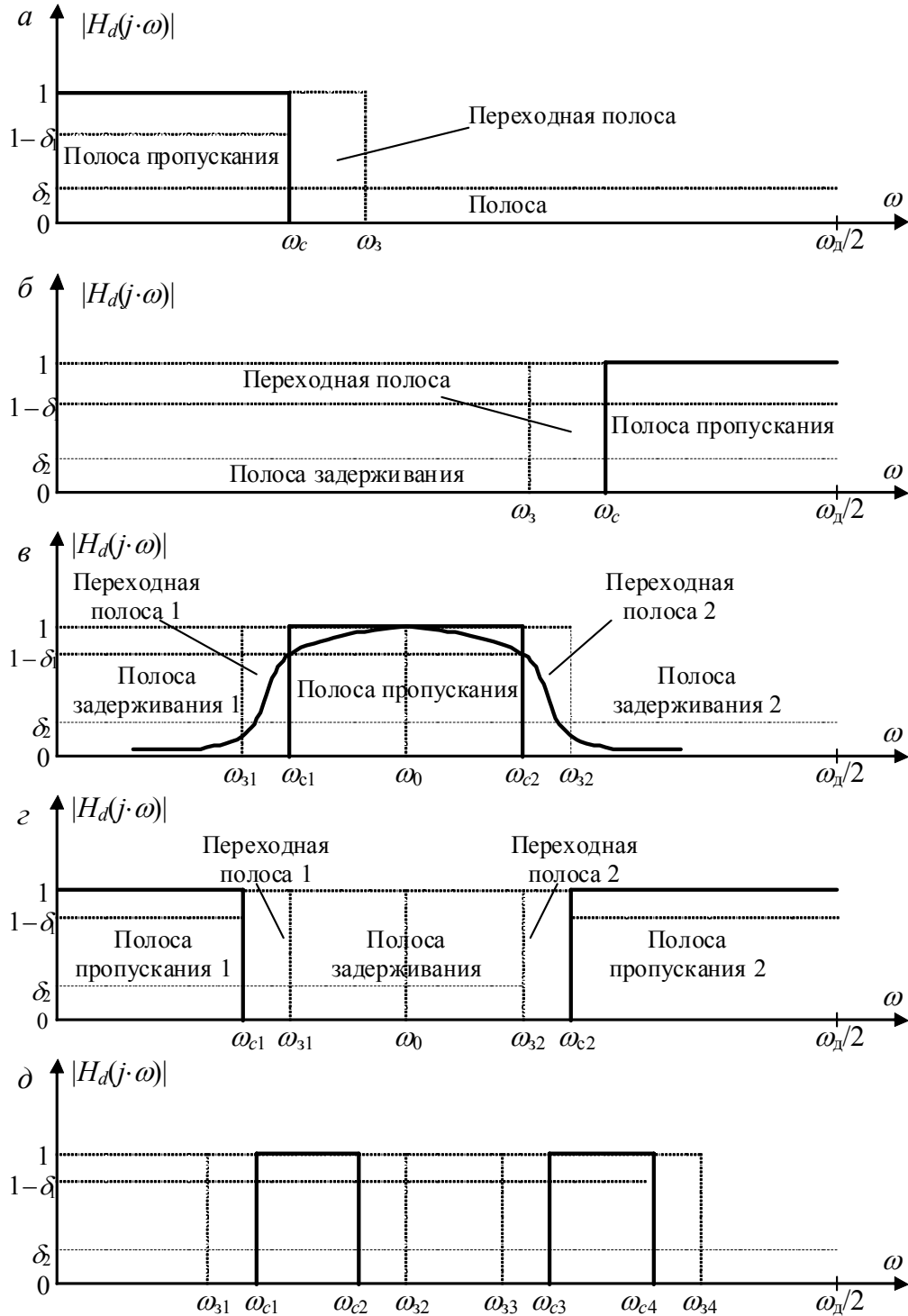


Рис. 5.1. Примеры задания АЧХ ЦФ: а) ФНЧ; б) ФВЧ; в) ПФ (или ППФ); г) РФ (или ПЗФ); д) МПФ

Исходными данными для синтеза ЦФ по заданной частотной характеристике (рис. 5.1) являются:

- частоты среза  $\omega_c$ , задерживания  $\omega_z$ , определяющие границы и значения полос пропускания, задерживания и переходных полос фильтра;
- допустимая неравномерность АЧХ фильтра в полосе пропускания (или ослабление на границах полосы пропускания в случае монотонных АЧХ)  $A_{\text{п}}$ , дБ;
- минимальное затухание АЧХ в полосе задерживания  $A_3$ , дБ.

Параметрам  $A_{\text{п}}$ ,  $A_3$ , определяющим допустимые погрешности аппроксимации заданной идеализированной АЧХ  $|H_d(j \cdot \omega)|$ , соответствуют на рис. 5.1 уровни допустимого отклонения расчетной АЧХ  $|H(j \cdot \omega)|$  от 1 в полосе пропускания  $(1 - \delta_1)$  и от нуля в полосе задерживания  $\delta_2$ :  $A_{\text{п}} = 20 \cdot \lg[1/(1 - \delta_1)]$ , дБ;  $A_3 = 20 \cdot \lg(1 / \delta_2)$ , дБ.

Выделенные на рис. 5.1 пунктиром области образуют поле допусков на погрешности аппроксимации, в которые должна уложиться расчетная аппроксимирующая АЧХ  $|H(j \cdot \omega)|$ , показанная на рис. 5.1, в.

## 5.2. Синтез рекурсивных фильтров по аналоговому прототипу

Синтез РЦФ по аналоговому прототипу возможен **методом отображения дифференциалов**, заключающимся в дискретизации дифференциального уравнения аналоговой цепи, т. е. переходе от производных к конечным разностям; **методом инвариантности импульсных характеристик**, основанным на дискретизации импульсной характеристики аналоговой цепи; **методом согласованного Z-преобразования** вида  $s + s_{p(0)i} \rightarrow 1 - z^{-1} \cdot e^{-s_{p(0)i} T_d}$ , где  $s_{p(0)i}$  – полюса и нули преобразуемой передаточной функции аналоговой цепи; **методом билинейного Z-преобразования**.

**Метод отображения дифференциалов.** По данному методу производная аппроксимируется некоторыми конечными разностями. В результате этого дифференциальное уравнение (описывающее аналоговый фильтр) заменяется на разностное уравнение (описывающее цифровой фильтр). Эта операция приводит к замене комплексной переменной  $S$  в передаточной функции аналогового фильтра на комплексную переменную  $Z$  в передаточной функции цифрового фильтра:  $s = f(z)$ . Ясно, что различные методы численного дифференцирования дадут различные функции перехода согласно соотношению  $s = f(z)$  и, следовательно, различные цифровые фильтры. Наиболее простой случай – **аппроксимация Эйлера**.

**Метод Эйлера** аппроксимирует производную по времени непрерывной функции  $dy(t) / dt$  конечной разностью вида

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=nT_d} = \frac{y(n) - y(n-1)}{T_d}, \quad (5.1)$$

где  $T_d$  – интервал дискретизации.

В операторной форме уравнение дает

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T_d} = f(z). \quad (5.2)$$

В свою очередь уравнение (5.2) устанавливает, что  $z = 1 / (1 - s \cdot T_d)$ .

**Метод инвариантности импульсной характеристики** заключается в процедуре перехода от аналоговых фильтров к цифровым фильтрам.

Эта процедура устанавливает, что импульсная характеристика  $h(n)$  результирующего цифрового фильтра представляет собой выборки импульсной характеристики  $h(t)$  соответствующего аналогового фильтра и определяется следующим образом:  $h(n) = h(t)|_{t=n \cdot T_d}$ , где  $T_d$  – интервал дискретизации.

Передаточная функция  $H(z)$  цифрового фильтра находится с помощью Z-преобразования импульсной характеристики следующим образом:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ h(t)|_{t=n \cdot T_d} \right] \cdot z^{-n}, \quad (5.3)$$

для физически реализуемых фильтров.

Однако ни одним из перечисленных методов не достигается необходимое соответствие частотных свойств ЦФ и аналогового прототипа. Такое соответствие при синтезе ЦФ со ступенчато-образными АЧХ обеспечивает **метод билинейного преобразования (инвариантности частотных характеристик)**.

### 5.3. Метод билинейного преобразования

#### 5.3.1. Общее описание метода

По методу билинейного преобразования синтезируемому ЦФ ставится в соответствие некоторый аналоговый фильтр-прототип (АФП) с передаточной функцией  $H(s)$  и частотной характеристикой  $H(j \cdot \Omega)$ , однозначно связанными с передаточной функцией  $H(z)$  и частотной характеристикой  $H(j \cdot \omega)$  ЦФ:

$$\begin{array}{ccc} \text{АФП} & & \text{ЦФ} \\ H(s) & \xrightarrow{s = f(z)} & H(z) \\ \xleftarrow{z = f^{-1}(s)} & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{АФП} & & \text{ЦФ} \\ H(j \cdot \Omega) & \xrightarrow{\Omega = f(\omega)} & H(j \cdot \omega) \\ \xleftarrow{\omega = f^{-1}(\Omega)} & & \end{array}$$

Связь эта определяется прямой  $s = f(z)$  и обратной  $z = f^{-1}(s)$  преобразующими функциями и соответствующими им при  $s = j \cdot \Omega$  и  $z = e^{j\omega T_d}$  преобразованиями частот  $\Omega = f(\omega)$ ,  $\omega = f^{-1}(\Omega)$  аналогового и цифрового фильтров. С помощью этих преобразований определяются требования к АФП, по которым хорошо разработанными методами синтезируется его передаточная функция  $H(s)$ , преобразуемая затем в искомую передаточную функцию ЦФ  $H(z)$ .

Преобразующие функции должны удовлетворять следующим условиям:

- левая  $S$ -полуплоскость ( $s = \sigma + j\psi$ ,  $\sigma < 0$ ), в которой размещаются полюса устойчивого АФП, должна однократно отображаться внутрь круга единичного радиуса  $|z| < 1$ , в котором на  $Z$ -плоскости размещаются полюса устойчивого ЦФ, т. е. устойчивому АФП должен соответствовать устойчивый ЦФ;

- вся мнимая ось частот  $j \cdot \Omega$  АФП ( $\Omega = (0 \pm \infty)$ ) должна однократно, т. е. в один обход, отображаться на окружность единичного радиуса  $Z$ -плоскости  $e^{j\omega T_d}$  ( $\omega = (0 \pm \omega_d / 2)$ ), обеспечивая близость частотных характеристик обоих фильтров.

Этим условиям отвечает **билинейное преобразование**.

### 5.3.2. Билинейное преобразование

Билинейное преобразование определяется следующим образом:

$$s = f(z) = (2/T_d) \left[ (1 - z^{-1}) / (1 + z^{-1}) \right]. \quad (5.4)$$

Можно также найти обратное соотношение

$$z^{-1} = [(2 - s \cdot T_d) / (2 + s \cdot T_d)]. \quad (5.5)$$

Из свойств процедуры перехода на основе билинейного преобразования следует, что мнимая ось  $S$ -плоскости отображается в единичную окружность в  $Z$ -плоскости (где  $|z| = 1$ ).

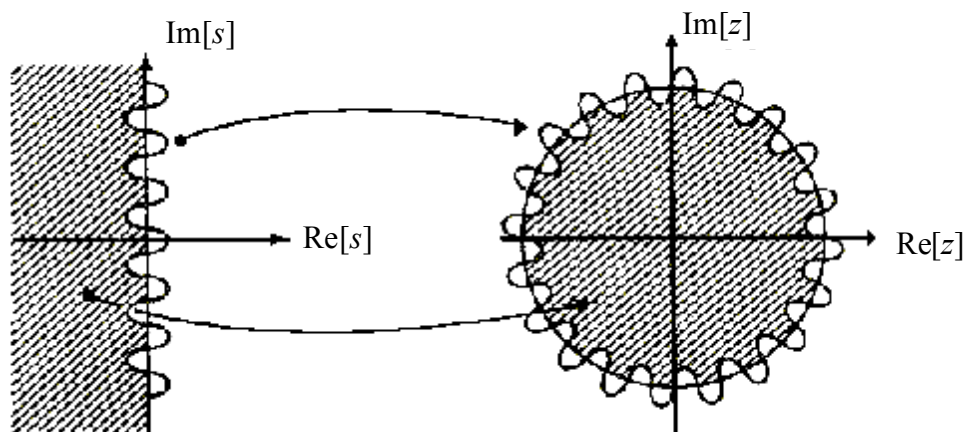


Рис. 5.2. Свойства процедуры перехода на основе билинейного преобразования

Билинейное преобразование – однозначная функция. Это означает, что каждой точке в  $Z$ -плоскости соответствует только одна точка в  $s$ -плоскости и наоборот. Из этого свойства однозначности следует, что **отсутствует эффект наложения спектров** при билинейной процедуре отображения.

Методика расчета цифровых фильтров на основе метода билинейного преобразования включает в себя нахождение подходящей передаточной функции  $H(s)$  аналогового фильтра и применение к ней билинейного преобразования для получения передаточной функции  $H(z)$  требуемого цифрового фильтра:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=(2/T_d)(1-z^{-1})/(1+z^{-1})} \quad (5.6)$$

При этом преобразовании будут сохраняться и частотные характеристики, и свойства устойчивости аналогового фильтра. Однако это не означает, что частотные характеристики аналогового и цифрового фильтра идентичны, одинакова только их «форма». Например, если амплитудно-частотная характеристика аналогового фильтра монотонно спадает для  $0 < \Omega < \infty$ , то соответствующий цифровой фильтр, полученный с помощью соотношения (5.6), будет обладать монотонно спадающей АЧХ от 0 до  $\infty$ . Или если АЧХ аналогового фильтра имеет  $k$  подъемов и спадов для  $0 < \Omega < \infty$ , то и амплитудно-частотная характеристика соответствующего цифрового фильтра будет обладать  $k$  подъемами и спадами.

В результате перехода к нормированным частотам ЦФ частотные преобразования принимают вид

$$\Omega = \frac{2}{T_d} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\omega \cdot T_d}{2} \right). \quad (5.7)$$

Характер деформации частот при билинейном преобразовании показан на рис. 5.3.

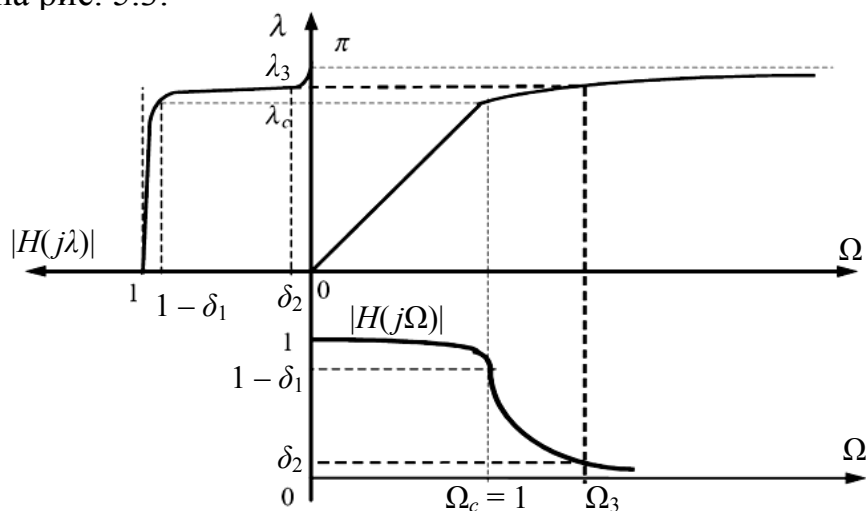


Рис. 5.3. Преобразование АЧХ аналогового ФНЧ в частотную характеристику цифрового ФНЧ



Для обеспечения равенства  $\omega_c = 1$  рад/с необходимо деформировать частоту аналогового ФНЧ-прототипа:  $\Omega_c = \frac{2}{T_d} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{T_d}{2}\right)$ .

Билинейное преобразование обеспечивает простую процедуру перехода от аналоговых к цифровым фильтрам и сохраняет вид частотных характеристик при преобразовании. Это означает, что широкополосные аналоговые фильтры с крутой переходной областью отображаются в широкополосные цифровые фильтры **без эффекта наложения**. В этом заключается основное преимущество этого метода по сравнению с методом инвариантности импульсной характеристики. Недостатком билинейного преобразования является то, что нелинейность соотношения между цифровой частотой  $\omega$  и аналоговой частотой  $\Omega$  приводит к **искажению частотных характеристик** аналоговых фильтров. Кроме того, при этом преобразовании **не сохраняется импульсная характеристика**.

### 5.3.3. Методика синтеза РЦФ по аналоговому прототипу

Возможны два метода проектирования ЦФ по аналоговому прототипу.

**В первом методе** расчет аналогового фильтра-прототипа (АФП) начинается с нахождения соответствующего аналогового фильтра-прототипа низких частот (АФПНЧ). В дальнейшем используется подходящее частотное преобразование для перевода этого прототипа низких частот в требуемый АФП. Наконец, **на основе процедуры отображения** этот аналоговый фильтр преобразуется в желаемый цифровой БИХ-фильтр, который удовлетворяет предъявленным требованиям. Полностью эта процедура расчета показана на рис. 5.4, а.

Процедуры перехода на основе метода **инвариантности импульсной характеристики** и **метода Эйлера** не обеспечивают хороших результатов расчета цифровых фильтров, если полоса аналогового фильтра не ограничена низкими частотами. **Метод билинейного преобразования** (из-за нелинейного соотношения между цифровой частотой  $\omega$  и аналоговой частотой  $\Omega$ ) дает лучшие результаты только для тех частотных характеристик аналогового фильтра, которые представляют собой ступенчато-образную функцию. Это означает, что **процедура отображения** (рис. 5.4, а) не обеспечивает хороших методов расчета фильтров верхних частот, заграждающих и некоторых типов полосовых фильтров.

Для исключения этих недостатков используется другой подход к расчету цифровых БИХ-фильтров. Такой способ изображен на рис. 5.4, б.

В этом случае **процедура отображения** всегда имеет дело с нормированным цифровым прототипом низких частот. Следовательно, рассмотренные в предыдущих подразделах три процедуры перехода смогут обеспечить хорошие результаты. В основном этот подход состоит в нахождении подходящего нормированного аналогового фильтра-прототипа низких частот. Аналоговый прототип отображается в цифровой фильтр-прототип низких частот (ЦФПНЧ). Наконец, используется цифровое частотное преобразование для перехода от цифрового прототипа низких частот к окончательному варианту, т. е. цифровому фильтру с подходящими характеристиками в полосе пропускания и полосе задерживания и удовлетворяющему предъявленным требованиям.

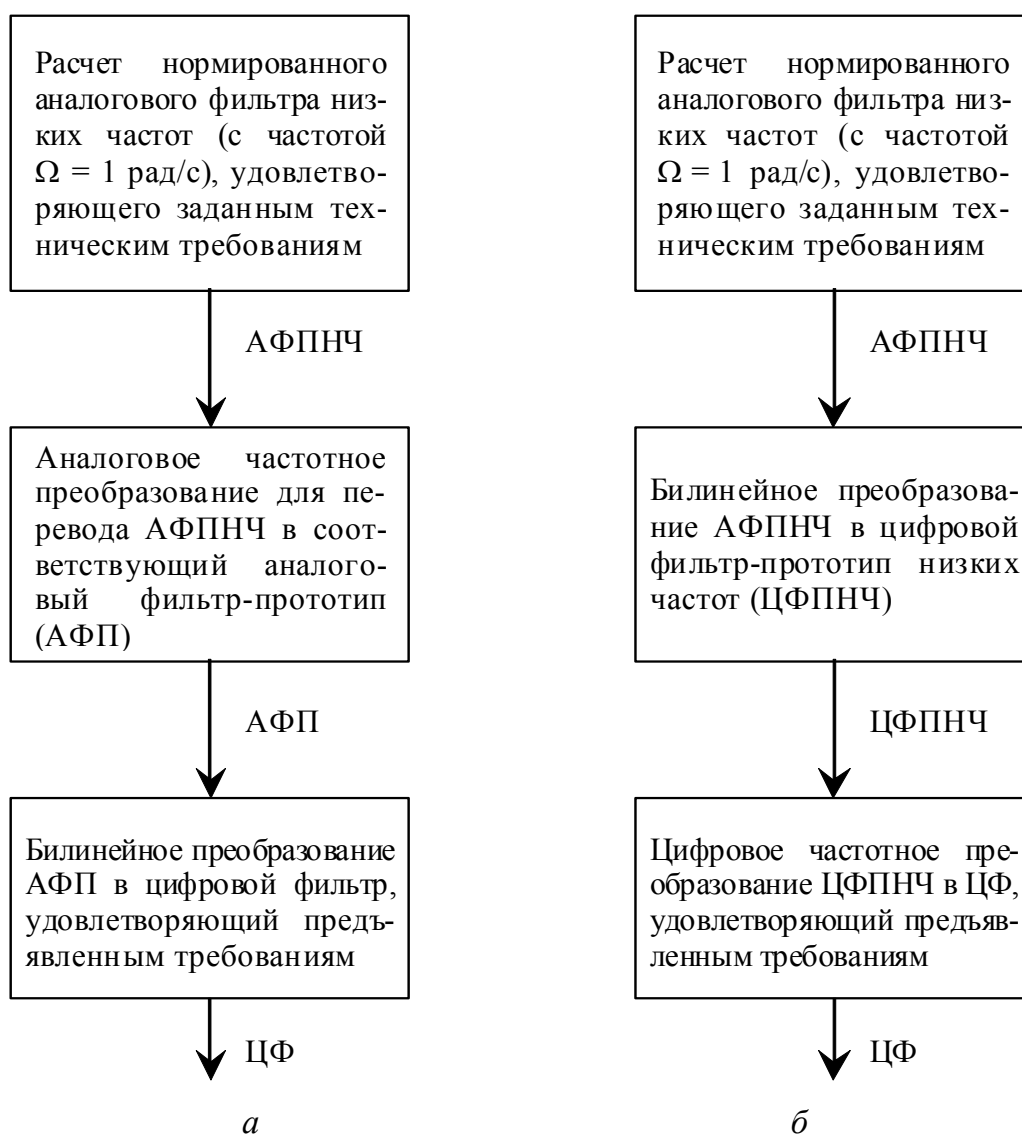


Рис. 5.4. Процедуры расчета цифровых фильтров

### 5.3.4. Синтез аналогового ФНЧ-прототипа (АФПНЧ)

Синтез АФПНЧ включает выбор аппроксимирующей функции, определение порядка фильтра  $m$ , значений нулей  $s_{0i}$  и полюсов  $s_{pi}$  и передаточной функции по заданным граничным частотам  $\Omega_c = 1$ ,  $\Omega_3$  и допускам на погрешности аппроксимации  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  ( $A_n$ ,  $A_3$ ). Синтез выполняется по справочникам или с помощью специальных компьютерных программ.

Нули и полюса синтезированного АФПНЧ полностью определяют его передаточную функцию  $H(s)$ :

$$H(s) = C \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (s - s_{0i})}{\prod_{i=1}^m (s - s_{pi})}, \quad (5.8)$$

где  $C$  – нормирующий множитель;  $m_1$  – число конечных нулей ( $m_1 < m$ ).

Следует отметить, что полюса АФПНЧ являются вещественными или комплексно-сопряженными числами (со знаком минус перед реальной частью), а конечные нули чисто мнимыми.

Синтез АФПНЧ заключается в аппроксимации его заданной идеализированной ЧХ с помощью соответствующих аппроксимирующих функций.

В качестве аппроксимирующих функций используются полиномы и дроби. К полиномиальным относятся аппроксимации Тейлора (фильтры Баттерворта), Чебышева, к дробным – Кауэра–Золоторева (эллиптические фильтры), Чебышева инверсная.

Передаточные функции фильтров с полиномиальной аппроксимацией не имеют конечных нулей, их частотные характеристики монотонны в полосе задерживания.

У фильтров с дробной аппроксимацией передаточные функции имеют нули на конечных частотах в полосе задерживания, а частотные характеристики – пульсации (в том числе равноволновые) в этой полосе. Фильтры Чебышева и эллиптические имеют равноволновые пульсации и в полосе пропускания.

Типичные графики частотных характеристик нормализованного АФПНЧ с полиномиальной и дробной аппроксимациями приведены на рис. 5.5.

Для частотных характеристик с равноволновыми пульсациями на графиках указаны соответствующие им частоты нулей и полюсов  $\Omega_{pi}$ ,  $\Omega_{0i}$  ПФ.

Фильтры с дробной аппроксимацией обеспечивают лучшие характеристики затухания при одинаковом порядке фильтра или меньшее значение порядка при заданном затухании частотной характеристики.

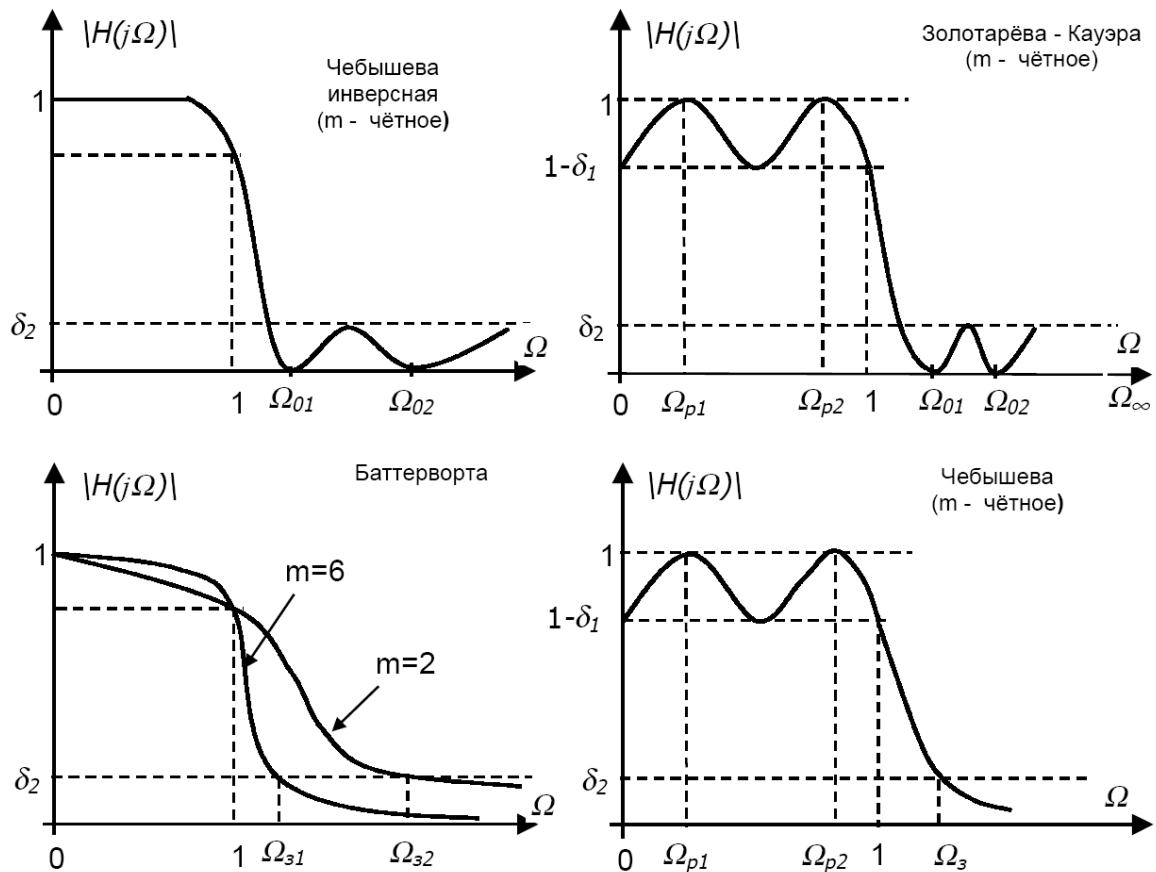


Рис. 5.5. Графики частотных характеристик нормализованного АФПНЧ, соответствующие различным аппроксимирующим функциям

### Фильтр Баттерворта

Аппроксимация АФПНЧ Баттерворта имеет вид

$$H(s) = \frac{C}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)}, \quad (5.9)$$

где  $s_k = e^{j \cdot \pi \cdot \left[ \frac{1}{2} + \frac{(2k-1)}{2n} \right]}$ ,  $C$  – константа нормирования.

На практике порядок фильтра Баттерворта определяется по заданному ослаблению  $A_3$  на некоторой частоте  $\Omega_3$ .

$$n = \frac{\lg(A_3^2 - 1)}{2 \cdot \lg(\Omega_3)}. \quad (5.10)$$

### Фильтр Чебышева 1

Аппроксимация АФПНЧ Чебышева 1 при порядке фильтра  $n$  имеет вид

$$H(s) = \frac{C}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)}, \quad (5.11)$$

где  $s_k = \sigma_k + j \cdot \psi_k$ ,  $\sigma_k = -sh(\varphi) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right)$ ,  $\psi_k = ch(\varphi) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right)$ ,

$$sh(\varphi) = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}, \quad ch(\varphi) = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}, \quad \gamma = \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right]^{1/n}, \quad \varepsilon - \text{пульсации в полосе}$$

пропускания фильтра.

На практике порядок фильтра Чебышева 1 определяется по заданному ослаблению  $A_3$  на некоторой частоте  $\Omega_3$  и пульсации в полосе пропускания:

$$n = \frac{\lg(g + \sqrt{g^2 - 1})}{\lg(\Omega_3 + \sqrt{\Omega_3^2 - 1})}, \quad g = \sqrt{\frac{A_3^2 - 1}{\varepsilon^2}}. \quad (5.12)$$

### Фильтр Чебышева 2 (инверсный)

Аппроксимация АФПНЧ Чебышева 2 (инверсная) имеет вид

$$H(s) = C \cdot \frac{\prod_{k=1}^n (s - sn_k)}{\prod_{k=1}^n (s - sp_k)}, \quad (5.13)$$

где  $sp_k = \sigma_k + j \cdot \psi_k$ ,  $sn_k = j \cdot \frac{\Omega_3}{\cos\left(\frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right)}$ ,  $\sigma_k = \frac{\Omega_3 \cdot \alpha_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$ ,  $\psi_k = \frac{-\Omega_3 \cdot \beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$ ,

$$\alpha_k = -sh(\varphi) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right), \quad \beta_k = ch(\varphi) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right), \quad sh(\varphi) = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2},$$

$$ch(\varphi) = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}, \quad \gamma = \left[ A_3 + \sqrt{A_3^2 - 1} \right]^{1/n}.$$

На практике порядок фильтра Чебышева 2 также определяется по заданному ослаблению  $A_3$  на некоторой частоте  $\Omega_3$  и пульсации в полосе пропускания, выражение (5.12).

### 5.3.5. Переход от АФПНЧ к ЦФ заданного типа

Аналоговый фильтр-прототип низких частот (АФПНЧ) преобразуется к требуемому аналоговому фильтру-прототипу (АФП) с помощью следующих частотных преобразований:

$$\text{АФПНЧ-АФНЧ: } s \rightarrow \frac{s}{\Omega_u} \quad (\text{фильтр низких частот});$$

$$\text{АФПНЧ-АФВЧ: } s \rightarrow \frac{\Omega_u}{s} \quad (\text{фильтр высоких частот});$$

$$\text{АФПНЧ-АПФ: } s \rightarrow \frac{s^2 + \Omega_u \Omega_l}{s(\Omega_u - \Omega_l)} \quad (\text{полосовой фильтр});$$

**АФПНЧ-АРФ:**  $s \rightarrow \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l}$  (режекторный фильтр).

$\Omega_u$  – верхняя частота среза,  $\Omega_l$  – нижняя частота среза.

Полученный АФП преобразуется в требуемый ЦФ с помощью билинейного преобразования (5.6).

АФПНЧ может быть преобразован в ЦФПНЧ путем билинейного преобразования (5.6). Далее выполняются частотные преобразования для получения требуемого ЦФ:

$$\text{ЦФПНЧ-ЦФНЧ: } z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha \cdot z^{-1}}, \quad \alpha = \frac{\sin\left(\frac{[\omega_c - \omega_u]}{2} \cdot T_d\right)}{\sin\left(\frac{[\omega_c + \omega_u]}{2} \cdot T_d\right)};$$

$$\text{ЦФПНЧ-ЦФВЧ: } z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha \cdot z^{-1}}, \quad \alpha = -\frac{\cos\left(\frac{[\omega_c - \omega_u]}{2} \cdot T_d\right)}{\cos\left(\frac{[\omega_c + \omega_u]}{2} \cdot T_d\right)};$$

$$\text{ЦФПНЧ-ЦПФ: } z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha \cdot k}{k+1}\right] \cdot z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} \cdot z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha \cdot k}{k+1}\right] \cdot z^{-1} + 1};$$

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{[\omega_u + \omega_l]}{2} \cdot T_d\right)}{\cos\left(\frac{[\omega_u - \omega_l]}{2} \cdot T_d\right)}; \quad k = \text{ctg}\left(\frac{[\omega_u - \omega_l]}{2} \cdot T_d\right) \cdot \text{tg}\left(\frac{\omega_c}{2} \cdot T_d\right);$$

$$\text{ЦФПНЧ-ЦРФ: } z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha}{k+1}\right] \cdot z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k} \cdot z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha}{k+1}\right] \cdot z^{-1} + 1};$$

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{[\omega_u - \omega_l]}{2} \cdot T_d\right)}{\cos\left(\frac{[\omega_u + \omega_l]}{2} \cdot T_d\right)}; \quad k = \text{tg}\left(\frac{[\omega_u - \omega_l]}{2} \cdot T_d\right) \cdot \text{tg}\left(\frac{\omega_0}{2} \cdot T_d\right).$$

$\omega_u$  – верхняя частота среза,  $\omega_l$  – нижняя частота среза,  $\omega_0$  – центральная частота ПФ и РФ,  $\omega_c$  – частота среза ЦФПНЧ,  $T_d$  – период дискретизации.

### 5.3.6. Пример синтеза фильтра методом билинейного преобразования

Рассчитать цифровой фильтр: тип фильтра – ПФ (полосовой); аппроксимация – по Баттерворту; частоты среза – 50 Гц, 150 Гц; подавление на частоте 300 Гц – не менее 20 дБ; частота дискретизации – 1 кГц.

#### Решение

1. Расчет фильтра начинается с выбора порядка  $n$  аналогового фильтра-прототипа низких частот (АФПНЧ) при аппроксимации по Баттерворту.

$$n = \frac{\lg(A_3^2 - 1)}{2 \cdot \lg(\Omega_3)}, \text{ где } \Omega_3 - \text{относительная частота задержки, } A_3 - \text{коэффициент}$$

ослабления на частоте задержки.

По заданию верхняя частота среза  $F_{c2} = 150$  Гц, а частота задержки  $F_3 = 300$  Гц. Следовательно, относительная частота задержки  $\Omega_3 = \frac{F_3}{F_{c2}} = \frac{300}{150} = 2$ .

Коэффициент ослабления на частоте задержки задан в единицах дБ (20 дБ). Выразим его в относительных единицах ( $A_3 = 10$ ).

Производим расчет порядка фильтра:

$$n = \frac{\lg(10^2 - 1)}{2 \cdot \lg(2)} = 3,31.$$

Округляем в большую сторону до четного числа:  $n = 4$ .

2. АФПНЧ по Баттерворту 4 порядка выглядит следующим образом:

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)},$$

где  $s_k = e^{j \cdot \pi \cdot \left[ \frac{1}{2} + \frac{(2k-1)}{2n} \right]} = \sigma_k + j \cdot \psi_k$  – полюса фильтра.

В случае четного  $n$  фильтр можно разбить на блоки 2 порядка:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - 2 \cdot \sigma_1 \cdot s + \sigma_1^2 + \psi_1^2} \cdot \frac{1}{s^2 - 2 \cdot \sigma_2 \cdot s + \sigma_2^2 + \psi_2^2} =$$

$$= \frac{1}{s^2 - 2 \cdot \sigma_1 \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{s^2 - 2 \cdot \sigma_2 \cdot s + 1}.$$

$$\sigma_k = \cos \left( \pi \cdot \left[ \frac{1}{2} + \frac{(2 \cdot k - 1)}{2 \cdot n} \right] \right).$$

$$\sigma_1 = \cos \left( \pi \cdot \left[ \frac{1}{2} + \frac{(2 \cdot 1 - 1)}{2 \cdot 4} \right] \right) = -0,383, \quad \sigma_2 = \cos \left( \pi \cdot \left[ \frac{1}{2} + \frac{(2 \cdot 2 - 1)}{2 \cdot 4} \right] \right) = -0,924.$$

3. Производим частотное преобразование АФПНЧ в аналоговый фильтр-прототип (АФП) заданного типа (в данном случае полосовой фильтр).

Преобразование обеспечивается подстановкой в передаточную функцию  $H(s)$ :

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \Omega_u \Omega_l}{s(\Omega_u - \Omega_l)}, \text{ где } \Omega_u - \text{верхняя частота среза, } \Omega_l - \text{нижняя частота среза}$$

$$(\Omega_u = 2 \cdot \pi \cdot F_{c2}, \quad \Omega_l = 2 \cdot \pi \cdot F_{c1}, \quad \Delta\Omega = \Omega_u - \Omega_l).$$

Для компенсации частотного искажения при билинейном преобразовании вместо частоты  $\Omega_1$  необходимо подставлять частоту  $\omega c12$ :

$$\omega c12 = 2 \cdot F_{\text{д}} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_1}{2 \cdot F_{\text{д}}}\right) = 2 \cdot F_{\text{д}} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi \cdot F_{c1}}{F_{\text{д}}}\right) = 2 \cdot 10^3 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi \cdot 50}{10^3}\right) = 50,41.$$

$$H(s) = \prod_{k=1}^2 \frac{1}{\frac{s^2}{\Delta\Omega^2} - \frac{2 \cdot \sigma_k}{\Delta\Omega} \cdot s + \left(1 + \frac{2 \cdot \omega c12 \cdot \Omega_u}{\Delta\Omega}\right) - \frac{2 \cdot \sigma_k \cdot \omega c12 \cdot \Omega_u}{\Delta\Omega} \cdot \frac{1}{s} + \frac{[\omega c12 \cdot \Omega_u]^2}{\Delta\Omega^2} \cdot \frac{1}{s^2}}.$$

4. Выполняем билинейное преобразование АФП и получаем заданный цифровой фильтр.

$$s \rightarrow (2 \cdot F_{\text{д}})[(1 - z^{-1})/(1 + z^{-1})].$$

$$H(z) = \prod_{k=1}^2 \frac{B_{0,k} + B_{1,k} \cdot z^{-1} + B_{2,k} \cdot z^{-2} + B_{3,k} \cdot z^{-3} + B_{4,k} \cdot z^{-4}}{A_{0,k} + A_{1,k} \cdot z^{-1} + A_{2,k} \cdot z^{-2} + A_{3,k} \cdot z^{-3} + A_{4,k} \cdot z^{-4}}.$$

$$C0_k := \left[ \left( \frac{2 \cdot F_{\text{д}}}{dB} \right)^2 + \frac{-2 \cdot \sigma_k \cdot 2 \cdot F_{\text{д}}}{dB} + \left( 1 + \frac{2 \cdot \omega c12 \cdot \omega c2}{dB^2} \right) + \left[ \frac{-2 \cdot \sigma_k \cdot (\omega c12 \cdot \omega c2)}{2 \cdot F_{\text{д}} \cdot dB} \right] + \left[ \frac{(\omega c12 \cdot \omega c2)^2}{(2 \cdot F_{\text{д}})^2 \cdot dB^2} \right] \right]^{-1},$$

$$B_{0,k} := C0_k; B_{1,k} := 0; B_{2,k} := -2 \cdot C0_k; B_{3,k} := 0; B_{4,k} := C0_k; A_{0,k} := 1;$$

$$A_{1,k} := \left[ (-4) \cdot \left( \frac{2 \cdot F_{\text{д}}}{dB} \right)^2 + (-2) \cdot \left( \frac{-2 \cdot \sigma_k \cdot 2 \cdot F_{\text{д}}}{dB} \right) + 2 \cdot \left[ \frac{-2 \cdot \sigma_k \cdot (\omega c12 \cdot \omega c2)}{2 \cdot F_{\text{д}} \cdot dB} \right] + 4 \cdot \left[ \frac{(\omega c12 \cdot \omega c2)^2}{(2 \cdot F_{\text{д}})^2 \cdot dB^2} \right] \right] \cdot C0_k;$$

$$A_{2,k} := \left[ 6 \cdot \left( \frac{2 \cdot F_{\text{д}}}{dB} \right)^2 + (-2) \cdot \left[ 1 + \frac{2 \cdot (\omega c12 \cdot \omega c2)}{dB^2} \right] + 6 \cdot \left[ \frac{(\omega c12 \cdot \omega c2)^2}{(2 \cdot F_{\text{д}})^2 \cdot dB^2} \right] \right] \cdot C0_k;$$

$$A_{3,k} := \left[ (-4) \cdot \left( \frac{2 \cdot F_{\text{д}}}{dB} \right)^2 + 2 \cdot \left( \frac{-2 \cdot \sigma_k \cdot 2 \cdot F_{\text{д}}}{dB} \right) + (-2) \cdot \left[ \frac{-2 \cdot \sigma_k \cdot (\omega c12 \cdot \omega c2)}{2 \cdot F_{\text{д}} \cdot dB} \right] + 4 \cdot \left[ \frac{(\omega c12 \cdot \omega c2)^2}{(2 \cdot F_{\text{д}})^2 \cdot dB^2} \right] \right] \cdot C0_k;$$

$$A_{4,k} := \left[ \left( \frac{2 \cdot F_{\text{д}}}{dB} \right)^2 - \left( \frac{-2 \cdot \sigma_k \cdot 2 \cdot F_{\text{д}}}{dB} \right) + \left[ 1 + \frac{2 \cdot (\omega c12 \cdot \omega c2)}{dB^2} \right] - \left[ \frac{-2 \cdot \sigma_k \cdot (\omega c12 \cdot \omega c2)}{2 \cdot F_{\text{д}} \cdot dB} \right] + \left[ \frac{(\omega c12 \cdot \omega c2)^2}{(2 \cdot F_{\text{д}})^2 \cdot dB^2} \right] \right] \cdot C0_k.$$

В данном случае:

Блок № 1

$$B_{0,1} = 0,06527802; B_{1,1} = 0; B_{2,1} = -0,13055603; B_{3,1} = 0; B_{4,1} = 0,06527802;$$

$$A_{0,1} = 1; A_{1,1} = -2,92520672; A_{2,1} = 3,66251757; A_{3,1} = -2,33655434; A_{4,1} = 0,65819494.$$

Блок № 2

$$B_{0,2} = 0,0525718; B_{1,2} = 0; B_{2,2} = -0,1051436; B_{3,2} = 0; B_{4,2} = 0,0525718;$$

$$A_{0,2} = 1; A_{1,2} = -2,69104173; A_{2,2} = 2,94961679; A_{3,2} = -1,54652942; A_{4,2} = 0,33543104.$$



5. Алгоритм работы каждого блока выглядит следующим образом:

$$y_{j,k} := \left( \sum_{t=0}^4 B_{t,k} y_{j-t,k-1} - \sum_{t=1}^4 A_{t,k} y_{j-t,k} \right),$$

где  $y_{j,k}$  – выходной сигнал  $k$ -блока,  $y_{j,k-1}$  – входной сигнал  $k$ -блока.

Исходный входной сигнал фильтра обозначается  $y_{j,0}$ .

#### 5.4. Контрольные вопросы

1. Классификация фильтров. Основные характеристики фильтров.
2. Проектирование БИХ-фильтров методом билинейного преобразования: два метода синтеза.
3. Способы компенсации деформации частот при билинейном преобразовании.
4. Виды аппроксимации АФПНЧ. Критерии выбора фильтра-прототипа. Запись передаточной функции по полюсам и нулям (общий подход).
5. Аналоговые частотные преобразования при синтезе методом билинейного преобразования.

## 6. ЦИФРОВЫЕ КИХ-ФИЛЬТРЫ

При подготовке раздела использованы следующие источники: [2, 3, 5, 7, 13, 17, 18].

### 6.1. Синтез нерекурсивных фильтров методом весовых функций

#### 6.1.1. Описание метода

Синтез НРЦФ (КИХ-фильтров) выполняется по заданной идеализированной частотной характеристике фильтра  $H_d(j\cdot\omega)$  с нулевым запаздыванием, а также по допустимым погрешностям ее аппроксимации (рис. 6.1). Он заключается в поиске импульсной характеристики фильтра  $h_d(n)_N$  конечной длины  $N$ , являющейся коэффициентами его передаточной функции

$$H(z) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) \cdot z^{-m}. \quad (6.1)$$

Учитывая, что частотная характеристика и импульсная характеристика связаны парой преобразований Фурье, с помощью обратного преобразования Фурье может быть найдена импульсная характеристика  $h_d(n)$ , которая соответствует заданной идеализированной частотной характеристике:

$$h_d(n) = \frac{T_d}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} H_d(j \cdot \omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot n \cdot T_d} \cdot d\omega. \quad (6.2)$$

Однако импульсная характеристика (6.2) идеального фильтра имеет бесконечную длину и не отвечает условию физической реализуемости: при  $n < 0$   $h_d(n) \neq 0$  – отклик фильтра опережает входное воздействие.

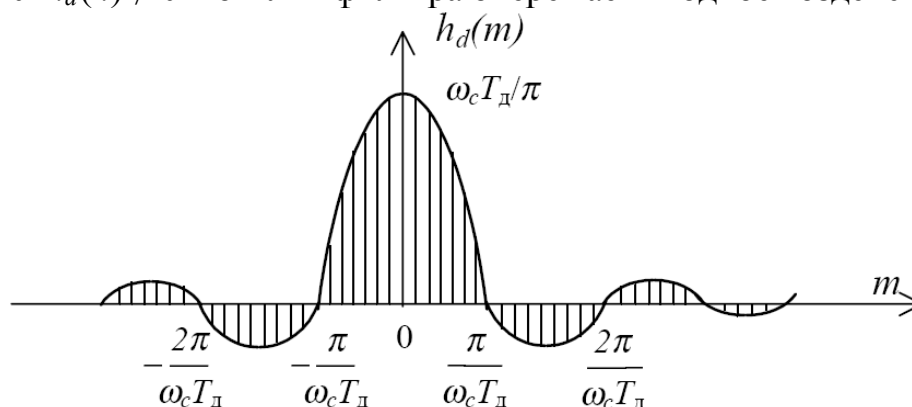


Рис. 6.1. Импульсная характеристика идеального ФНЧ

Поэтому она не может быть непосредственно использована в качестве импульсной характеристики НРЦФ.

Например, для цифрового ФНЧ в основной полосе частот  $\pm\omega_d/2$

$$H_d(j \cdot \omega) = \begin{cases} 1, & -\omega_c \leq -\omega \leq \omega_c; \\ 0, & \text{для других } \omega. \end{cases}$$

$$h_d(m) = \frac{T_d}{2 \cdot \pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} H_d(j\omega) e^{j \cdot \omega \cdot m \cdot T_d} d\omega = \frac{\omega_c T_d}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_c m T_d)}{\omega_c \cdot m \cdot T_d} = \frac{\lambda_c}{\pi} \cdot \frac{\sin(\lambda_c m)}{\lambda_c m}.$$

Аналитические описания импульсных характеристик других типов ЦФ приведены в п. 6.1.4.

Получить на основе импульсной характеристики (6.2) физически реализуемый КИХ-фильтр с частотной характеристикой, близкой к заданной, можно путем сдвига  $h_d(n)$  вправо на  $(N-1)/2$  отсчетов и усечения ее за пределами  $n < 0$  и  $n \geq N$ . При этом частотная характеристика фильтра аппроксимируется усеченным рядом Фурье с коэффициентами  $h_d[n - (N-1)/2]$ :

$$H(j \cdot \omega) = \sum_{m=0}^{N-1} h_d[m - (N-1)/2] \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot m \cdot T_d}. \quad (6.3)$$

Известно, что простое усечение ряда Фурье сопровождается **колебаниями Гиббса**, возникающими при аппроксимации разрывных функций.

Для улучшения качества аппроксимации в методе весовых функций импульсную характеристику НРЦФ конструируют ограничением длины импульсной характеристики  $h_d[n - (N-1)/2]$  с помощью специальных весовых функций или окон  $w(n)$  конечной длины  $N$ :

$$h(n) = h_d[n - (N-1)/2] \cdot w(n). \quad (6.4)$$

Простое усечение эквивалентно умножению на **прямоугольную весовую функцию**  $w_R(n) = 1, n = 0, \dots, N-1$ .

Полученной таким образом импульсной характеристике соответствует частотная характеристика фильтра

$$H(j \cdot \omega) = \sum_{m=0}^{N-1} h[m] \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot m \cdot T_d},$$

определяемая сверткой в частотной области заданной частотной характеристики  $H_d(j \cdot \omega)$  с частотной характеристикой (Фурье-образом) весовой функции  $W(j \cdot \omega)$ :

$$H(j \cdot \omega) = W(j \cdot \omega) * H_d(j \cdot \omega) = \frac{T_d}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} W(j \cdot \theta) \cdot H_d[j \cdot (\omega - \theta)] \cdot d\theta, \quad (6.5)$$

где  $*$  – символ свертки,  $\theta$  – переменная интегрирования,

$W(j \cdot \omega) = \sum_{m=0}^{N-1} w[m] \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot m \cdot T_d}$  – частотная характеристика весовой функции.

Данные преобразования во временной и частотной области иллюстрируются графиками рис. 6.2, достаточно наглядно отражающими влияние весового усечения на качество аппроксимации заданной частотной характеристики усеченным рядом Фурье.

Частотная характеристика весовой функции на рис. 6.2 имеет главный лепесток шириной  $\Delta\omega_{\text{гл}}$  и боковые лепестки, уровень которых характеризуется максимальным по модулю значением  $\delta_{\text{бл. max}}$  и площадью под боковыми лепестками. Свертка в частотной области осуществляется графически путем смещения по частоте в пределах  $\pm\omega_d/2$  зеркально отображенной частотной характеристики весовой функции и вычисления площади перекрытия ее с заданной частотной характеристикой  $H_d(j\omega)$ .

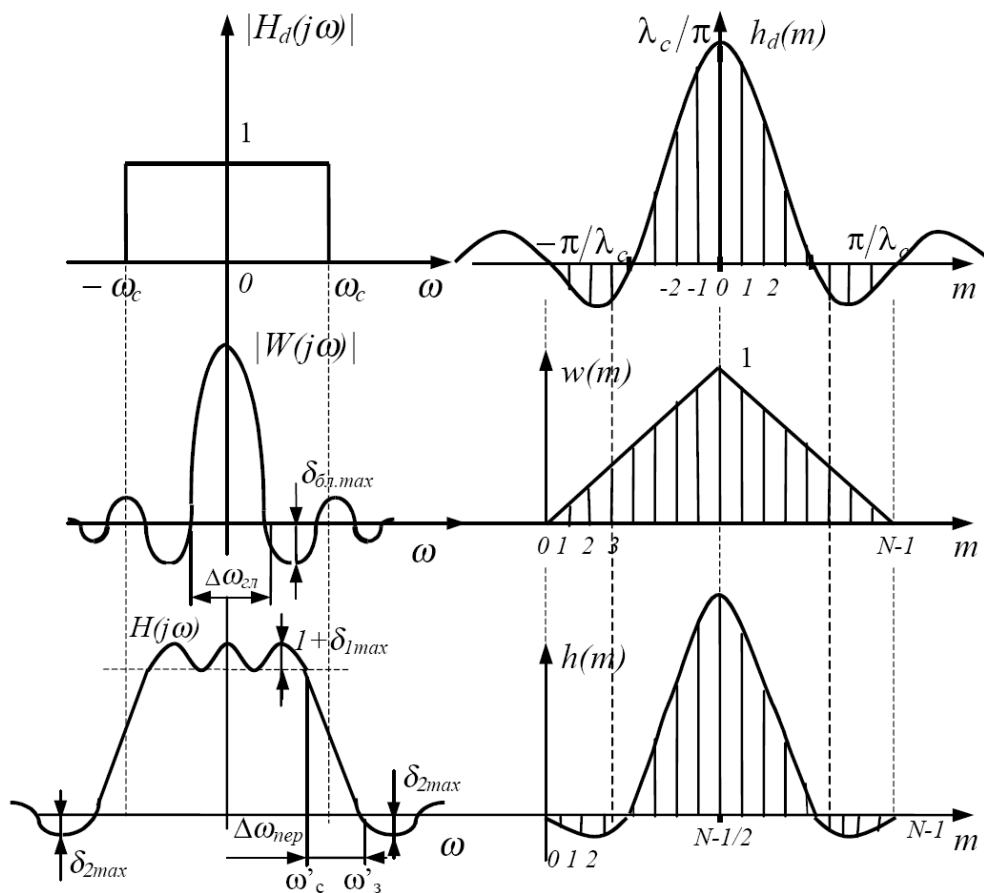


Рис. 6.2. Графическая иллюстрация синтеза НРЦФ методом весовых функций

Из рисунка следует, что переходная полоса частотной характеристики фильтра  $H(j\omega)$  определяется шириной главного лепестка частотной характеристики весовой функции:  $\Delta\omega_{\text{пер}} \approx \Delta\omega_{\text{гл}}$ , а погрешности аппроксимации (пульсации) в полосе пропускания и задерживания  $\delta_1$ ,  $\delta_2$

связаны с уровнем ее боковых лепестков. Это определяет требования к весовой функции, которая должна иметь минимальные значения следующих параметров:

- ширины главного лепестка  $\Delta\omega_{\text{гл}}$ ;
- уровня боковых лепестков  $\delta_{\text{бл. max}}$  и площади под боковыми лепестками;
- длины  $N$ .

Требования эти достаточно противоречивы. Так, более гладкие весовые функции имеют меньший уровень боковых лепестков, но большую ширину главного лепестка, уменьшающуюся с увеличением длины весовой функции  $N$ . Этим объясняется многообразие используемых на практике типов весовых функций. Рассмотрим параметры и математические описания некоторых из них.

### 6.1.2. Свойства весовых функций

В табл. 6.1 приведены используемые при синтезе ЦФ параметры таких весовых функций: прямоугольной, треугольной, Ханна, Хэмминга и Блэкмана.

Кроме значений ширины главного лепестка  $\Delta\omega_{\text{гл}} = D \cdot \omega_{\text{д}} / N$  (где  $D$  – так называемый  $D$ -фактор) и максимального уровня боковых лепестков  $\delta_{\text{бл. max}}$ , они включают в себя также оценочные значения погрешности аппроксимации частотной характеристики в полосе задерживания (максимальные пульсации частотной характеристики)  $|\delta_{2\text{max}}|$ , дБ, рассчитанные для цифрового ФНЧ с частотой среза  $\lambda_{\text{с}} = \pi / 4$  [14]. Такие же погрешности имеют место и при синтезе ФВЧ.

Для ЦФ с двумя и более частотами среза (ППФ, ПЗФ, МПФ) в зависимости от конкретных данных погрешность аппроксимации может быть больше ее оценочного значения, но не более чем на 6 дБ.

Таблица 6.1

Тип	$\Delta\omega_{\text{гл}}$	$\delta_{\text{бл. max}}$ , дБ	$\delta_{2\text{max}}$ , дБ
Прямоугольная	$2 \cdot \omega_{\text{д}} / N$	-13,6	-21
Треугольная	$4 \cdot \omega_{\text{д}} / N$	-27	-26
Ханна	$4 \cdot \omega_{\text{д}} / N$	-31	-44
Хэмминга	$4 \cdot \omega_{\text{д}} / N$	-41	-53
Блэкмана	$6 \cdot \omega_{\text{д}} / N$	-57	-74

Руководствуясь данными табл. 6.1, можно по требуемому затуханию частотной характеристики в полосе задерживания  $A_3$  сделать выбор типа весовой функции.

**Простейшая весовая функция – прямоугольная** – имеет минимальную ширину главного лепестка и максимальный уровень боковых лепестков.

$$w_R(n) = 1, n = 0, \dots, N-1. \quad (6.6)$$

Частотная характеристика ее (рис. 6.3, а) определяется выражением

$$W_R(j \cdot \omega) = e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{N-1}{2} \cdot T_d} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot \frac{N}{2} \cdot T_d)}{\sin(\omega \cdot \frac{1}{2} \cdot T_d)}. \quad (6.7)$$

Боковые лепестки весовой функции имеют ширину  $\Delta\omega_{\text{бл}} = \omega_d / N$ , или  $\Delta\lambda_{\text{бл}} = 2 \pi / N$ . При  $\lambda = 0$   $|W_R(j\lambda)| = N$ .

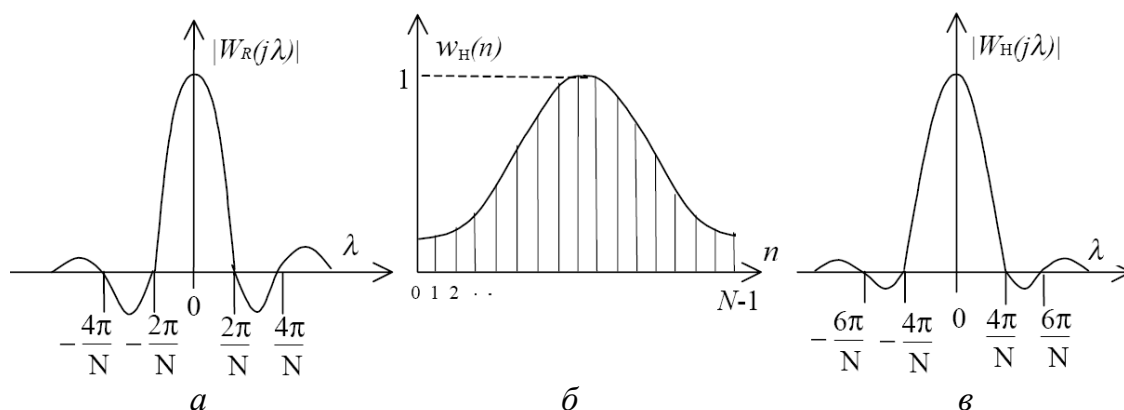


Рис. 6.3. Частотная характеристика прямоугольной весовой функции (а), весовая функция Хэмминга (б) и ее частотная характеристика (в)

**Треугольная весовая функция** является сверткой двух прямоугольных весовых функций длиной  $N/2$ :

$$w_T(n) = w_R(n) * w_R(n) = \begin{cases} \frac{2 \cdot n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}; \\ 2 - \frac{2 \cdot n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} < n \leq N-1. \end{cases} \quad (6.8)$$

У нее вдвое большая ширина главного лепестка при достаточно большом уровне боковых лепестков.

Частотная характеристика треугольной весовой функции равна квадрату частотной характеристики прямоугольной весовой функции половинной длины:

$$|W_T(j \cdot \omega)| = \frac{\sin^2(\omega \cdot \frac{N}{4} \cdot T_d)}{\sin^2(\omega \cdot \frac{1}{2} \cdot T_d)}. \quad (6.9)$$

Боковые лепестки ее имеют ширину  $\Delta\omega_{\text{бл}} = 2 \cdot \omega_d / N$ , или  $\Delta\lambda_{\text{бл}} = 4 \cdot \pi / N$ .

**Обобщенная весовая функция Хэмминга** описывается выражением

$$w_H(n) = \alpha - (1 - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N - 1}\right). \quad (6.10)$$

При  $\alpha = 0,5$  она соответствует **весовой функции Ханна**, при  $\alpha = 0,54$  – **весовой функции Хэмминга** (рис. 6.3, б).

Уровень боковых лепестков весовой функции Хэмминга оказывается приемлемым для многих приложений НРЦФ.

Частотную характеристику весовой функции Хэмминга (рис. 6.3, в) можно представить суммой трех частотных характеристик прямоугольных весовых функций с центральными частотами  $\omega_0 = 0$  и  $\omega_0 = \pm \omega_d / N$ :

$$W_H(j\omega) = \alpha W_R(j\omega) + \frac{1 - \alpha}{2} W_R\left[j(\omega T_d - \frac{2\pi}{T_d})\right] + \frac{1 - \alpha}{2} W_R\left[j(\omega T_d + \frac{2\pi}{T_d})\right]. \quad (6.11)$$

Боковые лепестки частотной характеристики имеют ширину  $\Delta\omega_{\text{бл}} = \omega_d / N$ , или  $\Delta\lambda_{\text{бл}} = 2 \cdot \pi / N$ . Площадь под боковыми лепестками составляет 0,04 % от площади квадрата частотной характеристики весовой функции.

**Весовая функция Блэкмана** имеет вид

$$w_B(n) = 0,42 - 0,5 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N - 1}\right) + 0,08 \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot n}{N - 1}\right). \quad (6.12)$$

По сравнению с весовой функцией Хэмминга у нее более широкий главный лепесток (в 1,5 раза) при очень малом уровне боковых лепестков.

Частотная характеристика весовой функции Блэкмана по сравнению с весовой функцией Хэмминга содержит два дополнительных слагаемых  $0,04 \cdot W_R[j(\omega \pm 2 \cdot \omega_d / N)]$ . Ширина боковых лепестков этой весовой функции  $\Delta\omega_{\text{бл}} = \omega_d / N$ , или  $\Delta\lambda_{\text{бл}} = 2 \cdot \pi / N$ .

При синтезе НРЦФ используются также эффективные весовые функции Ланцоша, Дольфа-Чебышева, Каппелини, и др. [17, 18], среди которых особое значение имеет класс весовых функций или окон Кайзера.

### 6.1.3. Весовые функции Кайзера

В отличие от других весовых функций, характеризующихся постоянными значениями уровня боковых лепестков  $\delta_{\text{бл. max}}$  и отношения

$$D = \frac{\Delta f_{\text{гл}}}{f_d} \cdot N = \frac{\Delta f_{\text{пер}}}{f_d} \cdot N \quad (D\text{-фактор}),$$

у весовых функций Кайзера эти параметры могут широко варьироваться с помощью **коэффициента  $\beta$** , входящего в математическое выражение этой функции:

$$w_C(n) = I_0 \left[ \beta \cdot \sqrt{1 - \left[ \frac{2 \cdot n}{N - 1} \right]^2} \right] / I_0[\beta], \quad (6.13)$$

где  $I_0(x)$  – функция Бесселя нулевого порядка.

Благодаря этому обеспечивается наилучшее для данного метода синтеза качество аппроксимации заданной частотной характеристики или наименьший порядок фильтра при заданном качестве аппроксимации.

Кайзером путем численного интегрирования свертки составлена таблица (табл. 6.2) и получены эмпирические формулы, которые позволяют непосредственно по заданному затуханию  $A_3 = |\delta_{2\max}|$  (дБ) частотной характеристики  $H(j\omega)$ , аппроксимирующей идеальный ФНЧ, выбрать или рассчитать значения  $D$ -фактора и коэффициенты  $\beta$  [2]:

$$D \approx \frac{A_3 - 7,95}{14,36} \text{ при } A_3 > 21 \text{ дБ; } D = 0,9222 \text{ при } A_3 < 21 \text{ дБ;}$$

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{при } A_3 \leq 21 \text{ дБ;} \\ 0,5842 \cdot (A_3 - 21)^{0,4} + 0,07886 \cdot (A_3 - 21) & \text{при } 21 < A_3 < 50 \text{ дБ;} \\ 0,1102 \cdot (A_3 - 8,7) & \text{при } A_3 \geq 50 \text{ дБ.} \end{cases}$$

По вычисленному или взятому из таблицы значению  $D$  определяется необходимый порядок фильтра  $N \approx D \cdot f_d / \Delta f_{\text{пер}}$ , который округляется затем до ближайшего большего нечетного числа.

Как и для других весовых функций, в случае аппроксимации идеальных фильтров типа ППФ, ПЗФ, МПФ затухание частотной характеристики в полосе задерживания может быть меньше его табличного значения, но не более чем на 6 дБ.

Таблица 6.2

$A_3$ , дБ	$\beta$	$D$	$A_3$ , дБ	$\beta$	$D$
25	1,333	1,187	65	6,204	3,973
30	2,117	1,536	70	6,755	4,321
35	2,783	1,884	75	7,306	4,669
40	3,395	2,232	80	7,857	5,017
45	3,975	2,580	85	8,408	5,366
50	4,551	2,928	90	8,959	5,714
55	5,102	3,261	95	9,501	6,062
60	5,653	3,625	100	10,061	6,410

В табл. 6.3 приведены также расчетные значения уровня пульсаций частотной характеристики в полосе пропускания, соответствующие различным значениям затухания в полосе задерживания [2].

Таблица 6.3

$A_3$ , дБ	$1 \pm \delta_{1\max}$ , дБ	$A_3$ , дБ	$1 \pm \delta_{1\max}$ , дБ
30	$\pm 0,27$	70	$\pm 0,0027$
40	$\pm 0,086$	80	$\pm 0,00086$
50	$\pm 0,027$	90	$\pm 0,00027$
60	$\pm 0,0086$	100	$\pm 0,000086$



### 6.1.4. Импульсные характеристики идеальных ЦФ различного типа

Аналитические описания импульсных характеристик ЦФ различного типа получаются в общем случае путем выполнения обратного преобразования Фурье их идеализированных частотных характеристик ЧХ  $H_d(j \cdot \omega)$ .

Для идеального цифрового ФНЧ, как показано выше, импульсная характеристика определяется выражением:

$$h_d(0) = \frac{\lambda_c}{\pi}; h_d(n) = \frac{\lambda_c}{\pi} \cdot \frac{\sin(\lambda_c \cdot n)}{\lambda_c \cdot n}, n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.14)$$

Для идеального всепропускающего фильтра (ВПФ) сигнал на выходе совпадает с сигналом на входе:

$$y(n) = x(n); h_d(0) = 1; h_d(n) = 0 \text{ при } n \neq 0; \quad (6.15)$$

$$H_d(j \cdot \omega) = 1 \text{ при } |\omega| \leq \omega_d / 2.$$

Импульсные характеристики ЦФ типов ФВЧ, ПФ (полосового), РФ (режекторного) и МПФ (многополосного) могут быть выражены через импульсные характеристики цифрового ФНЧ и ВПФ:

$$H_d(j \cdot \omega)_{\text{ФВЧ}} = H_d(j \cdot \omega)_{\text{ВПФ}} - H_d(j \cdot \omega)_{\text{ФНЧ}}; \quad (6.16)$$

$$H_d(j \cdot \omega)_{\text{ПФ}} = H_d(j \cdot \omega)_{\text{ФНЧ}_2} - H_d(j \cdot \omega)_{\text{ФНЧ}_1}; \quad (6.17)$$

$$H_d(j \cdot \omega)_{\text{РФ}} = H_d(j \cdot \omega)_{\text{ВПФ}} - H_d(j \cdot \omega)_{\text{ФНЧ}_2} + H_d(j \cdot \omega)_{\text{ФНЧ}_1}, \quad (6.18)$$

где  $H_d(j \cdot \omega)_{\text{ФНЧ}}$ ,  $H_d(j \cdot \omega)_{\text{ФНЧ}_1}$  и  $H_d(j \cdot \omega)_{\text{ФНЧ}_2}$  – частотные характеристики идеальных ФНЧ с частотами среза  $\lambda_c$ ,  $\lambda_{c1}$ ,  $\lambda_{c2}$ , ( $\lambda_{c2} > \lambda_{c1}$ ), соответствующими частотам среза ФВЧ, ПФ и РФ.

Такая же связь справедлива и для импульсных характеристик, что позволяет непосредственно записать соответствующие им аналитические выражения:

$$h_d(0)_{\text{ФВЧ}} = 1 - \frac{\lambda_c}{\pi}; h_d(n)_{\text{ФВЧ}} = -\frac{\lambda_c}{\pi} \cdot \frac{\sin(\lambda_c \cdot n)}{\lambda_c \cdot n}; n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.19)$$

$$h_d(0)_{\text{ПФ}} = \frac{\lambda_{c2}}{\pi} - \frac{\lambda_{c1}}{\pi}; h_d(n)_{\text{ПФ}} = \frac{\sin(\lambda_{c2} \cdot n)}{\pi \cdot n} - \frac{\sin(\lambda_{c1} \cdot n)}{\pi \cdot n}; \quad (6.20)$$

$$h_d(0)_{\text{РФ}} = 1 - \frac{\lambda_{c2}}{\pi} + \frac{\lambda_{c1}}{\pi}; h_d(n)_{\text{РФ}} = \frac{\sin(\lambda_{c1} \cdot n)}{\pi \cdot n} - \frac{\sin(\lambda_{c2} \cdot n)}{\pi \cdot n}. \quad (6.21)$$

Аналогичным образом находятся соотношения и для конкретного МПФ.

### 6.1.5. Методика синтеза НРЦФ методом весовых функций

**Шаг 1.** По заданному значению затухания частотной характеристики в полосе задерживания  $A_3$  с помощью табл. 6.1 выбирается тип весовой функции, отвечающей условию  $|\delta_{2\max}| \geq A_3$ , дБ, при минимальном значении ширины ее главного лепестка, т. е. параметра  $D$ .

При использовании весовой функции Кайзера по табл. 6.2 находятся соответствующие заданному затуханию  $A_3$  параметры данной весовой функции  $\beta$  и  $D$ .

При этом нужно учитывать, что расчетное значение затухания зависит от вида АЧХ синтезируемого фильтра, его граничных частот и длины весовой функции  $N$  и может оказаться как больше, так и меньше оценочного значения  $\delta_{2\max}$ . Чем сложнее АЧХ фильтра (ПФ, РФ, МПФ), тем меньше затухание для одной и той же весовой функции. Это же относится и к неравномерности АЧХ в полосе пропускания.

**Шаг 2.** Для выбранной весовой функции и заданной переходной полосы частотной характеристики фильтра  $\Delta f_{\text{пер}} = |f_3 - f_c|_{\min}$  в соответствии с приближенным соотношением  $\Delta f_{\text{гл}} = \Delta f_{\text{пер}} = D \cdot f_d / N$  находится необходимая длина весовой функции и определяемая ею длина импульсной характеристики фильтра:  $N \geq D \cdot f_d / \Delta f_{\text{пер}}$ , где  $D$  – коэффициент, зависящий от типа весовой функции ( $D$ -фактор), см. табл. 6.1, 6.2.

Значение  $N$  приравнивается ближайшему целому числу, обычно нечетному.

**Шаг 3.** С помощью обратного преобразования Фурье

$$h_d(m) = \frac{T_d}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} H_d(j \cdot \omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot m \cdot T_d} \cdot d\omega$$

или приведенных выше аналитических выражений вычисляется смещенная вправо импульсная характеристика

$$h_d(m - (N - 1) / 2), m = 0, \dots, N - 1,$$

соответствующая заданной частотной характеристике  $H_d(j \cdot \omega)$ .

При этом в качестве частот среза заданной частотной характеристики используют их расчетные значения  $f_{\text{ср}}$ , смещенные в полосу задерживания примерно на половину переходной полосы фильтра  $\Delta f_{\text{пер}}$ . Это связано со свойственным данному методу размыванием границ перехода от полосы пропускания фильтра к полосе задерживания (рис. 6.3). Например, для ПФ

$$f_{c1p} \approx f_{c1} - \Delta f_{\text{пер}} / 2; f_{c2p} \approx f_{c2} + \Delta f_{\text{пер}} / 2.$$

**Шаг 4.** Находится импульсная характеристика фильтра путем весового усечения смещенной вправо на  $(N - 1) / 2$  отсчетов импульсной характеристики  $h_d(m)$ :

$$h(m) = h_d[m - (N - 1) / 2] \cdot w(m), m = 0, 1, \dots, N - 1.$$

**Шаг 5.** Рассчитывается АЧХ фильтра:

$$H(j \cdot \omega) = \sum_{m=0}^{N-1} h[m] \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot m \cdot T_d},$$

и проверяется ее соответствие исходным данным по неравномерности частотной характеристики в полосе пропускания  $A_{\text{п}}$  и затуханию в полосе задерживания  $A_{\text{з}}$ .

**Шаг 6.** Так как данный метод не обеспечивает точного соответствия исходных и расчетных данных (**является итерационным**), при необходимости корректируются значения расчетных частот среза  $f_{c1p}$ ,  $f_{c2p}$  и длины фильтра  $N$ , и расчеты повторяются.

**Шаг 7.** Находится минимально необходимая разрядность значений импульсной характеристики  $h(m)$  (коэффициентов фильтра, реализуемого на основе ДВС), при которой расчетная АЧХ еще удовлетворяет заданным требованиям.

**Шаг 8.** Выбирается способ реализации НРЦФ (на основе ДВС или ДПФ), и решаются соответствующие ему задачи реализации.

Следует отметить, что метод весовых функций обеспечивает строгую линейность ФЧХ и постоянство группового времени запаздывания фильтра ввиду четной или нечетной симметрии получаемой этим методом импульсной характеристики  $h(m) = h(N - 1 - m)$  (см. п. 2.13, 2.14).

## 6.2. Синтез нерекурсивных фильтров методом частотной выборки

### 6.2.1. Описание метода

В методе частотной выборки импульсная характеристика фильтра  $h(n)_N$  находится путем дискретизации по частоте заданной частотной характеристики  $H_d(j \cdot \omega)$  и вычисления ее обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ).

Дискретизация частотной характеристики  $H_d(j \cdot \omega)$  по частоте осуществляется в полосе  $0 \dots \omega_d$  путем перехода от непрерывных значений частоты  $\omega$  к дискретным:  $\omega_k = \Delta\omega \cdot k$ , где  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ ;  $\Delta\omega = \omega_d / N$  – шаг дискретизации;  $k$  – номер частотной выборки;  $N$  – число точек дискретизации. Расположение частот выборок на окружности  $e^{j \cdot \omega_k \cdot T_d}$  комплексной  $Z$ -плоскости для четного и нечетного значений  $N$  показано на рис. 6.4.

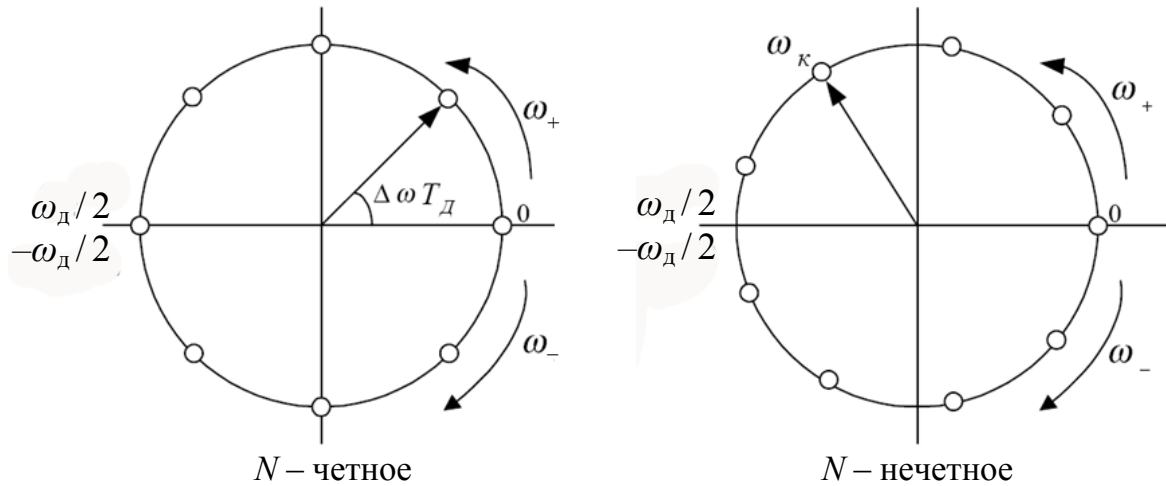


Рис. 6.4. Расположение точек дискретизации ЧХ на комплексной плоскости

**Шаг дискретизации** по частоте  $\Delta\omega$  выбирается из условия  $\Delta\omega \leq \Delta\omega_{\text{пер}} / (L + 1)$ , где  $L$  – целые числа,  $L = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\Delta\omega_{\text{пер}}$  – переходная полоса фильтра.

В результате получается дискретизированная частотная характеристика фильтра (ДЧХ)  $H_d(j \cdot \omega_k) = H_d(j \cdot \omega)|_{\omega=\omega_k}$  (рис. 6.5). Так как заданная частотная характеристика соответствует физически нереализуемому фильтру с нулевым запаздыванием, то для ЦФ со ступенчатообразными АЧХ дискретизированная частотная характеристика отождествляется далее с их дискретизированной АЧХ.

Дискретизация частотной характеристики на рис. 6.5 выполнена с шагом  $\Delta\omega = \Delta\omega_{\text{пер}} / 2 (L = 1)$ .

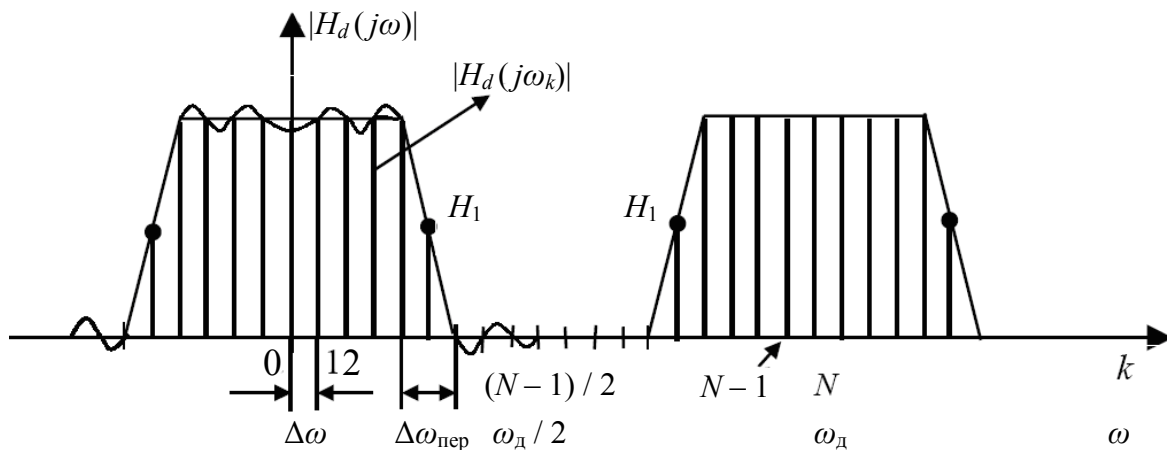


Рис. 6.5. Дискретизированная ЧХ цифрового фильтра нижних частот

ДЧХ имеет значения, равные в полосе пропускания 1 ( $H_d(j \cdot \omega_k) = 1$ ), в полосе задерживания – нулю ( $H_d(j \cdot \omega_k) = 0$ ) и в переходной полосе – некоторым промежуточным варьируемым (оптимизируемым) значениям

$H_d(j \cdot \omega_k) = H_1 = \text{var}$ , от которых зависит качество аппроксимации заданной частотной характеристики.

ДЧХ  $H_d(j \cdot \omega_k)$  можно поставить в соответствие некоторую импульсную характеристику  $h_p(m)$ , определяемую с помощью обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ), получаемого путем дискретизации по частоте общего выражения для импульсной характеристики  $h_d(m)$ . Она соответствует заданной (непрерывной) частотной характеристике  $H_d(j \cdot \omega)$ :

$$h_d(m) = \frac{T_d}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{\omega_d} H_d(j \cdot \omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot m \cdot T_d} d\omega.$$

Выполняя замены:  $\omega \rightarrow \omega_k$ ;  $d\omega \rightarrow \Delta\omega = \omega_d / N$ ;  $\int \rightarrow \sum_{k=0}^{N-1}$ , получим импульсную характеристику  $h_p(m)$ :

$$h_p(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(j\omega_k) e^{j\omega_k \cdot m \cdot T_d} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(j\omega_k) e^{j\omega_k \cdot (m+i \cdot N) \cdot T_d},$$

где  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$

Индекс  $p$  означает, что эта импульсная характеристика является периодической с периодом  $N_p = N$ , т. к. дискретизации в частотной области соответствует периодизация во временной области (рис. 6.6).

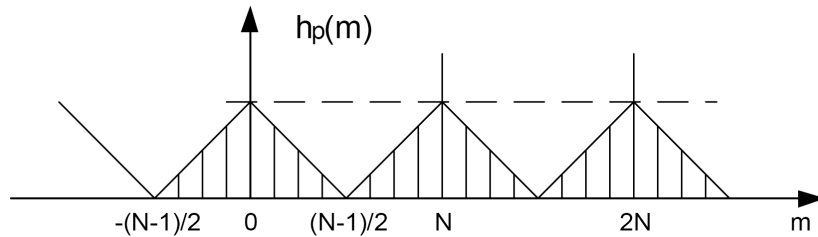


Рис. 6.6. Импульсная характеристика, соответствующая ДЧХ

В качестве импульсной характеристики синтезируемого методом частотной выборки НРЦФ выбирается один период импульсной характеристики  $h_p(m)$ , сдвинутый вправо на  $(N - 1) / 2$  отсчетов (для обеспечения физической реализуемости) и усеченный прямоугольной весовой функцией (для получения КИХ-фильтра) (рис. 6.7):

$$h(m) = h_p\left(m - \frac{N-1}{2}\right), m = 0, 1, \dots, N-1.$$

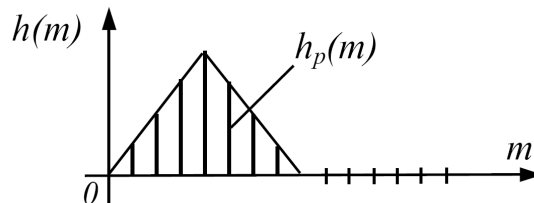


Рис. 6.7. Импульсная характеристика НРЦФ, синтезированного методом частотной выборки

По импульсной характеристике  $h(m)$  находится частотная характеристика фильтра  $H(j \cdot \omega)$ , аппроксимирующая заданную:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \sum_{m=0}^{N-1} h(m) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot m \cdot T_d} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} H_d(j\omega_k) \sum_{m=0}^{N-1} e^{j \cdot \omega_k \cdot m \cdot \frac{N-1}{2} T_d} e^{-j \cdot \omega \cdot m \cdot T_d} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} H_d(j\omega_k) \cdot e^{-j \cdot \omega_k \cdot \left(\frac{N-1}{2}\right) \cdot T_d} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j \cdot (\omega - \omega_k) \cdot m \cdot T_d} = \\ &= e^{-j \cdot \omega \cdot \left(\frac{N-1}{2}\right) \cdot T_d} \cdot \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} H_d(j\omega_k) \cdot \frac{\sin \left[ \frac{(\omega - \omega_k) \cdot N \cdot T_d}{2} \right]}{\sin \left[ \frac{(\omega - \omega_k) \cdot T_d}{2} \right]} \end{aligned}$$

(при выводе использовано выражение для суммы конечного числа членов геометрической прогрессии).

В этом выражении множитель  $e^{-j \cdot \omega \cdot \left(\frac{N-1}{2}\right) \cdot T_d}$  определяет ФЧХ фильтра:  $\varphi(\omega) = -\omega \cdot \frac{N-1}{2} \cdot T_d$ , которая строго линейна вследствие симметрии импульсной характеристики.

АЧХ фильтра на частотах  $\omega = \omega_k$ :  $H(\omega_k) = H_d(\omega_k)$  точно совпадает с частотными выборками ДЧХ, а на частотах  $\omega \neq \omega_k$   $H(\omega) \neq H_d(\omega)$  – отличается от заданной на величину погрешности аппроксимации.

**Качество аппроксимации в данном методе зависит от числа выборок частотной характеристики в переходной полосе  $L$  и их значений  $H_{i, \text{опт}}$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ), делающих аппроксимируемую функцию более гладкой.**

Различным значениям  $L$  соответствуют следующие примерные значения максимального уровня боковых лепестков:

$$\begin{aligned} L = 0: \delta_{2\text{max}} &\approx -20 \text{ дБ}; \\ L = 1: \delta_{2\text{max}} &\approx -40 \text{ дБ}; \\ L = 2: \delta_{2\text{max}} &\approx -50-60 \text{ дБ}; \\ L = 3: \delta_{2\text{max}} &\approx -80-100 \text{ дБ}. \end{aligned}$$

Реально методом частотной выборки можно синтезировать НРЦФ с минимальным затуханием в полосе задерживания до (90–120) дБ.

Таким образом, оптимизация фильтра заключается в выборе  $L$  – числа выборок в переходной полосе, и поиске их оптимальных значений  $H_{i, \text{опт}}$ , минимизирующих погрешности аппроксимации. Очевидно, что с увеличением числа варьируемых выборок существенно усложняется процедура оптимизации. Она достаточно эффективно реализуется на ЭВМ методом линейного программирования.

### 6.2.2. Методика синтеза НРЦФ методом частотной выборки

**Шаг 1.** По значению заданного затухания в полосе задерживания  $A_3$  выбирается число варьируемых отсчетов  $L$  частотной характеристики в переходной полосе. Например, при  $A_3 \leq 40$  дБ  $L = 1$ .

Чем сложнее АЧХ фильтра, тем меньше затухание при данном значении  $L$ .

**Шаг 2.** Для принятого значения  $L$  и заданной переходной полосы  $\Delta f_{\text{пер}} = |f_3 - f_c|$  находим шаг дискретизации частотной характеристики по частоте  $\Delta f = \frac{\Delta f_{\text{пер}}}{L+1}$  и число точек дискретизации  $N = \frac{f_d}{\Delta f} = (L+1) \cdot \frac{f_d}{\Delta f_{\text{пер}}}$ .

Приравниваем  $N$  к ближайшему целому числу, обычно нечетному.

**Шаг 3.** Дискретизируем заданную частотную характеристику  $H_d(j\omega)$  с шагом  $\Delta f$ , в результате чего получаем ДЧХ  $H_d(j\omega_k)$ ;  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Определяем номера  $k$  единичных, нулевых и варьируемых частотных выборок.

Задаем начальные значения  $H_{i.\text{нач}}$  оптимизируемых частотных выборок в каждой переходной полосе, например путем линейной интерполяции АЧХ между ее граничными частотами среза и задерживания.

**Шаг 4.** Рассчитываем частотную характеристику  $H(j\omega)$  и находим значения  $H_{i.\text{опт}}$ , при которых частотная характеристика удовлетворяет заданным требованиям.

Например, для ФНЧ

при  $L = 1, N = 33$  значение  $H_{1.\text{опт}} = 0,3904, \delta_{2\text{max}} = -40$  дБ;

при  $L = 2, N = 65$   $H_{1.\text{опт}} = 0,588, H_{2.\text{опт}} = 0,1065, \delta_{2\text{max}} < -60$  дБ.

**Шаг 5.** Рассчитываем импульсную характеристику НРЦФ с учетом симметрии частотной характеристики:

$$h(n) = \frac{H_d(0)}{N} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{K_B} 2 \cdot |H_d(j\omega_k)| \cdot \cos \left[ \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \cdot \omega_k \cdot T_d \right], \quad (6.22)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ;  $K_B = (N-1)/2$  при нечетном  $N$ , и  $K_B = (N/2) - 1$  – при четном.

**Шаг 6.** Выбираем способ реализации НРЦФ (ДВС или ДПФ).

### 6.3. Контрольные вопросы

1. Методы проектирования КИХ- и БИХ-фильтров (классификация).
2. Принципы расчета КИХ-фильтров методом оконных функций.
3. Свойства прямоугольной весовой функции: АЧХ, импульсная характеристика.
4. Характеристики идеальных ЦФ.
5. Принципы расчета КИХ-фильтров методом частотной выборки.

## 7. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

### 7.1. Критерии численного синтеза цифровых фильтров

Численные или оптимальные методы синтеза ЦФ реализуются на ЭВМ с помощью процедур непосредственной аппроксимации заданных частотных характеристик фильтра в соответствии с определенными критериями минимизации ошибок аппроксимации. При этом частотные характеристики фильтра могут иметь произвольную форму. Основными при аппроксимации БИХ- и КИХ-фильтров являются критерии **минимума среднего квадрата ошибки (СКО)** и **наилучшего чебышевского равноволнового приближения (минимаксный критерий)**.

Целевая функция алгоритма минимизации СКО определяется выражением

$$E = \sum_{i=1}^M \left[ |H(j \cdot \omega_i)| - |H_d(j \cdot \omega_i)| \right]^2, \quad (7.1)$$

где  $H_d(j \cdot \omega_i)$ ,  $H(j \cdot \omega_i)$  – заданная и аппроксимирующая частотные характеристики фильтра, вычисляемые на дискретном множестве частот  $\omega_i$ . Эта функция нелинейна относительно коэффициентов фильтра.

Минимаксный критерий заключается в минимизации на множестве частот максимальных значений взвешенного функционала ошибки:

$$E(\omega) = W(\omega) \cdot |H(j \cdot \omega) - H_d(j \cdot \omega)|, \quad (7.2)$$

где  $W(\omega)$  – положительная весовая функция.

Поиск оптимальных значений коэффициентов фильтра при численной аппроксимации осуществляется методами: наименьших квадратов, линейного программирования, нелинейной оптимизации (алгоритм Флетчера-Пауэлла для БИХ-фильтров) и многократной замены Ремеза (для фильтров с чебышевской аппроксимацией КИХ- и БИХ-типа). Для них имеются эффективные компьютерные программы, например программа Макклемана синтеза оптимальных по критерию Чебышева КИХ-фильтров, универсальные программы синтеза ЦФ **FDAS2K**, **DFDP**, пакет **Signal** системы **MatLAB** и др.

Для численного синтеза КИХ- и БИХ-фильтров используются также методы соответственно прямого и обратного адаптивного моделирования, имеющие программные реализации.



При синтезе ЦФ численными методами учитываются обязательные условия линейности ФЧХ КИХ-фильтров и обеспечения устойчивости БИХ-фильтров.

Синтезированные численными методами оптимальные ЦФ имеют наименьшую (среднеквадратическую или максимальную) погрешность аппроксимации при заданном порядке фильтра или наименьший порядок при заданной (допустимой) погрешности аппроксимации.

Для КИХ-фильтров нижних частот с оптимальной чебышевской аппроксимацией требуемую длину импульсной характеристики  $N$  можно определить по заданным допускам на погрешности аппроксимации с помощью эмпирической формулы, приводимой в [13].

## 7.2. Контрольные вопросы

1. Проектирование цифровых фильтров численными методами: критерии аппроксимации, дополнительные факторы, учитываемые при расчете.
2. Сформулировать критерий минимума среднего квадрата ошибки (СКО).
3. Сформулировать критерий наилучшего чебышевского равноволнового приближения.

## 8. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

При подготовке раздела использованы следующие источники: [2, 3, 5, 7, 19, 20, 21].

### 8.1. Определение и свойства ДПФ

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ), иллюстрируемое рис. 8.1, соответствует выборкам **непрерывного преобразования Фурье** (или спектра)  $X(j \cdot \omega)$  дискретной последовательности  $x(n)$  конечной длины  $N_1$ , вычисленным на дискретных равностоящих частотах  $\omega_k = k \Delta\omega$ :

$$\text{ДПФ}_N[x(n)] = X(j \cdot \omega)|_{\omega=\omega_k} = \sum_{n=0}^{N_1-1} x(n) \cdot e^{-j \cdot \omega_k \cdot n \cdot T_d}, \quad (8.1)$$

где  $\Delta\omega = \omega_d / N$  – шаг дискретизации по частоте;  $N$  – число вычисляемых частотных выборок ДПФ в полосе частот  $\{0 - \omega_d\}$ , в общем случае не равное  $N_1$ ;  $k = 0, 1, \dots, N-1$  – номер частотной выборки.

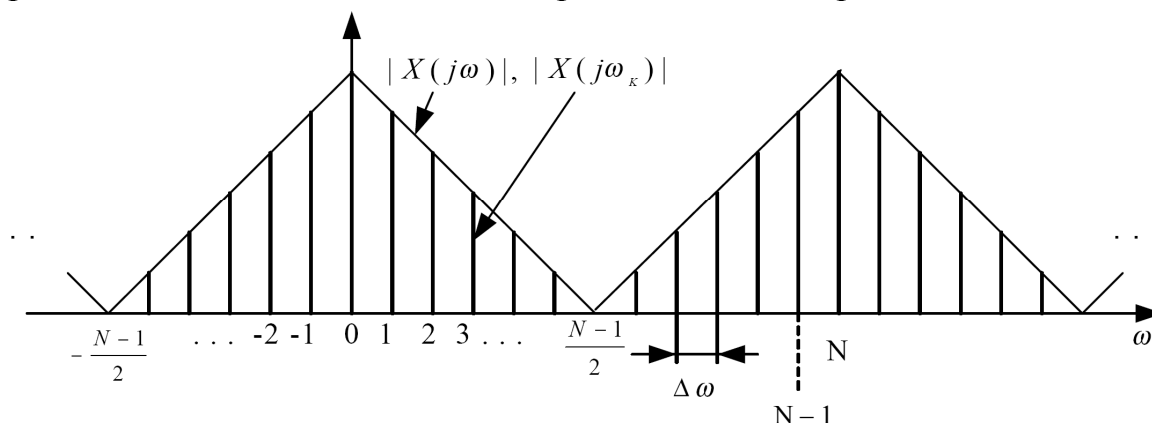


Рис. 8.1. Дискретизация сигнала в частотной области

Выбор шага дискретизации по частоте определяется возможностью восстановления сигнала  $x(n)$  и его непрерывного спектра  $X(j \cdot \omega)$  по ДПФ.

Восстановление сигнала по дискретизированному по частоте спектру осуществляется с помощью **обратного ДПФ** (ОДПФ). Как и прямое ДПФ (8.1), ОДПФ может быть получено путем дискретизации по частоте непрерывного обратного преобразования Фурье:

$$x(n) = \frac{T_d}{2\pi} \cdot \int_0^{\omega_d} X(j \cdot \omega) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot n \cdot T_d} d\omega.$$

Используя замены  $d\omega \rightarrow \omega_d / N$ ;  $\int \rightarrow \Sigma$ ;  $\omega \rightarrow \omega_k$ , находим

$$\text{ОДПФ}_N [X(j \cdot \omega_k)] = x_p(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(j \cdot \omega_k) \cdot e^{j \cdot \omega_k \cdot n \cdot T_d}. \quad (8.2)$$

Сигнал  $x_p(n)$  периодичен с периодом  $N$ :  $x_p(n) = x_p(n - i \cdot N)$ ,  $i = 0, \pm 1, \dots$ , и связан с сигналом  $x(n)$  соотношением  $x_p(n) = \sum_i x(n - i \cdot N)$ .

При  $N \geq N_1$   $x_p(n) = x(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , т. е. сигнал  $x_p(n)$  на интервале  $0, \dots, N - 1$  точно совпадает с исходным сигналом  $x(n)$ , дополненным  $(N - N_1)$  нулевыми отсчетами и является периодическим его продолжением за пределами этого интервала (рис. 8.2). ОДПФ, вычисляемое на интервале  $0, \dots, N - 1$ , обеспечивает в данном случае точное восстановление сигнала  $x(n)$  по его ДПФ.

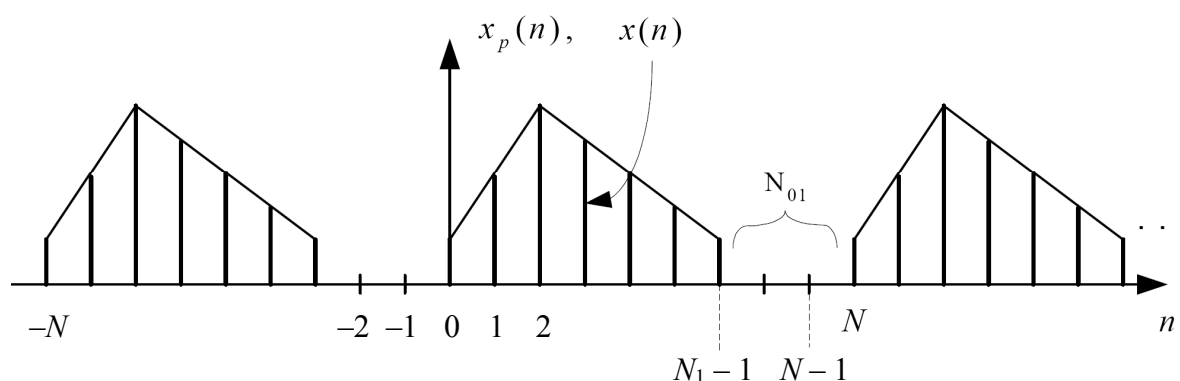


Рис. 8.2. Сигнал, соответствующий ОДПФ при  $N \geq N_1$

При  $N < N_1$  ( $\Delta\omega = \omega_d / N > \omega_d / N_1$ ) имеет место перекрытие периодизированных с периодом  $N$  последовательностей  $x(n)$  (явление наложения во временной области), так что  $x_p(n) \neq x(n)$  при  $n = 0, \dots, N_1 - 1$  (рис. 8.3). Это исключает возможность точного восстановления сигнала по его дискретизированному спектру.

Соотношение  $N \geq N_1$  определяет условие выбора шага дискретизации по частоте  $\Delta\omega \leq \omega_d / N_1$ , которое отвечает также теореме Котельникова в частотной области:

**спектр сигнала конечной длительности может быть точно восстановлен по его частотным выборкам, взятым с вышеуказанным шагом по частоте  $\Delta\omega$ .**

Вычисление ДПФ по числу точек  $N$ , превышающему длину последовательности  $N_1$  (дополняемую в этом случае  $(N - N_1)$  нулевыми отсчетами), эквивалентно интерполяции по частоте спектра, дискретизированного с максимальным допустимым шагом  $\Delta\omega = \omega_d / N_1$ . Дополнение  $x(n)$  нулевыми отсчетами используется для повышения частотного разрешения ДПФ.

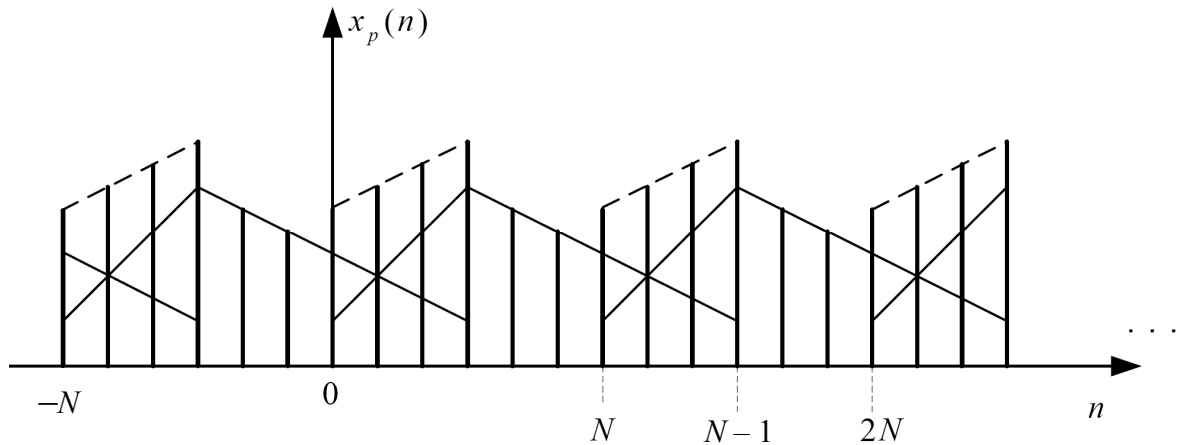


Рис. 8.3. Сигнал, соответствующий ОДПФ при  $N < N_1$

Таким образом,  $N$ -точечное ДПФ соответствует спектру периодизированной с периодом  $N$  исходной последовательности  $x(n)$  конечной длины  $N_1 \leq N$ .

ДПФ совпадает также с преобразованием Фурье периодической последовательности  $x_p(n)$  с периодом, равным  $N$ , имеющей линейчатый спектр.

Преобразования ДПФ–ОДПФ (8.1), (8.2) представляют как в виде функции дискретной частоты  $\omega_k$ , так и номера частотной выборки  $k$ :

$$\text{ДПФ}_N[x(n)] = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (8.3)$$

$$\text{ОДПФ}_N[X(k)] = x(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (8.4)$$

Вычисление ОДПФ и ДПФ требует  $N^2$  операций умножения и  $N \cdot (N-1)$  операций сложения комплексных чисел.

Оба преобразования используют единый вычислительный алгоритм, основанный на их достаточно простой взаимосвязи:

$$\text{ОДПФ}_N[X(k)] = \frac{1}{N} \cdot \left\{ \text{ДПФ}_N[X^*(k)] \right\}^*, \quad (8.5)$$

где  $*$  – операция комплексного сопряжения.

### Свойства ДПФ

ДПФ обладает теми же свойствами, что и непрерывное преобразование Фурье (линейность, сдвиг последовательности), в том числе периодичностью и симметрией.

Наиболее важной для цифровой фильтрации является связь ДПФ и свертки дискретных последовательностей. Для дискретных последовательностей различают круговую (**периодическую**) и **линейную** свертки.

**Круговая свертка** определяется для периодических последовательностей  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$  с периодом  $N$ :

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(n-m)x_2(m). \quad (8.6)$$

Известно, что свертке последовательностей во временной области отвечает умножение их в частотной, т. е. непрерывное преобразование Фурье свертки двух последовательностей равно произведению преобразований Фурье этих последовательностей:  $Y(k) = X_1(k) \cdot X_2(k)$  (**теорема о свертке**).

Выполняя ОДПФ, можно с помощью ДПФ вычислить круговую свертку периодических последовательностей:

$$y(n) = \text{ОДПФ}_N \{ \text{ДПФ}_N[x_1(k)] \cdot \text{ДПФ}_N[x_2(k)] \}. \quad (8.7)$$

**Линейная свертка** определяется для конечных последовательностей  $x_1(n)$  длиной  $N_1$  и  $x_2(n)$  длиной  $N_2$ :

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N_2-1} x_1(n-m)x_2(m). \quad (8.8)$$

Сигнал линейной свертки  $y(n)$  имеет длину  $N = N_1 + N_2 - 1$ . Чтобы применить в данном случае теорему о свертке, ДПФ последовательностей  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  необходимо вычислить по одинаковому числу точек  $N$ , соответствующему длине последовательности  $y(n)$ , с одинаковым шагом дискретизации по частоте  $\Delta\omega = \omega_d / N$ .

При этом последовательности  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  дополняются  $N_{01}$ ,  $N_{02}$  нулевыми отсчетами:  $N_{01} = N - N_1$ ,  $N_{02} = N - N_2$ , что обеспечивает в частотной области интерполяцию их дискретизированного спектра.

Сигнал  $y(n)$  в соответствии с данным свойством также может быть определен с помощью ОДПФ от произведения  $N$ -точечных ДПФ свертываемых последовательностей  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$ :

$$y(n) = \text{ОДПФ}_N \{ \text{ДПФ}_N[x_1(k)] \cdot \text{ДПФ}_N[x_2(k)] \}. \quad (8.9)$$

Выражение (8.9) представляет алгоритм вычисления линейной свертки конечных последовательностей в частотной области. При использовании рассматриваемых далее алгоритмов быстрого преобразования Фурье его называют также алгоритмом быстрой свертки. Очевидно, что ДПФ линейной свертки последовательностей конечной длины  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$  эквивалентно ДПФ круговой свертки последовательностей, полученных путем периодизации их с периодом  $N = N_1 + N_2 - 1$ .

## 8.2. Фильтрация сигналов на основе ДПФ

Свойство ДПФ свертки конечных последовательностей используют для реализации КИХ-фильтров с обработкой сигнала в частотной области. Сигнал на выходе такого фильтра определяется дискретной временной сверткой (ДВС) входной последовательности  $x(n)$  (в данном случае конечной длины  $N_1$ ) с конечной импульсной характеристикой  $h(n)$  длиной  $N_2$ :

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N_2-1} h(m) \cdot x(n-m), \quad n = 0, 1, \dots, N-1; \quad N = N_1 + N_2. \quad (8.10)$$

Прямое вычисление ДВС во временной области реализуют нерекурсивные цифровые фильтры (НРЦФ на основе ДВС).

При обработке в частотной области ДВС может быть вычислена в соответствии с алгоритмом (8.11):

$$y(n) = \text{ОДПФ}_N [H(k) \cdot X(k)], \quad n = 0, 1, \dots, N-1; \quad N = N_1 + N_2. \quad (8.11)$$

В данном случае его называют **алгоритмом цифровой фильтрации** последовательностей конечной длины **на основе ДПФ**. Он представлен структурной схемой (рис. 8.4).

В этом алгоритме ДПФ импульсной характеристики  $h(n)$ ,

$$H(j \cdot \omega_k) = \sum_{m=0}^{N_2-1} h(m) \cdot e^{-j \cdot \omega_k \cdot m \cdot T_d} = \frac{Y(j \cdot \omega_k)}{X(j \cdot \omega_k)},$$

соответствует дискретизированной частотной характеристике фильтра (ДЧХ), а  $X(j \cdot \omega_k)$ ,  $Y(j \cdot \omega_k)$  – дискретизированным спектрам его входной и выходной последовательностей.

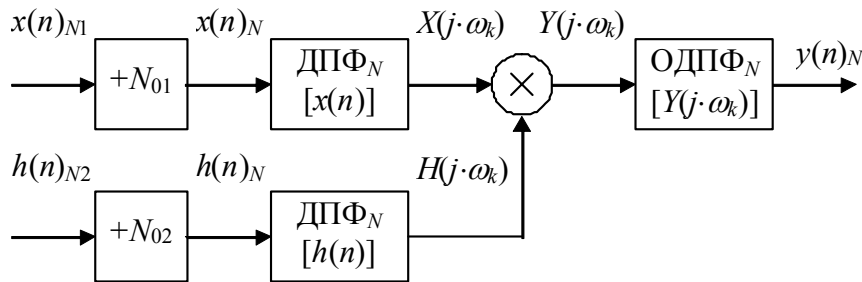


Рис. 8.4. Структурная схема НРЦФ на основе ДПФ

Алгоритм включает следующие операции:

- запоминание  $N_1$  отсчетов входной последовательности  $x(n)$ ;
- вычисление  $N$ -точечных ДПФ последовательностей  $x(n)$  и  $h(n)$ ;
- перемножение  $N$  частотных выборок ДПФ входной последовательности и ДЧХ фильтра и образование  $N$ -точечной последовательности  $Y(j \cdot \omega_k) = H(j \cdot \omega_k) \cdot X(j \cdot \omega_k)$ ;

- вычисление  $N$ -точечного ОДПФ последовательности  $Y(j \cdot \omega_k)$ , в результате чего получаются  $N$  отсчетов выходной последовательности  $y(n)$ .

Таким образом, в данном алгоритме отсчеты выходного сигнала находятся по частотным выборкам входного сигнала, взвешенным заданной частотной характеристикой фильтра. Фильтрация осуществляется путем последовательного перехода из временной области в частотную, обработки сигнала в частотной области и обратного перехода во временную.

**Коэффициентами фильтров на основе ДПФ могут быть как отсчеты его импульсной характеристики, так и непосредственно дискретизированной частотной характеристики  $H(j \cdot \omega_k)$ .**

Особенностью алгоритма является наличие временного запаздывания в выдаче отсчетов выходного сигнала, которые получаются только после приема всей входной последовательности и ее обработки. В связи с этим следует заметить, что временное запаздывание свойственно всем физически реализуемым системам обработки сигналов и различие здесь носит в основном количественный характер.

Для реализации фильтра необходима память для записи комплексных последовательностей  $x(n)$ ,  $X(j \cdot \omega_k)$ ,  $Y(j \cdot \omega_k)$ ,  $y(n)$  и коэффициентов  $H(j \cdot \omega_k)$  длиной  $N$ . Обработка включает также  $K_{\text{умн}} = 4 \cdot [2 \cdot N^2 + N]$  операций умножения и  $K_{\text{слож}} = 4 \cdot [(N-1) \cdot N]$  операций сложения вещественных чисел. В пересчете на один отсчет выходного сигнала это соответствует числу операций  $K_{\text{умн}(1)} = 4 \cdot (2 \cdot N + 1)$  и  $K_{\text{слож}(1)} = 4 \cdot (N - 1)$ .

По объему вычислений фильтр на основе ДПФ уступает НРЦФ с обработкой во временной области, т. е. фильтру на основе ДВС (где на один отсчет сигнала выполняется  $N_2$  операции умножения).

Однако эффективность его существенно возрастает при использовании для вычисления ДПФ и ОДПФ алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ). Так, алгоритмы БПФ по основанию 2 требуют  $K_{\text{умн}} = 2 \cdot N \cdot \log_2(N)$  операций умножения и столько же операций сложения вещественных чисел. Общее и приведенное к одному отсчету число операций для НРЦФ на основе БПФ при этом составит:

$$K_{\text{умн}} = 4 \cdot N \cdot [\log_2(N) - 1]; \quad K_{\text{слож}} = 4 \cdot N \cdot \log_2(N);$$

$$K_{\text{умн}(1)} = 4 \cdot [\log_2(N) + 1]; \quad K_{\text{слож}(1)} = 4 \cdot \log_2(N).$$

$$\text{При } N = 1024 \quad K_{\text{умн}(1)} = 44, \quad K_{\text{слож}(1)} = 40.$$

Для НРЦФ на основе ДВС число операций зависит от длины импульсной характеристики  $N_2$  и при  $N_2 = N / 2$  составит

$$K_{\text{умн}(1)} = K_{\text{слож}(1)} = 512.$$

Таким образом, реализация НРЦФ на основе БПФ требует намного меньшего объема операций. При более точной оценке и использовании других известных алгоритмов БПФ эффективность данной реализации оказывается еще выше. По объему вычислений цифровые фильтры на основе БПФ конкурентоспособны с рекурсивными цифровыми фильтрами (но не по объему памяти).

### 8.3. Спектральный анализ сигналов: задачи, методы, параметры

Спектральный анализ заключается в разложении сигнала на его частотные или спектральные составляющие и оценке или измерении их спектральных характеристик – амплитуды, фазы, мощности, спектральной плотности мощности и др.

К задачам, решаемым методами спектрального анализа, относятся:

- обнаружение сигналов;
- разрешение и оценивание параметров сигналов;
- сжатие данных;
- выделение информативных признаков;
- идентификация объектов (определение частотных, импульсных и других характеристик);
- распознавание образов (речи, изображений) и др.

Для случайных сигналов с помощью спектрального анализа решается общая задача выявления скрытых периодичностей и статистических (корреляционных) связей.

Спектральный анализ детерминированных периодических (регулярных) сигналов и сигналов конечной длительности называют также гармоническим анализом [19].

Основными методами спектрального анализа являются

- **фильтровые** (методы полосового анализа);
- **бесфильтровые**: основанные на ДПФ и параметрические (на основе параметрических моделей случайных процессов [20]).

Бесфильтровые методы могут быть текущего, скользящего и скачущего спектрального анализа; последовательного и параллельного; одноканального и многоканального; в реальном времени и нереальном (по записям сигнала).

К параметрам анализаторов спектра относятся:

- число каналов анализа;
- время наблюдения или анализа (ширина окна)  $T_a = N \cdot T_d$  и соответствующее ему число отсчетов или длина  $N$  обрабатываемой реализации сигнала;
- полоса анализа  $\Delta f_a$ , не превышающая для дискретных сигналов основной полосы спектра  $\pm f_d / 2$ ;



- разрешение по частоте, обратно пропорциональное времени анализа ( $\Delta f_p = 1/T_d$ ) и соответствующее разности частот двух соседних разрешаемых (разделяемых) частотных составляющих сигнала.

Спектральный анализ широко применяется в радиотехнике и смежных с нею областях.

Особенности классического спектрального анализа на основе ДПФ связаны с оценкой спектра сигнала по его реализациям конечной длины, т. е. на конечном интервале наблюдения. При этом полагается, что за пределами этого интервала сигнал равен нулю или является периодическим продолжением считанной реализации. Широкое применение анализаторов спектра на основе ДПФ обусловлено наличием высокоэффективных вычислительных алгоритмов БПФ.

#### 8.4. Спектральный анализ сигналов на основе ДПФ

В основе анализаторов спектра, использующих ДПФ, лежит базовая структура, приведенная на рис. 8.5. Она реализует базовые операции анализатора спектра – взвешивание и вычисление ДПФ. Выходом базовой структуры является вектор ДПФ входной в общем случае не ограниченной по длине последовательности  $x(n)$ , усеченной весовой функцией  $w(n)$  конечной длины  $N$ :

$$\text{ДПФ}_N[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w(n)e^{-j\omega_k \cdot nT_d} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot n}, \quad (8.12)$$

$k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Здесь  $\tilde{x}(n) = x(n) \cdot w(n)$  – преобразуемая входная последовательность ДПФ;  $\omega_k = k \cdot \omega_d / N$  или  $f_k = k \cdot f_d / N$  – частоты анализа, называемые также **бинами ДПФ**; 1 бин равен шагу дискретизации сигнала в частотной области  $f_d / N$ . Анализатор имеет  $N$  разнесенных по частоте на 1 бин ( $f_d / N$ ) каналов анализа с центральными частотами  $\omega_k (f_k)$ , при этом значения  $k = 0, 1, \dots, N-1$  соответствуют номеру канала, номеру бина или номеру частотной выборки ДПФ:  $\tilde{X}(j \cdot \omega_k) = \tilde{X}(k)$ . Весовая функция представляет **окно**, через которое наблюдается входной сигнал, длиной ее определяется время анализа  $T_a = N \cdot T_d$  или время наблюдения сигнала.

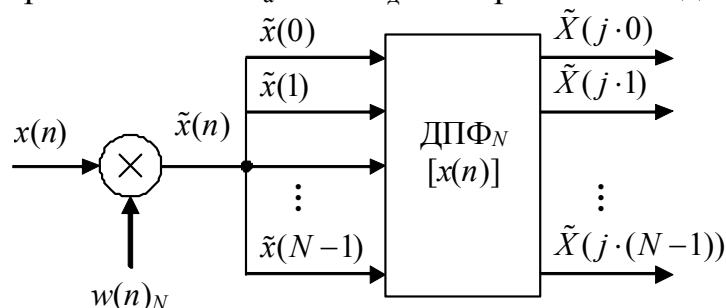


Рис. 8.5. Структурная схема анализатора спектра на основе ДПФ

Умножению или взвешиванию во временной области соответствует свертка в частотной, поэтому вычисляемое ДПФ фактически является дискретизированной сверткой истинного спектра анализируемого сигнала  $X(j \cdot \omega)$  с частотной характеристикой (спектром) весовой функции  $W(j \cdot \omega)$ :  $\tilde{X}(j \cdot \omega_k) = X(j \cdot \omega) * W(j \cdot \omega) \Big|_{\omega=\omega_k}$ , где \* – символ свертки, т. е. содержит систематическую (методическую) **погрешность анализа**. Она является следствием ограничения сигнала по длительности, искажающего результаты спектрального анализа.

Применение специальных весовых функций или окон позволяет сгладить или ослабить вызываемое временным усечением влияние или эффект разрывов сигнала на краях.

Дальнейшая обработка выходных данных ДПФ осуществляется с учетом измеряемых или оцениваемых с помощью ДПФ спектральных характеристик, зависящих от вида анализируемых сигналов.

**Для периодических сигналов**  $x_p(n)$  с периодом  $N \cdot T_d$  оценивают амплитуды  $A_m(\omega_k)$  и фазы  $\varphi(\omega_k)$  гармоник с частотой  $k \cdot f_d / N$  или их средние за период мощности  $[A_m(\omega_k)]^2 / 2$ .

**Для детерминированных сигналов конечной длительности**  $x(n)$  (непериодических) оценивают:

- спектральную плотность  $X(j \cdot \omega)$  размерностью [В/Гц], определяемую ее модулем  $|X(j \cdot \omega)|$  и аргументом  $\varphi(\omega)$ , т. е. амплитудным и фазовым спектрами, и вычисляемую на частотах анализа  $\omega = \omega_k$ , или бинах ДПФ;
- энергетический спектр или спектральную плотность энергии  $S_x(\omega) (|X(j \cdot \omega)|^2)$  размерностью [В<sup>2</sup>·с/Гц], показывающую распределение энергии сигнала по частоте и также вычисляемую на дискретных частотах  $\omega_k$ .

**Для случайных сигналов**  $x(n)$  оценивают спектральную плотность мощности  $P_x(\omega)$  размерностью [В<sup>2</sup>/Гц], являющуюся статистическим расширением понятия спектральной плотности энергии на случайные сигналы, т. е. сигналы с бесконечной энергией, и также вычисляемую на дискретных частотах  $\omega_k$ .

**Для стохастически связанных** случайных сигналов  $x(n)$ ,  $y(n)$  с помощью ДПФ измеряют их взаимную спектральную плотность мощности  $P_{xy}(\omega)$ .

При реализации конкретных алгоритмов спектрального анализа различных сигналов важное значение имеет правильное масштабирование результатов анализа и учета их размерности [20].

ДПФ определяется выражением

$$X(j \cdot \omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \cdot \omega_k \cdot n \cdot T_d}.$$

Для вещественного периодического сигнала  $x_p(n)$  с периодом  $N \cdot T_d$  и частотами гармоник  $k \cdot f_d / N$ , совпадающими с бинами ДПФ, амплитуды гармоник определяются как  $A_m(\omega_k) = \frac{2}{N} \cdot |X(j \cdot \omega_k)|$ , фазы –  $\varphi(\omega_k) = \arctg[X_{\text{Im}}(j \cdot \omega_k) / X_{\text{Re}}(j \cdot \omega_k)]$ , средние мощности как  $2 \cdot \left| \frac{1}{N} \cdot X(j \cdot \omega_k) \right|^2$ .

Для детерминированного сигнала конечной длительности  $N \cdot T_d$  аналогичным образом находятся амплитуды, фазы и мощности  $k$ -й частотной выборки спектра сигнала, а спектральная плотность сигнала на частотах  $\omega_k$  определяется как  $T_d \cdot X(j \cdot \omega_k)$ . Другие спектральные характеристики такого сигнала связаны с его ДПФ соотношениями:

$S_x(k) = |T_d \cdot X(j \cdot \omega_k)|^2$  – спектральная плотность энергии на частоте  $\omega_k$ ;

$P_x(k) = (T_d / N) \cdot |X(j \omega_k)|^2$  – спектральная плотность мощности на частоте  $\omega_k$ ;

$$S_x = \frac{1}{N \cdot T_d} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} S_x(k), \quad P_x = \frac{1}{N \cdot T_d} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} P_x(k) \text{ – полная энергия и средняя мощность сигнала.}$$

Можно отметить, что корректность масштабов при вычислении энергии и мощности сигнала обеспечивает пара преобразований с размерным множителем  $T_d$  перед ДПФ и  $1/T_d$  перед ОДПФ, называемая дискретно-временным рядом Фурье (ДВРФ) [20].

## 8.5. Определение и классификация алгоритмов БПФ

Алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ) – это способы быстрого вычисления ДПФ, устраняющие свойственную ДПФ вычислительную избыточность. Они были впервые предложены в 1965 году американцами Кули и Тьюки и относятся к базовым алгоритмам ЦОС в частотной области. Алгоритмы основываются на следующих свойствах комплексной экспоненты  $e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} = W_N^{kn}$ :

- **симметрии**  $W_N^{kn} = W_N^{-(N-k)n} = W_N^{-(N-n)k}$ ;

- **периодичности**  $W_N^{kn} = W_N^{(k+l \cdot N)(n+m \cdot N)}$  с периодом, равным длине обрабатываемой реализации сигнала  $N$  (числу точек БПФ).

С учетом последнего свойства экспоненте  $W_N^{pkn} = W_{N/p}^{kn}$  соответствует период  $N / p$ , где  $p$  – целые числа, на которые делится  $N$ .

Использование данных свойств в алгоритмах БПФ исключает большое число повторяющихся при вычислении ДПФ операций.

Общий принцип БПФ заключается в разбиении ДПФ исходной последовательности на ДПФ подпоследовательностей меньшей длины, вплоть до минимально возможной (равной основанию БПФ), через которые и вычисляется ДПФ исходной последовательности.

Разбиение означает прореживание последовательностей во временной или в частотной области. В связи с этим различают **БПФ с прореживанием по времени** и **БПФ с прореживанием по частоте**.

В отличие от ДПФ, БПФ может вычисляться только по определенному числу точек  $N$ , соответствующему целой степени его основания  $m$ :  $N = m^L$ , где  $L$  – это число этапов прореживания;  $L = \log_m N$ .

К наиболее используемым относятся БПФ по основаниям  $m = 2, 4, 8$ , но чаще всего применяют БПФ **по основанию 2**.

Как показано в [7], п. 8.8, с помощью БПФ вычисляется также и обратное ДПФ (ОДПФ).

### 8.6. Алгоритм БПФ по основанию 2 с прореживанием по времени

Пусть задана последовательность  $x(n)$  конечной длины  $N$ ;  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ . Нужно найти ее ДПФ:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{k \cdot n}, \quad (8.13)$$

для  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  (номера бинов ДПФ) с минимальным объемом вычислений.

Исходную последовательность  $x(n)_N$  длиной  $N$  разобьем на 2 подпоследовательности длиной  $N / 2$ : четную, включающую отсчеты с четными индексами  $x_1(n) = x(2n)$ , и нечетную  $x_2(n) = x(2n + 1)$ ;  $n = 0, 1, \dots, (N / 2) - 1$ . Это соответствует первому прореживанию сигнала по времени (рис. 8.6).

Обозначим их ДПФ как  $X_1(k)_{N/2}$  и  $X_2(k)_{N/2}$ . Выразим ДПФ исходной последовательности  $x(n)_N$  через ДПФ подпоследовательностей  $x_1(n)_{N/2}$ ,  $x_2(n)_{N/2}$ :

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N/2} \cdot k \cdot n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N/2} \cdot k \cdot n} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k} = \\ &= X_1(k) + X_2(k) \cdot W_N^k; \end{aligned} \quad (8.14)$$

$k = 0, 1, \dots, (N / 2) - 1$ .

Это первые  $N/2$  частотных выборок ДПФ.

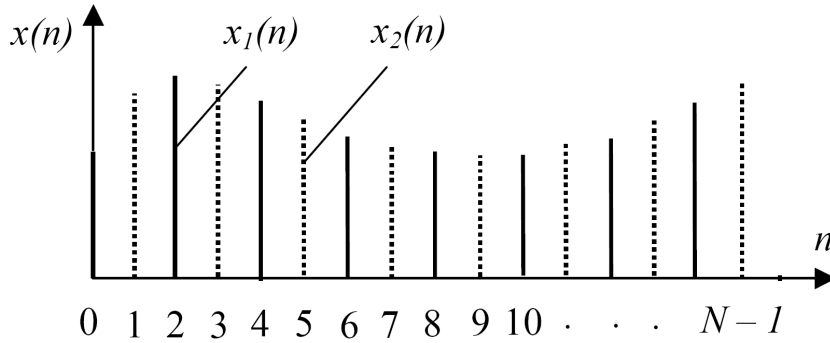


Рис. 8.6. Иллюстрация прореживания сигнала по времени

Вторую половину частотных выборок  $X(k)$  для  $k = (N/2), \dots, (N-1)$  найдем с учетом свойства периодичности:

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) + X_2(k) \cdot W_N^{k+N/2} = X_1(k) - X_2(k) \cdot W_N^k; \quad (8.15)$$

$k = 0, 1, \dots, (N/2 - 1)$ .

Выражения (8.14), (8.15) определяют **базовую операцию БПФ** (операцию объединения):

$$\begin{aligned} X(k) &= X_1(k) + X_2(k) \cdot W_N^k; \\ X\left(k + \frac{N}{2}\right) &= X_1(k) - X_2(k) \cdot W_N^k. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Входящий в (8.16) множитель  $W_N^k$ , равный по модулю единице, называют **поворачивающим**. Вычисления в соответствии с (8.16) включают одно комплексное умножение и пару сложения-вычитания.

Базовую операцию представляют графически с помощью сигнального графа («бабочки» БПФ), рис. 8.7.

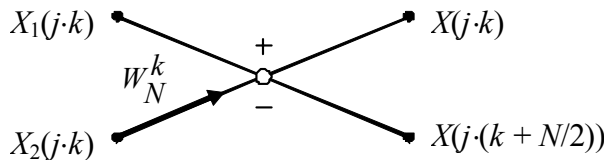


Рис. 8.7. Сигнальный граф БПФ с прореживанием по времени

На нем символ  $\bigcirc$  означает операцию сложения (верхний выход) и вычитания (нижний выход), а стрелка  $\rightarrow$  соответствует умножению на поворачивающий множитель  $W_N^k$ .

Сигнальный граф алгоритма БПФ получается в виде совокупности графов базовых операций. Для первого этапа прореживания он показан на рис. 8.8 для случая  $N = 8$ .

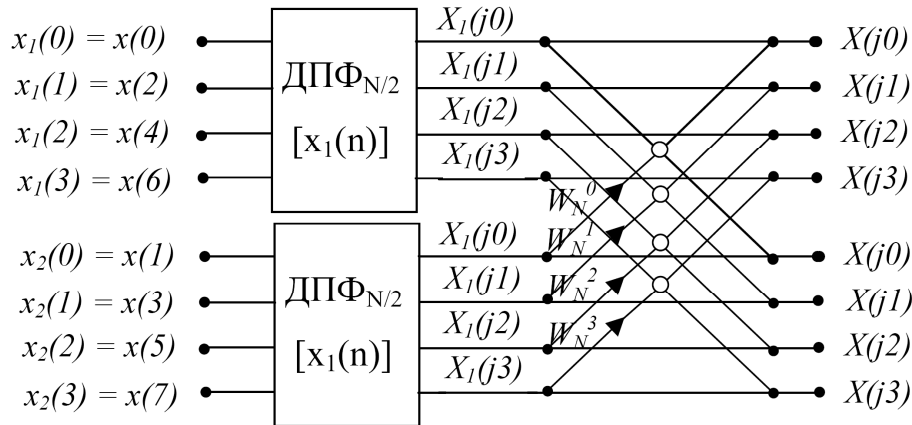


Рис. 8.8. Сигнальный граф БПФ для первого этапа прореживания

Оценим требуемый объем вычислений в соответствии с данным графом по числу операций умножения:

$$\text{для ДПФ } K_{\text{умн.ДПФ}} = N^2;$$

$$\text{для БПФ } K_{\text{умн.БПФ}} = 2(N/2)^2 + N/2 = N^2/2 + N/2.$$

Как видим, в результате однократного прореживания объем вычислений уменьшился примерно в 2 раза.

Далше каждую из последовательностей  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  можно разбить еще на две подпоследовательности вдвое меньшей длины:  $x_{11}(n)$ ,  $x_{12}(n)$  и  $x_{21}(n)$ ,  $x_{22}(n)$  (четную и нечетную) – и повторить вышеприведенные операции объединения их ДПФ с помощью базовых операций. Такое прореживание выполняем  $L$  раз до получения  $N/2$  двухточечных последовательностей  $x_l(0)$ ,  $x_l(1)$ , ДПФ которых вычисляется тривиально:

$$X_L(0) = x_L(0) + x_L(1) \cdot W_2^0;$$

$$X_L(1) = x_L(0) - x_L(1) \cdot W_2^0.$$

В результате получаем полный граф БПФ, показанный на рис. 8.9 для  $N = 8$ .

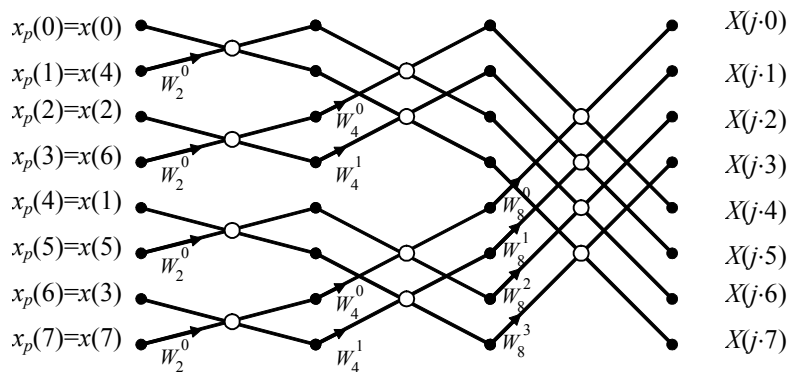


Рис. 8.9. Полный граф БПФ для  $N = 8$

В соответствии с графом на каждом из  $L$  этапов вычисления-объединения ДПФ выполняется  $N/2$  базовых операций, а общий объем

вычислений для комплексных операций умножения и сложения-вычитания составляет:

$$K_{\text{умн. БПФ}} = \frac{N}{2} \cdot L = \frac{N}{2} \cdot \log_2 N; K_{\text{слож. БПФ}} = N \cdot L = N \cdot \log_2 N. \quad (8.17)$$

Число операций с **вещественными числами** в 4 раза больше для умножения и в 2 раза больше для сложения-вычитания. Выигрыш БПФ относительно ДПФ по числу операций умножения:  $K_{\text{умн. ДПФ}} / K_{\text{умн. БПФ}} = 2 \cdot N / \log_2 N$ .

Так, при  $N = 2^{10} = 1024$   $K_{\text{умн. БПФ}} = 5120$ ,  $K_{\text{умн. ДПФ}} \approx 10^6$ ; выигрыш равен 204,8.

Выделенные на рис. 8.9 узловые точки графа соответствуют ячейкам оперативной сигнальной памяти. Так как вычисления выполняются поэтапно, то возможно **замещение ячеек памяти**, определяющее общую требуемую сигнальную память в объеме, равном  $2 \cdot N$  ячеек для  $N$  комплексных чисел (их реальной и мнимой части). При этом используемые **ячейки памяти на входе графа** с  $N$  отсчетами входного сигнала  $x(n)$  (в общем случае комплексного) **замещаются** в конечном итоге  $N$  комплексными частотными выборками БПФ  $X(k)$ .

Особенностью алгоритма БПФ с прореживанием по времени является требуемый им неестественный порядок отсчетов входного сигнала, обусловленный его многократными разбиениями на четные и нечетные подпоследовательности ( $n = 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7$  для  $N = 8$ ). Такой порядок следования называют **двоично-инверсным**. Это приводит к необходимости предварительной перестановки отсчетов исходной последовательности до начала вычислений.

Для этого естественные номера отсчетов последовательности  $x(n)$  представляются в  $L$ -разрядном двоичном коде, коды эти прочитываются в обратном порядке, т. е. справа налево, и преобразуются затем снова в десятичную форму, соответствующую номеру отсчета переставленной последовательности  $x(p)$ .

Например, для графа рис. 8.9 отсчету  $n_{(10)} = 4$  исходной последовательности  $x(n)$  в десятичной системе соответствуют двоичный код  $n_{(2)} = 100$ , двоично-инверсный (перевернутый) код  $n_{\text{дв. инв.}} = 001$  и десятичный номер  $p = 1$  отсчета переставленной последовательности  $x(p)$ .

Этапы вычисления-объединения ДПФ в соответствии с сигнальным графом рис. 8.9 следуют в порядке, обратном этапам прореживания сигнала, выполняемым при выводе алгоритма БПФ.

На первом этапе вычисляется  $N / 2$  двухточечных ДПФ, каждому из которых соответствует одна базовая операция БПФ.

На втором этапе путем их попарного объединения с помощью двух базовых операций вычисляется  $N/4$  четырехточечных ДПФ и т. д.

На  $L$ -м этапе два  $(N/2)$ -точечных ДПФ с помощью  $N/2$  базовых операций объединяются в  $N$ -точечное ДПФ исходной последовательности.

С учетом указанной закономерности процесс программного вычисления БПФ можно разбить на три вложенных цикла (в порядке их вложения):

- по номеру этапа вычисления-объединения ДПФ  $i = 1, 2, \dots, L$  (внешний);
- номеру вычисляемого ДПФ на  $i$ -м этапе  $l = 1, 2, \dots, 2^{L-i}$ ;
- номеру базовой операции вычисляемого ДПФ  $m = 1, 2, \dots, 2^{i-1}$ .

Значения поворачивающих множителей для базовой операции на  $i$ -ом этапе определяются обобщенным выражением

$$W_{N/2^{L-i}}^k \quad k = 0, 1, \dots, [N/(2^{L-i+1})]-1.$$

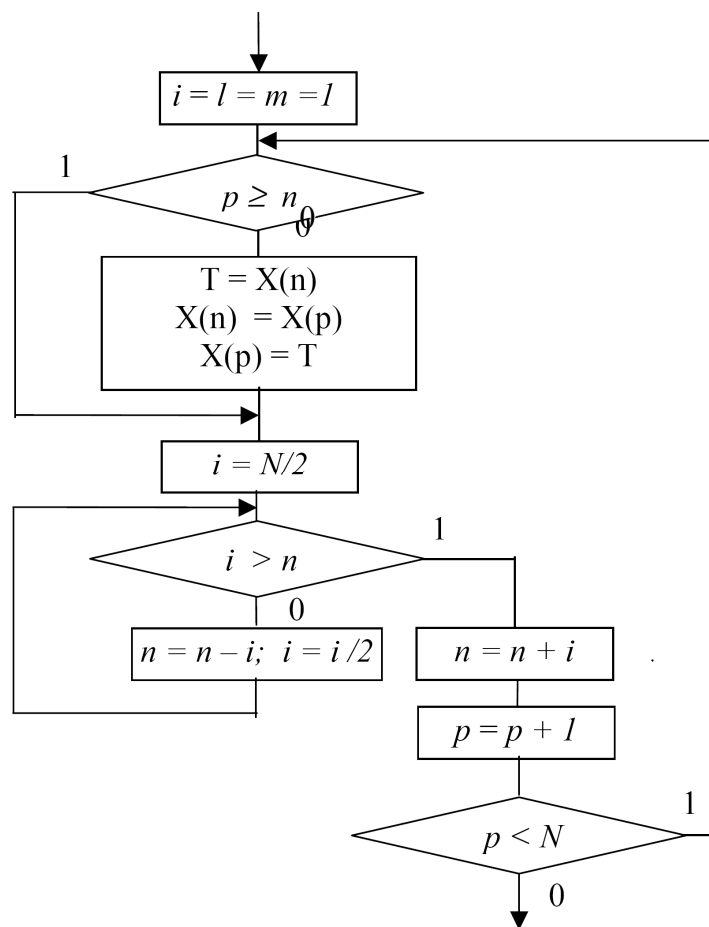


Рис. 8.10. Блок-схема алгоритма перестановок (двоичной инверсии)



В результате получается блок-схема алгоритма программной реализации БПФ, представленная на рис. 8.11.

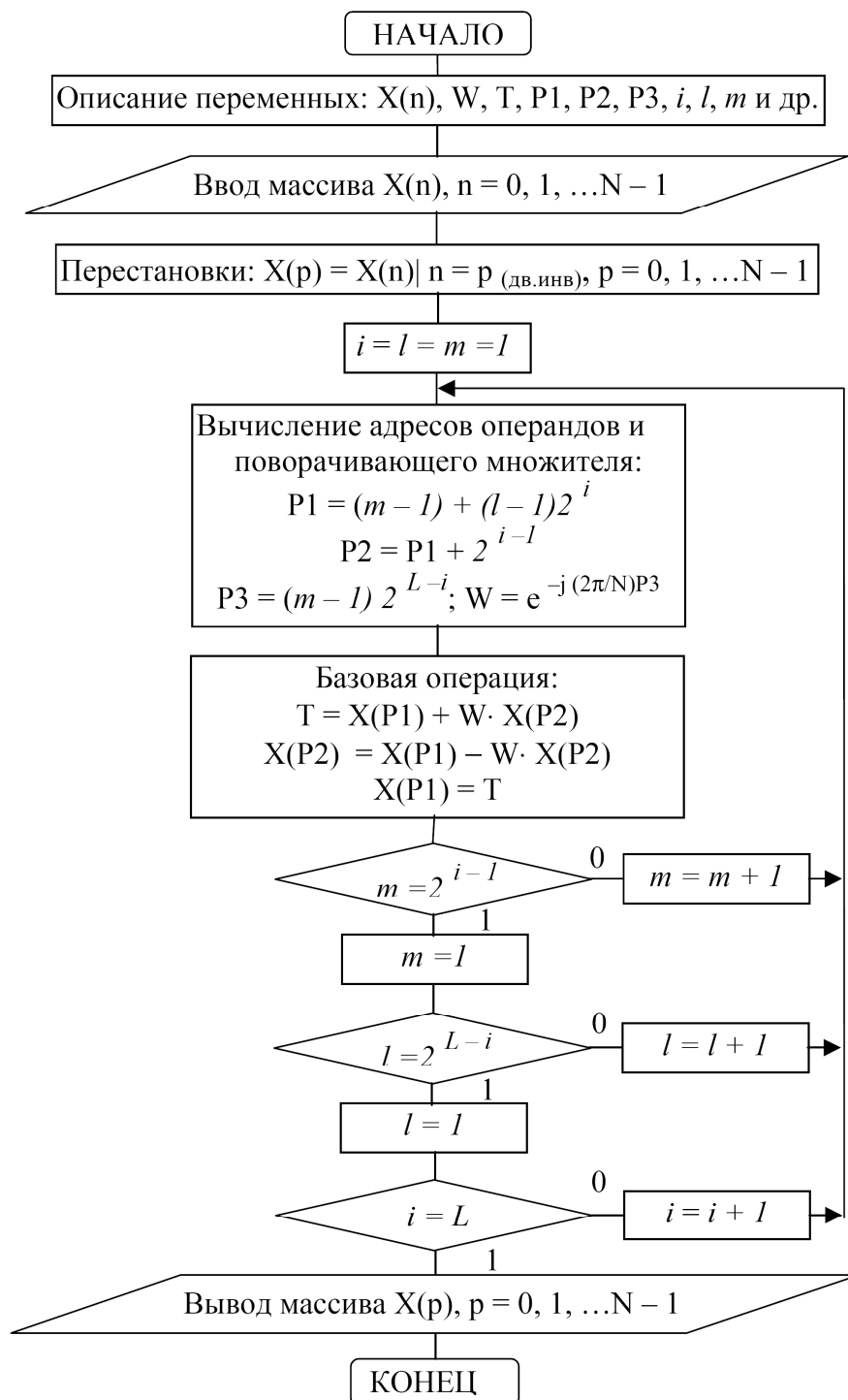


Рис. 8.11. Блок-схема алгоритма программной реализации БПФ с прореживанием по времени по основанию 2

Блок-схема включает:

- описание (объявление) используемых переменных;
- ввод  $N$  отсчетов обрабатываемой последовательности (вектора)  $x(n)$  (программная переменная  $X(n)$ );
- перестановку отсчетов в соответствии с правилом двоичной инверсии и формирование переставленной последовательности  $x(p)$ ;
- вычисление адресов операндов P1, P2 и значений аргумента P3 и поворачивающего множителя  $W_N^{P3} = e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot P3}$  для базовой операции (аргумент P3 может быть также адресом предварительно вычисленного массива поворачивающих множителей  $W_N^k = e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k}$   $k = 0, 1, \dots, N-1$ );
- базовую операцию БПФ, замещение памяти, проверку и модификацию параметров циклов и их повторение.

Формирование переставленной последовательности  $x(p)$  осуществляется в соответствии с блок-схемой алгоритма перестановок (двоичной инверсии), рис. 8.10.

### 8.7. Алгоритм БПФ по основанию 2 с прореживанием по частоте

Рассмотрим, как осуществляют прореживание в данном алгоритме БПФ и определяют его базовую операцию. Для этого входную последовательность  $x(n)$  представляют в виде ее первой и второй половин и выражают через них ДПФ исходной последовательности:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) \cdot W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n+N/2) \cdot W_N^{k(n+N/2)}, \quad (8.18)$$

$k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Учитывая, что  $W_N^{k \cdot N/2} = e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot \frac{N}{2}} = e^{-j \cdot \pi \cdot k} = (-1)^k$ , получаем

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + (-1)^k \cdot x(n+N/2)] \cdot W_N^{kn}. \quad (8.19)$$

Подставив вместо  $k$  в (8.19) значение  $2k$  и  $2k+1$ , получим выражения для четных и нечетных отсчетов ДПФ:

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + x(n+N/2)] \cdot W_{N/2}^{kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_0(n)] \cdot W_{N/2}^{kn};$$

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) - x(n+N/2)] \cdot W_N^n \cdot W_{N/2}^{kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n)] \cdot W_{N/2}^{kn}.$$

В результате ДПФ исходной последовательности выражается через ДПФ некоторых  $N/2$ -точечных последовательностей  $x_0(n)$ ,  $x_1(n)$ , определяемых следующим образом:

$$x_0(n) = [x(n) + x(n+N/2)]; \quad (8.20)$$

$$x_1(n) = [x(n) - x(n+N/2)] \cdot W_N^n;$$

$n = 0, 1, \dots, (N/2) - 1$ .

Выражения (8.20) соответствуют **базовой операции** данного алгоритма, представляемой графически зеркально отраженным сигнальным графом БПФ с прореживанием по времени (рис. 8.7). Отличие операции «бабочка» заключается в том, что комплексное умножение выполняется после операции сложения-вычитания.

Из последовательностей  $x_0(n)$  и  $x_1(n)$  по тому же правилу можно снова сформировать по две  $(N/4)$ -точечные последовательности, ДПФ которых также в совокупности образуют ДПФ исходной последовательности  $x(n)$ . В результате на  $L$ -м этапе прореживания получаются  $(N/2)$  двухточечные последовательности, ДПФ которых вычисляется в соответствии с базовой операцией (8.19), и образуют вместе ДПФ исходной последовательности  $X(k)$ .

Однако из-за прореживаний в частотной области **порядок следования частотных выборок ДПФ оказывается при этом неестественным – двоично-инверсным**, требующим по завершении вычисления дополнительных перестановок. Они выполняются так же, как и перестановки входной последовательности  $x(n)$  перед вычислением БПФ с прореживанием по времени. **Входная же последовательность** здесь имеет **естественный порядок следования**. Это является полезной в ряде случаев отличительной особенностью данного алгоритма.

Полный сигнальный граф БПФ с прореживанием по частоте является зеркальным отображением сигнального графа БПФ с прореживанием по времени (рис. 8.9 для  $N = 8$ ).

Блок-схема алгоритма программной реализации БПФ с прореживанием по частоте получается с учетом свойственных ему закономерностей и представлена на рис. 8.12. При необходимости выполнения перестановок выходной последовательности  $X(k)$  можно воспользоваться блок-схемой алгоритма перестановок рис. 8.10.

Оба алгоритма БПФ имеют одинаковую вычислительную эффективность, определяемую (8.17).

Присущие им особенности позволяют совместно и эффективно использовать их при реализации нерекурсивных цифровых фильтров на основе ДПФ (БПФ) (рис. 8.13).

С помощью БПФ с прореживанием по частоте, не требующего перестановок на входе, вычисляются ДПФ входной последовательности  $x(n)$  и импульсной характеристики  $h(n)$ , а с помощью БПФ с прореживанием по времени вычисляется ОДПФ их произведения  $Y(k)$ , имеющего необходимый для данного алгоритма двоично-инверсный порядок отсчетов. Выходные отсчеты ОДПФ при этом получаются в естественном порядке, в результате чего полностью исключается необходимость перестановок отсчетов и частотных выборок в процессе обработки.

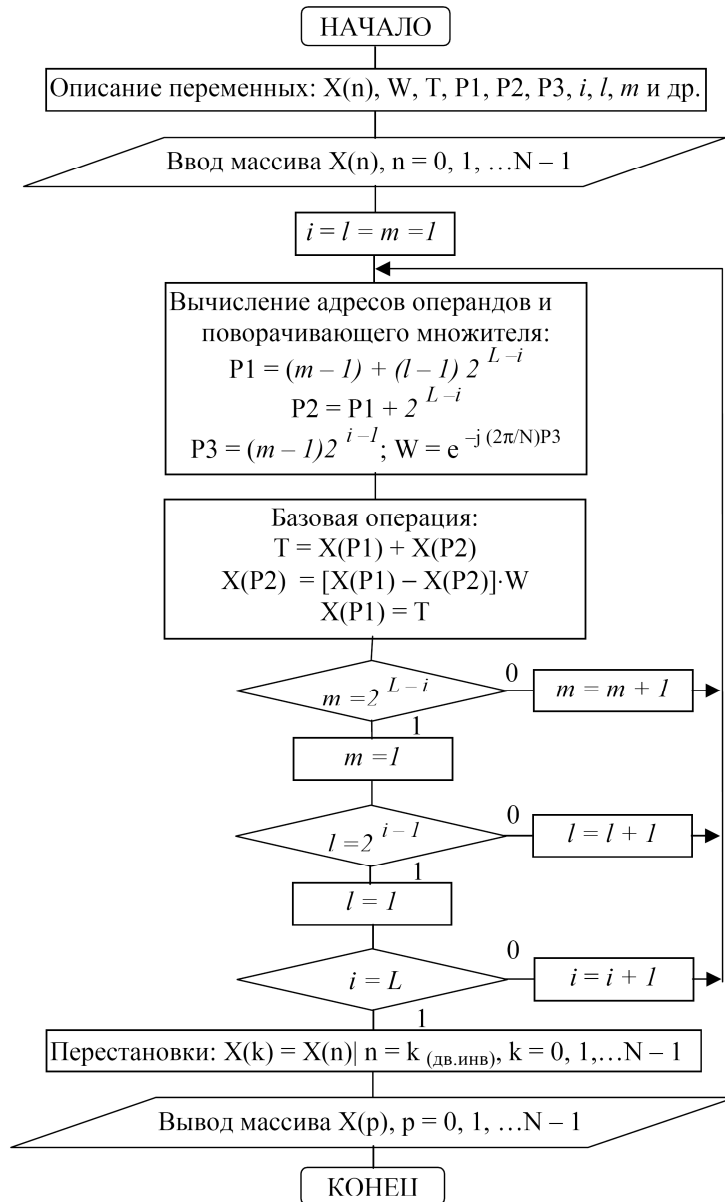


Рис. 8.12. Блок-схема алгоритма программной реализации БПФ с прореживанием по частоте

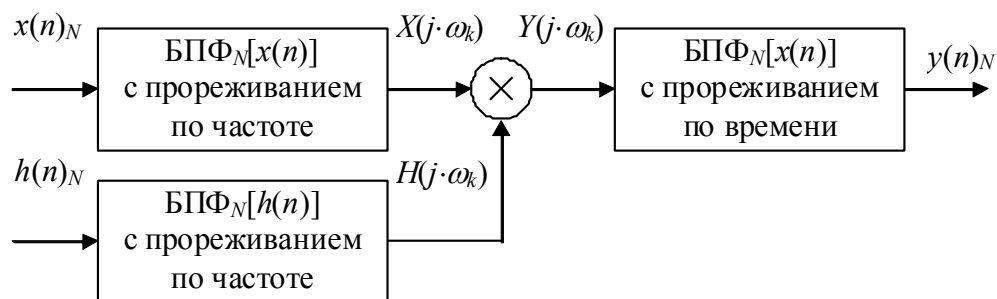


Рис. 8.13. Структура нерекурсивного фильтра на основе БПФ с прореживанием по времени и по частоте

## 8.8. Вычисление ОДПФ на основе алгоритмов БПФ

Как уже отмечалось, алгоритмы БПФ можно использовать и для эффективного вычисления ОДПФ, которое для последовательности  $x(n)$  определяется как

$$x(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-kn}; \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Применяя дважды к этому выражению операцию комплексного сопряжения (символ  $*$ ), получим:

$$x(n) = \frac{1}{N} \cdot \left[ \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) \cdot W_N^{-kn} \right]^* = \frac{1}{N} \cdot \left\{ \text{ДПФ}_N[X^*(k)] \right\}^*. \quad (8.21)$$

Таким образом, чтобы вычислить ОДПФ, нужно перейти от  $X(k)$  к  $X^*(k) = X_{re}(k) - j \cdot X_{im}(k)$ , изменив знак перед мнимой составляющей; вычислить БПФ последовательности  $X^*(k)$  и аналогичным образом поменять на обратный знак перед мнимой составляющей в общем случае комплексной выходной последовательности БПФ  $x^*(n)$ , приведя ее к  $x(n)$ .

**Для вещественных выходных последовательностей** необходимость в последнем преобразовании отсутствует.

Масштабирование ОДПФ выполняют либо делением на  $N$  входной  $X(k)$  или выходной  $x(n)$  последовательностей, либо умножением на  $1/2$  текущих результатов поэтапного вычисления БПФ.

Часто во многих программах БПФ предусмотрен параметр, задающий тип вычисляемого преобразования Фурье – ДПФ или ОДПФ.

Алгоритмы БПФ обрабатывают в общем случае комплексные входные последовательности. **Для вещественной входной последовательности  $x(n)$**  можно учесть, что ДПФ ее удовлетворяет **условию симметрии**

$$X(k) = X^*[N-k],$$

и получить дополнительную экономию вычислений и памяти.

При этом возможны два варианта [21].

**В первом** из них с помощью одного  $N$ -точечного БПФ одновременно вычисляют БПФ двух  $(N/2)$ -точечных последовательностей  $x_1(n)_{N/2}$  и  $x_2(n)_{N/2}$ , представляя их в виде реальной и мнимой частей  $N$ -точечной комплексной последовательности  $x(n) = x_1(n) + j \cdot x_2(n)$ .

При этом ДПФ последовательностей  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  по результатам вычисления БПФ разделяются по правилу:

$$X_1(k) = \frac{1}{2} \cdot [X(k) + X^*(N-k)]; \quad X_2(k) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot [X(k) - X^*(N-k)];$$

$$X(N) = X(0);$$

$$k = 0, 1, \dots, (N/2) - 1.$$

## 8.9. Контрольные вопросы

1. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) периодических последовательностей. Обратное ДПФ. ДПФ конечных последовательностей.
2. Алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье (БПФ) с прореживанием по времени.
3. Взаимное дополнение алгоритмов БПФ с прореживанием по частоте и по времени при реализации ЦФ. Оценка эффективности уменьшения операций, необходимых для расчета ДПФ методами БПФ.
4. Применение ДПФ при спектральном анализе. Определение амплитудного спектра по ДПФ.
5. Применение БПФ при фильтрации.
6. Вычисление ОДПФ с помощью алгоритмов БПФ.

## 9. УСТРОЙСТВА ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

При подготовке раздела использованы следующие источники: [8, 14, 15].

### 9.1. Способы реализации алгоритмов ЦОС

Среди алгоритмов ЦОС с точки зрения организации вычислений можно выделить как простые, так и чрезвычайно сложные. Тем не менее независимо от сложности алгоритма вычисления осуществляются с помощью **базовых операций**: сложения, вычитания, умножения.

**Возведение в степень** – это многократное умножение, а **деление** – многократное вычитание, причем частное может быть как целым, так и дробным числом, поэтому при организации деления необходимо задавать желаемую точность частного.

Поскольку вычислительные операции производятся с данными, задерживаемыми относительно друг друга на один и более периодов дискретизации  $T_d$  с помощью **элементов задержки**, представляющих собой регистры (ячейки памяти), объединяемые в линии задержки, необходимо иметь возможность осуществлять **пересылки и сдвиги данных**.

Кроме того, для управления вычислительным процессом необходимо предусмотреть и **логические операции**.

Выше перечисленных операций достаточно для построения алгоритма любой сложности (в математической логике доказывается соответствующая теорема).

Принципиальная возможность вычисления того или иного алгоритма вовсе не означает, что используемый способ реализации всегда удовлетворит практическим нуждам. Важнейшим фактором, определяющим пригодность созданной процедуры вычисления для **систем реального времени**, является **время вычисления** одного отсчета (**количество шагов**).

Однако время выполнения алгоритма зависит не только от процедуры, представляющей этот алгоритм, но и от способа реализации алгоритма. Возможны три способа реализации алгоритмов ЦОС:

- аппаратный;
- программный;
- аппаратно-программный.

**Аппаратная реализация** подразумевает использование разнообразных функциональных блоков: регистров, сумматоров, умножителей,

шифраторов, дешифраторов, счетчиков, линий задержки, устройств памяти, сдвигателей, логических элементов, программируемых логических матриц, больших интегральных схем и т. д. Совокупность функциональных блоков и связей между ними определяет реализуемый алгоритм.

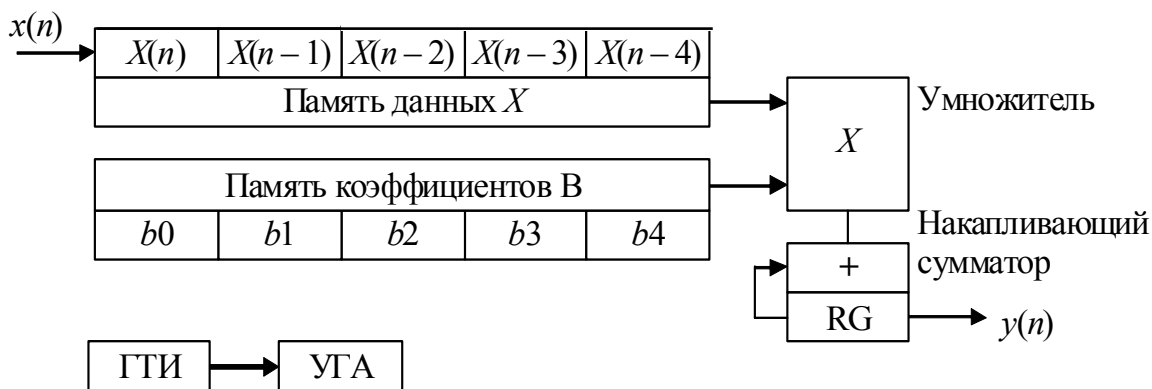


Рис. 9.1. Аппаратная реализация нерекурсивного цифрового фильтра

**Программная реализация** подразумевает представление алгоритма в виде программы, которую последовательно от команды к команде выполняет один или одновременно несколько независимых блоков. Программа должна быть написана на языке программирования, соответствующем конкретному операционному блоку. Для персонального компьютера это будет любой из языков высокого уровня (C++, Java, Pascal), а для микропроцессорного комплекта или цифрового процессора обработки сигналов (ЦПОС) – соответствующий язык ассемблера.

Недостатком программной реализации является низкое быстродействие по причине последовательного выполнения операций в процессоре. И как бы ни увеличивали скорость выполнения команд, она будет оставаться ниже производительности соответствующего устройства, реализованного аппаратно.

**Аппаратно-программная реализация** подразумевает, что часть функций системы ЦОС выполняется аппаратно (аналого-цифровое и цифро-аналоговое преобразование, умножение, умножение с накоплением, прием и передача данных и т. д.), а другая часть функций – программно.

При таком подходе имеется возможность заменить длительные вычислительные операции аппаратным обращением к различным модулям (памяти, умножителю-накопителю, дешифратору и т. д.), однако действует закон, согласно которому невозможно получить абсолютный выигрыш: любой выигрыш требует определенной платы за себя.



Разумное сочетание аппаратных и программных средств позволяет снизить требования к вычислительным возможностям элементной базы и упростить реализацию систем ЦОС в целом.

## 9.2. Особенности алгоритмов ЦОС, влияющие на элементную базу

### 1. Высокая скорость поступления данных

Например, пусть отсчеты аудио сигнала поступают в устройство обработки со скоростью до 20 000 отсчетов в секунду, каждый из них может содержать от 8 до 16 битов (в зависимости от разрядности АЦП). Отсчеты согласно выбранному алгоритму преобразуются в кадры, параметры которых и скорость в канале связи показаны в табл. 9.1. Ясно, что чем больше битов содержит кадр и чем меньше его длительность, тем естественнее звучит синтезируемый на приеме сигнал.

Таблица 9.1

*Параметры кадров*

Длина кадра (бит)	Длительность кадра (мкс)	Скорость в канале (бит/с)
53	22,5	2400
144	30	4800
80	10	8000

Скорость обработки данных определяется производительностью процессора, которая выражается количеством миллионов условных одноцикловых команд, выполняемых в секунду (табл. 9.2): в **MIPS** (Million Instructions Per Second) для процессоров с ФТ и в **MFLOPS** (Million Float Operations Per Second) для процессоров с ПТ.

Таблица 9.2

*Пример характеристик семейств процессоров по тактовым частотам и производительности*

Процессоры	Тактовая частота (МГц)	Производительность (MIPS)
TMS320C2xxx	20–80	20–40
TMS320C5xxx	30–133	30–532
TMS320C6xxx	167–250	до 2000
ADSP-21xx	40–100	75–150

Производительность, выражаемая в MIPS (MFLOPS), является пиковой, предельно возможной для данного процессора. **Реальная производительность** может быть значительно меньшей, и потому ее оценивают временем выполнения **стандартных алгоритмов**, в частности временем выполнения точечного БПФ. По этому показателю процессор ADSP-21160 (100 МГц, 600 MFLOPS) имеет преимущество перед про-

цессором TMS320C6701 (167 МГц, 1000 MFLOPS), поскольку выполняет такое БПФ за 90 мкс, а его конкурент – за 120 мкс. Такая неожиданность объясняется разной полосой пропускания системы ввода/вывода, размером и типом внутренней памяти данных, количеством поддерживаемых циклических буферов и т. д.

Другой способ определения реальной производительности, называемый BDTImark (см. <http://www.bdti.com>), состоит в тестировании ЦПОС на группе специальных задач. Результат тестирования выражается в удельных условных единицах (табл. 9.3): чем выше производительность, тем большим количеством единиц оценивается процессор.

Таблица 9.3

*Производительность процессоров в единицах BDTImark*

Процессоры	Производительность	
	Пиковая (MIPS)	Реальная в единицах BDTImark
Lucent DSP161210	100	36
Motorola DSP56303	100	25
TMS320VC549	100	25
ADSP-2189M	75	19
TMS320C6201	1000	600

Из табл. 9.3 следует, что:

- нет пропорциональной зависимости реальной производительности от пиковой;
- процессоры с одинаковой пиковой производительностью не обязательно имеют одинаковую реальную производительность.

## **2. Широкий диапазон изменения значений входных/выходных данных**

Обычно диапазон данных составляет 40–80 дБ, а в радиоприемных устройствах может достигать до 100 дБ. Следовательно, в ряде случаев необходимо иметь такую элементную базу, которая обеспечивала бы организацию обработки данных большой разрядности. Если учесть, что один бит соответствует 6 дБ, то разрядность регистров сомножителей при различных диапазонах обязана быть такой, как указано в табл. 9.4, а регистры произведений должны иметь удвоенную разрядность.

Таблица 9.4

*Динамический диапазон и разрядность*

Динамический диапазон (дБ)	Разрядность регистров сомножителей	Разрядность регистра произведения
40	7	14
60	10	20
80	14	28
100	17	34

Динамический диапазон данных определяется в первую очередь разрядностью АЦП, которая на современном этапе достигает 20–24, т. е. предел динамического диапазона по АЦП составляет около 120–144 дБ. В действительности за счет эффектов квантования динамический диапазон оказывается несколько меньшим, нежели при указанной в табл. 9.4 разрядности.

Разрядность в 7–10 битов вполне удовлетворяет контроллеры, используемые в системах управления.

Для систем обработки речи и звука минимально допустимой является разрядность в 13–14 битов.

Динамический диапазон, точность вычислений и мощность собственного шума цифровой цепи зависят не только от разрядности, но и от типа арифметики: с фиксированной точкой (ФТ) или с плавающей точкой (ПТ). Большинство фирм (табл. 9.5) выпускают процессоры с обоими типами арифметики.

Таблица 9.5

*Тип арифметики и производительность процессоров*

Фирма	Процессоры	Тип арифметики	Разрядность данных	Производительность (MIPS)
Analog Devices	ADSP-21xx	ФТ	16	33,3
	ADSP-21xxx	ПТ	32	40
Motorola	DSP5600x	ФТ	24	40
	DSP563xx	ФТ	24	80
	DSP96002	ПТ	32	20
Texas Instruments	TMS320C2xx	ФТ	16	40
	TMS320C3xx	ПТ	32	25
	TMS320C4xx	ПТ	32	30
	TMS320C5xx	ФТ	16	50
	TMS320C54x	ФТ	16	50
	TMS320C5000	ФТ	16	40–2000
	TMS320C662x	ФТ	32	1200–2400
	TMS320C67x	ПТ	32	600–1000
TMS320C8xx	ФТ	8/16	50	

### **3. Большое количество операций сложения, умножения и логических операций**

Как показывалось ранее, эти операции требуются для вычисления одного выходного отсчета. Кроме того, все виды сложной обработки могут быть представлены композицией рассмотренных выше операторов: свертки, рекурсии, ДПФ, нелинейных и логических преобразований. Отсюда следует, что элементная база должна быть ориентирована на быстрое выполнение таких операторов. В частности, должно быть организовано **аппаратное умножение с накоплением** (сложение локальных произведений) и создана большая память данных и память программ с удобным и быстрым доступом к ним.

### **4. Необходимость обеспечения гибкости и перестройки систем ЦОС**

Данное свойство связано с изменением разнообразных параметров, коэффициентов и данных в регулируемых и адаптивных системах. Именно адаптивные системы находят все большее применение в телекоммуникации для подавления эхо-сигналов разнообразной природы, коррекции модемов (устранение сдвига частоты и дрожания фазы – джиттера), коррекции характеристик канала связи, построения вокодеров с линейным предсказанием и т. д.

### **5. Параллелизм алгоритмов**

Параллелизм проявляется в том, что для каждого набора входных данных выполняются такие действия, которые могут совмещаться по времени. Например, параллельная обработка стереоканалов в процессоре платформы TMS320C6xxx за счет особой организации архитектуры.

### **6. Регулярность алгоритмов**

Т. е. повторяемость отдельных операций. Типичными примерами являются операция «бабочка» в БПФ и алгоритм Горнера для вычисления полиномов.

## **9.3. Основные свойства ЦПОС**

Сказанное выше позволяет выделить основные свойства ЦПОС, обеспечивающие эффективную реализацию алгоритмов ЦОС:

- быстрое выполнение типовых операций ЦОС;
- аппаратная реализация комплексной операции умножения с накоплением (суммирование локальных произведений);
- применение арифметики с ФТ и ПТ с разнообразной разрядностью;
- параллельное выполнение отдельных частей алгоритма, которое достигается аппаратной реализацией ряда типовых алгоритмов;

- большая внутрикристалльная память данных и память программ;
- разнообразие режимов адресации применительно к различным задачам: организация буферов, поддержка бит-реверсивной адресации в БПФ и т. д.;
- обработка в реальном времени данных, поступающих с высокой скоростью;
- наличие внутрикристалльной периферии (последовательных и параллельных интерфейсов, портов ввода/вывода, таймеров);
- малое время обращения к элементам внешней периферии.

Обобщение перечисленных свойств, характерных для разнообразных ЦПОС, и краткое описание их роли в системах цифровой обработки сигналов приведены в табл. 9.6.

Таблица 9.6

*Общие свойства ЦПОС*

Свойства	Применение
Быстрое умножение с накоплением	Большинство алгоритмов ЦОС (фильтрация, преобразования, спектральный анализ, нелинейная обработка и т. д.)
Архитектура с параллельным доступом к памяти	Увеличение производительности, поскольку многие операции ЦОС, работающие с большими объемами данных, требуют чтения команд программы и многократного обращения к данным во время каждого командного цикла
Режимы специальной адресации	Эффективная поддержка массивов данных и буферов типа FIFO
Управление специальными программами	Эффективное управление циклами в многоитеративных алгоритмах ЦОС; быстрое прерывание, поддерживающее часто повторяемые команды типа ввода/вывода
Внутрикристалльная периферия и интерфейсы ввода/вывода	Внутрикристалльная периферия, включающая в себя разнообразные устройства (командеры, кодеки, таймеры, интерфейсы ввода/вывода, приспособленные к внешней периферии общего назначения и др.), позволяет разрабатывать компактные системы малой стоимости

Повсеместное распространение ЦОС ставит перед разработчиками новые виды задач, которые либо не могут быть обеспечены одним процессором, либо это такие узкоспециализированные задачи, решение которых возможно только на более сложных процессорах.

В подобных случаях создаются специальные ЦПОС (ASIC), которые по требованиям заказчика могут содержать дополнительные функциональные блоки: блок бит-манипуляций, блок помехоустойчивого кодирования, устройства, автоматически реализующие БПФ и т. д.

Кроме заказных процессоров создаются мультипроцессоры на базе однокристалльных.

## 9.4. Общие принципы построения и архитектура ЦПОС

### 9.4.1. Понятие об архитектуре процессора

Термин «архитектура» обычно используется для описания состава, принципа действия, конфигурации и взаимного соединения основных узлов вычислительной системы. Этот термин включает в себя также изложение возможностей программирования, форматов данных, системы команд, способов адресации и т. д. Таким образом, термин «архитектура» относится как к аппаратным средствам или программному обеспечению, так и к их комбинации.

С момента появления самых первых ЦПОС (1982 г.) их архитектура формировалась алгоритмами ЦОС. Любые особенности этих процессоров определяются требованиями, возникающими при реализации алгоритмов цифровой обработки сигналов (ЦОС). Исследование типичных алгоритмов ЦОС, их вычислительных требований является лучшим способом для изучения и понимания развития архитектуры ЦПОС.

Традиционным простым примером, на котором иллюстрируются особенности алгоритмов ЦОС и процессоров ЦПОС, является алгоритм КИХ-фильтра.

Выходной сигнал фильтра определяется выражением

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) \cdot x(n-i), \quad (9.1)$$

где  $x(n)$  – отсчеты входного сигнала;  $h(i)$  – коэффициенты фильтра.

В соответствии с алгоритмом, выборки входного сигнала умножаются на коэффициенты фильтра и суммируются. Подобные вычисления используются и во многих других алгоритмах ЦОС. Таким образом, базовой операцией ЦОС является операция умножения и добавление (накопление) результата умножения. Подобную операцию часто обозначают при описаниях мнемоникой **МАС**.

Для того чтобы работать с высокой производительностью, процессор должен выполнять операцию МАС за один цикл (такт) работы процессора. Отсчеты сигнала, коэффициенты фильтра и команды программы хранятся в памяти. Для выполнения операции требуется произвести три выборки из памяти: команды и двух сомножителей. Следовательно, для работы с высокой производительностью эти три выборки необходимо произвести за один такт работы процессора. При этом подразумевается, что результат операции остается в устройстве выполнения операции (в центральном процессорном устройстве ЦПУ), а не помещается в память. В более общем случае нужна еще операция записи результата в память, т. е. необходимы четыре обращения к памяти за цикл. Таким образом, производительность процессора определяется прежде

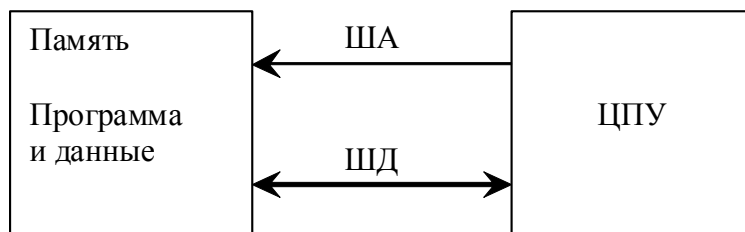
всего возможностями обмена данными между ЦПУ и памятью процессора и организацией их взаимодействия.

Ниже рассматриваются различные идеи и методы, используемые в ЦПУ для повышения производительности системы. Эти идеи являются общими для большинства процессоров и в той или иной форме сводятся к параллелизму – одновременной работе разнообразных модулей, одновременному выполнению разных операций в нескольких модулях.

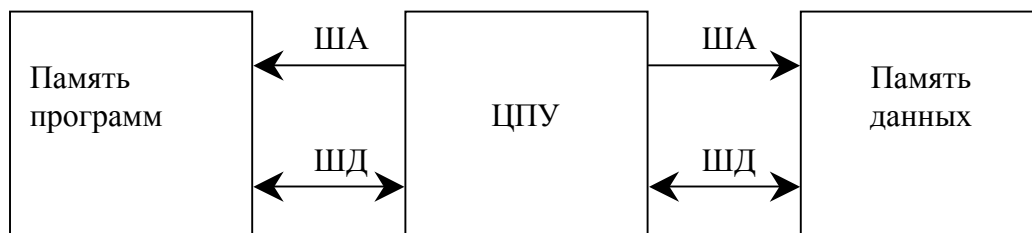
#### **9.4.2. Архитектура фон Неймана и Гарвардская архитектура**

На рис. 9.2 показана традиционная структура вычислительной системы, соответствующая вычислительной машине фон Неймана. Американский математик Д. фон Нейман (1903–1957) предложил концепцию вычислительной машины (и в частности, хранимой в памяти программы), которая лежит в основе большинства современных машин. Одним из основных моментов этой концепции является то, что система обладает единой памятью, в которой хранятся и команды программы, и данные. Система содержит одну шину данных (ШД), по которой передаются и команды программы, и данные. Следовательно, в такой системе требуется три цикла для выборки команды и двух сомножителей (т. е. для выполнения операции МАС).

В процессорах ЦПОС применяется Гарвардская архитектура вычислительной системы, приведенная на рис. 9.3. Подобная архитектура названа по работе, выполненной в 40-х годах XX века в университете Гарварда под руководством Г. Айкена (1900–1973). В соответствии с этой концепцией для хранения программы (команд) и данных используются различные устройства памяти. Соответственно, в системе имеется два комплекта шин для этих устройств: шина адреса памяти программ (ШАПП), шина данных памяти программ (ШДПП) и шина адреса данных (ШАПД), шина данных памяти данных (ШДПД) для работы с памятью данных. В системе с Гарвардской архитектурой можно одновременно производить операции обращения к различным устройствам, т. е. синхронно выбирать команду из памяти программ ПП по шине и сомножитель из памяти данных ПД по шине ШДПД. Соответственно, при этом для выполнения операции МАС требуется два цикла работы процессора. Реально за счет различных дополнительных мер почти всегда время операции МАС сводится к одному циклу. Различные варианты реализации операции рассмотрены ниже. В частности, ПП иногда используется не только для хранения команд, но и данных. Поэтому при описаниях ЦПОС говорят о модифицированной Гарвардской архитектуре.



*Рис. 9.2. Архитектура процессоров фон Неймана*



*Рис. 9.3. Гарвардская архитектура процессоров*

Следует лишь иметь в виду, что несколько комплектов шин для одновременной выборки данных и команд из ПД и ПП используются только внутри кристалла ЦПОС при работе с внутренней памятью процессора. Для обращения к внешней памяти во всех процессорах применяется один комплект внешних шин: ВША и ВШД. Это определяется ограничениями, накладываемыми технологией на количество выводов ИС. Поэтому разработчики систем ЦОС стремятся использовать только внутреннюю память; процессоры выпускаются с большой внутренней памятью как ПП, так и ПД. При использовании внешней памяти, особенно для хранения программы и данных, увеличивается время, затрачиваемое на выполнение операций.

### **9.4.3. Структура процессора ЦПОС**

На рис. 9.4 представлена обобщенная структура процессора ЦПОС, отражающая только основной состав узлов процессора и их взаимодействие.

Для хранения информации в процессоре используются память программ ПП и память данных ПД, которые связаны с другими устройствами шинами. ЦПОС имеет шины различного назначения.

**Внутренняя (внутрикристалльная) память**

**Шина адреса памяти программ ШАПП** предназначена для передачи адресов ячеек памяти программ.

**Шина данных памяти программ ШДПП** служит для передачи команд, хранимых в памяти программ, а также данных при использова-



нии ПП для хранения данных (например, таблиц коэффициентов цифровых фильтров).

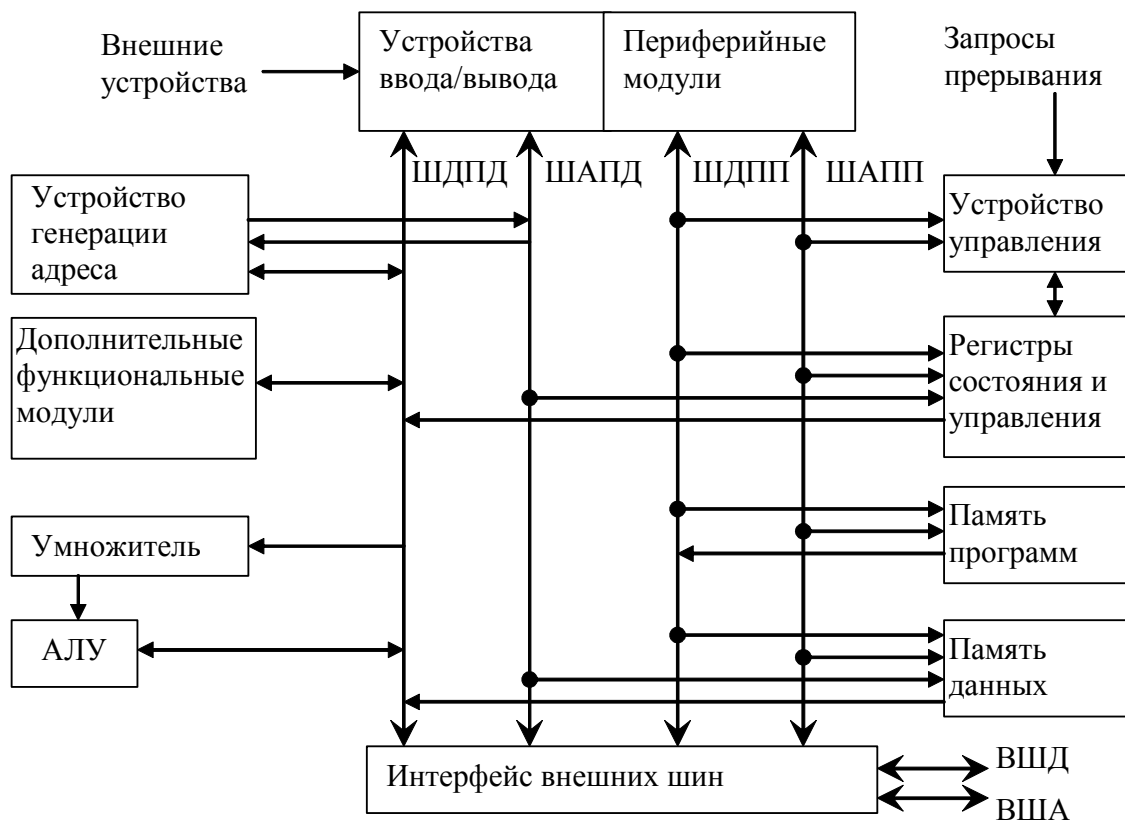


Рис. 9.4. Обобщенная функциональная схема ЦПОС

**Шина адреса и шина данных памяти данных (ШАПД и ШДПД)** применяются для передачи адреса и данных памяти данных.

Количество шин, особенно шин данных в различных процессорах, существенно отличается. Увеличение количества ШДПД связано с увеличением производительности процессоров за счет одновременной передачи данных для использования в различных модулях. Это дает возможность модулям одновременно выполнять определенные операции. В некоторых процессорах (например, TMS320C5000) производится **разделение функций шины данных**: используются различные шины данных для чтения и записи информации.

### Внешняя память

#### Интерфейс внешних шин, внешние шины адреса ВША и данных ВШД

Все процессоры ЦПОС имеют внутреннюю (внутрикристальную) память. Однако внутренней памяти процессора иногда оказывается недостаточно для хранения программ и данных. Кроме того, процессор может не иметь внутренней памяти типа ПЗУ для хранения программы,

которая не изменяется. В этих случаях может использоваться внешняя память, связь с которой осуществляется через интерфейс внешних шин и внешние шины адреса ВША и данных ВШД. Как уже указывалось ранее, количество внешних шин ограничено двумя, поэтому при использовании внешних ПП и ПД одновременное обращение к ним может вызвать конфликт и задержку операций чтения или записи. Внешние шины могут использоваться не только для обращения к внешней памяти, но и к другим адресуемым устройствам, например параллельным портам.

**Устройство управления** выполнением программы в соответствии с командами, читаемыми из ПП, вырабатывает сигналы управления работой всех узлов процессора.

### **Регистры состояния и управления**

Устройство управления связано с регистрами состояния и управления. В эти регистры, адресуемые как ячейки памяти, заносится на этапе инициализации системы различная информация, управляющая работой процессора, например информация об используемой конфигурации памяти и распределении адресов между внешней и внутренней памятью. В эти же регистры заносится информация о текущем состоянии процессора, например о наличии на входе запроса на прерывание.

### **Устройства ввода/вывода**

На устройство управления от внешних устройств ВУ поступают запросы на прерывание основной программы работы. Как уже отмечалось, ЦПОС, как правило, работают с ВУ и их сигналами в реальном масштабе времени. Работа в режиме с прерываниями, и в частности ввод/вывод информации по прерываниям, позволяет процессору согласовывать свою работу и прием/выдачу сигналов со скоростью (частотой) работы ВУ. Ввод/вывод информации от ВУ осуществляется через устройства ввода/вывода, в качестве которых в основном применяются различного вида последовательные порты.

**Периферийные модули.** ЦПОС имеют большое количество периферийных модулей, состав и количество которых определяется назначением процессора.

**Таймеры.** Все процессоры имеют различные таймеры, предназначенные, скажем, для генерации сигналов необходимых частот (например частоты дискретизации внешнего АЦП) и внутренних запросов на прерывание по таймеру, с помощью которых можно организовать временной опрос внешних датчиков информации.

**АЛУ, умножитель** и дополнительные функциональные узлы предназначены для выполнения операций над обрабатываемой информацией. Принципы их построения определяют производительность процессора, и они описываются ниже.

**Устройство генерации адреса (УГА)** формирует адреса данных, извлекаемых из ПД. Для одновременной выборки нескольких операндов необходимо формировать одновременно несколько адресов. Для этого процессор может иметь несколько УГА. Эти устройства включают в себя арифметические модули для вычисления адресов при различных сложных методах адресации.

#### **9.4.4. Основные особенности процессоров ЦПОС**

##### **1. Конвейерное выполнение команд**

Процесс выполнения команды во всех процессорах разбивается на несколько этапов. Конвейерный принцип выполнения команд состоит в том, что различные этапы **разных команд** выполняются одновременно.

##### **2. Умножитель**

Основное место среди подобных модулей занимает умножитель, используемый во всех ЦПОС. Он производит операцию умножения данных в формате «слово» процессора ( $16 \times 16$  для 16-разрядных процессоров) за один цикл (в отличие от программных методов реализации операции умножения, которые требуют многих циклов).

Например, в процессоре **i8086** операция сложения занимает три такта, операция умножения – больше 100 тактов.

##### **3. Сдвигатели**

Сдвиги операндов в ту или иную сторону на определенное количество разрядов можно производить в АЛУ, однако при этом требуется отдельная команда. Во многих ЦПОС имеются аппаратно реализованные модули сдвига, расположенные в цепях передачи операндов между различными модулями. Они позволяют производить сдвиги при передаче и загрузке операндов без использования дополнительных команд.

##### **4. Дополнительные АЛУ**

Дополнительно к основному АЛУ, выполняющему различные арифметические и логические операции, в ЦПОС применяют вспомогательные арифметические устройства. Они позволяют выполнять различные математические операции одновременно с основным АЛУ, повышая производительность системы.

## 5. Устройства генерации адреса УГА (AGU)

В процессорах ЦПОС используют специализированные устройства для генерации адресов данных в памяти данных. Эти устройства формируют или модифицируют адреса для обращения к операндам, размещенным в памяти данных ПД.

Формирование адресов при различных методах адресации, особенно специальных, связано с выполнением вычислений. УГА функционируют параллельно с другими модулями и позволяют одновременно с выполнением операций в АЛУ вычислять адреса операндов для следующей команды.

В них используются наборы регистров для хранения адресов и некоторых данных (например значений индексов или приращений при модификации адреса) и специализированные АЛУ.

Отдельно как устройства генерации адресов данных УГА выделяются в процессорах ADI (DAG), Motorola (AGU), TMS320C55X (DAGEN). В этих процессорах используются два устройства, позволяющие формировать одновременно два адреса для двух операндов.

## 6. Аппаратная организация циклов

Циклические процессы, т. е. повторение одиночных команд и их блоков, занимают значительное место среди алгоритмов ЦОС. Обычная организация циклов программным образом требует использования команд формирования и проверки условий окончания циклов, которые должны выполняться при каждом прохождении «тела» цикла. На выполнение этих команд затрачивается время. Поэтому в ЦПОС используются устройства, которые позволяют организовать циклы с «нулевыми потерями» времени на организацию (проверку условий окончания).

## 7. Специальные методы адресации

Для реализации алгоритмов ЦОС в ЦПОС существуют специальные методы адресации. К ним, прежде всего, относятся бит-реверсивная и циклическая (циркулярная) адресации. Здесь опишем организацию циркулярных буферов, используемых при циклической адресации.

*Циркулярный буфер* представляет собой набор ячеек в памяти данных, обращение к которым производится по циклу, т. е. при достижении последней ячейки буфера очередное обращение производится не к следующей по порядку, а начальной ячейке буфера. На рис. 9.5 изображен буфер длиной 10 с физическими адресами ФА ячеек памяти  $(n - 1) - (n + 8)$ . Адреса ячеек в буфере обозначены «Ад буф» и имеют номера 1–10. Обращение к ячейкам буфера может идти в любом направлении: «вниз» и «вверх». При движении «вниз» после ячейки с номером ФА, равным  $(n + 8)$ , следующим будет являться обращение к

ячейке с адресом  $(n-1)$ , а при движении «вверх» после ячейки  $(n-1)$  – обращение к ячейке  $(n+8)$ . Изменение адреса при движении по буферу может происходить с любым индексом (шагом).

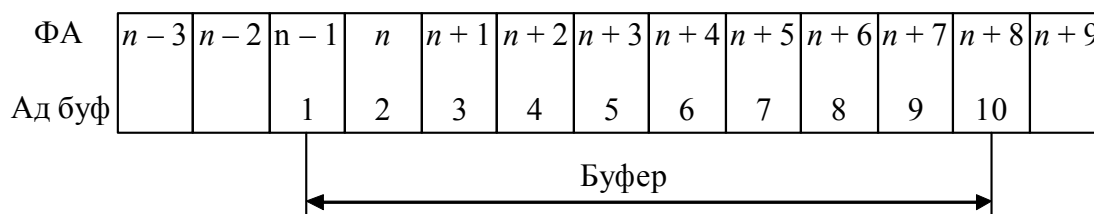


Рис. 9.5. Циркулярный буфер

Циркулярный буфер может использоваться, например, для организации линии задержки.

### 8. Комбинированные и специализированные команды

Большое количество разнообразных дополнительных к основному АЛУ функциональных узлов дает возможность производить в процессорах одновременно несколько действий. Это, в свою очередь, предоставляет возможность ввода и широкого использования комбинированных команд, осуществляющих одновременно несколько действий. Комбинированные команды применяются в основном в процессорах первого и второго поколений со «стандартной» и «улучшенной стандартной» архитектурой. В самых мощных высокопроизводительных процессорах выбрана архитектура **RISC** с набором упрощенных команд типа «регистр, регистр → регистр». Это объясняется тем, что сложные комбинированные команды плохо реализуются в компиляторах языка C и процессорах с несколькими АЛУ. В этом случае программы, написанные на языке C, проигрывают по эффективности программам на ассемблере. Следует отметить, что грамотное использование сложных комбинированных команд на ассемблере требует от программиста хорошего знания системы команд и архитектуры конкретного процессора.

Комбинированные команды, прежде всего, используются для выполнения основной операции ЦОС – умножения с накоплением – и различных ее вариантов.

### 9. Разнообразные устройства ввода/вывода и периферии

Решение задач ЦОС при использовании ЦПОС существенно облегчается из-за наличия в этих процессорах самых разнообразных устройств ввода/вывода информации и периферийных устройств.

К устройствам ввода/вывода относятся:

- параллельные и последовательные порты ввода/вывода, использующие различные протоколы передачи информации;

- каналы прямого доступа в память DMA, позволяющие вводить/выводить информацию в память системы без использования мощностей ЦПУ, т. е. без потери производительности системы;
- модули АЦП И ЦАП (16-разрядный дельта-сигма АЦП/ЦАП в процессорах DSP56156 Motorola, 16-канальные 10-разрядные АЦП в процессорах TMS320LF240X И TMS32024X);
- разнообразные модули, ориентированные на решение конкретных задач обработки сигналов: кодеки, декодеры, компрессоры;
- порты обмена информацией между процессорами при реализации многопроцессорной системы;
- сопроцессоры для решения специальных задач: сопроцессоры-декодеры избыточного кодирования Витерби (например, DSP16XX, DSP16XXX Lucent Technologies, TMS320C6416), сопроцессор Turbo Decoder (TMS320C6416), сопроцессоры для реализации цифровых фильтров (DSP56307, DSP56311 Motorola);
- интерфейсы передачи данных в режиме АТМ (UTOPIA), включающие контроллер АТМ, приемопередатчик 8-разрядных комбинаций со скоростью передачи/приема до 50 Мбит (TMS320C6416);
- генераторы сигналов ШИМ (широтно-импульсной модуляции) в DSP контроллерах (TMS320C24X и TMS240X).

### **10. ЦПОС с фиксированной (ФТ) и плавающей точкой (ПТ)**

Процессоры с фиксированной и плавающей точкой отличаются способностью обрабатывать сигналы и данные и используют соответствующие формы представления. При этом следует иметь в виду, что все процессоры с ПТ имеют набор команд для обработки данных как с ФТ, так и с ПТ, т. е. являются в этом смысле универсальными.

С другой стороны, в процессорах с ФТ всегда можно организовать обработку данных с ПТ, но программным образом. Соответствующие программы преобразования и обработки данных требуют достаточно много времени для выполнения.

Основные отличия процессоров с ФТ и ПТ заключаются в следующем:

- функциональные модули, выполняющие арифметические операции и операции умножения, в процессорах с ПТ по сравнению с ЦПОС с ФТ гораздо сложнее, т. к. алгоритмы выполнения операций над числами с ФТ и ПТ существенно отличаются;
- процессоры с ПТ имеют более разнообразные типы представления данных, системы команд для обработки данных как с ФТ, так и ПТ, и их взаимного преобразования;

- разрядность внутреннего представления данных в процессорах с ПТ, как правило, 32 разряда, в некоторых ЦПОС возможно использование укороченной формы представления.

Усложнение процессоров с ПТ приводит к тому, что их цена становится выше, чем процессоров с ФТ. Однако для многих применений это окупается большими преимуществами ЦПОС с ПТ. Основные преимущества сводятся к следующему:

- при использовании 32 разрядов и ПТ существенно повышается точность внутреннего представления данных;

- существенно расширяется возможный динамический диапазон сигналов и данных, т. е. отношение максимально возможного к минимально возможному значению сигнала и, соответственно, отношение сигнал/шум;

- при использовании процессоров с ПТ снимается проблема масштабирования данных с целью избежать переполнения при выполнении различных операций, и особенно операций накопления;

- большое разнообразие типов данных, и особенно данных с ПТ, приводит к тому, что архитектура ЦПОС с ПТ становится более дружелюбной для компиляторов с языка C; это, в свою очередь, позволяет получать более эффективные программы в ЦПОС с ПТ при использовании языков высокого уровня.

Достоинства процессоров с ПТ приводят к тому, что при их использовании построение системы ЦОС становится более легким и быстрым.

## **9.5. Основные типы ЦПОС**

### **9.5.1. Классификация процессоров ЦПОС**

При определении типов процессоров будем придерживаться терминологии, использованной в [14]. В соответствии с ней процессоры можно разделить с точки зрения архитектуры на следующие основные типы:

- стандартные (conventional);
- улучшенные стандартные (enhanced conventional);
- VLIW («очень длинное слово команды»);
- суперскалярные (superscalar);
- гибриды ЦПОС/микроконтроллер.

Это деление, естественно, носит условный характер, особенно для процессоров первых двух типов. Вопрос, куда отнести тот или иной конкретный процессор, может вызвать затруднение. Однако такая клас-

сификация представляется полезной для определения особенностей построения и архитектуры процессоров.

Следует также отметить, что фирмы-производители объявляют о появлении новых процессоров, в том числе на основе новых архитектур. Так что возможно появление процессоров, не укладывающихся в приведенную классификацию.

### 9.5.2. Стандартные процессоры ЦПОС (Conventional DSP)

Принципы построения процессоров этого типа рассмотрим на примерах реализации в них операции умножения с накоплением. Выполнение указанной операции отличается в процессорах различных фирм. Как уже отмечалось, для выполнения этой операции требуется произвести три выборки из памяти: команды и двух сомножителей.

#### Процессоры TI

Структура блока АЛУ и пути передачи данных в процессорах первых поколений приведены на рис. 9.6 и 9.7.

Итак, в процессоре требуется вычислять выражение

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) \cdot x(n-i),$$

т. е. в цикле выполнять операцию  $x(n-i) \cdot h(i)$  при различных значениях отсчетов сигнала  $x(n-i)$  и коэффициентов фильтра  $h(i)$ .

В процессорах с фиксированной запятой (TMS320C2X/2XX/24XX/5X) можно использовать два варианта вычисления.

#### Вариант 1

Коэффициенты фильтра и отсчеты сигнала хранятся в памяти данных, и для вычисления приведенного выше выражения в цикле выполняются последовательные команды, в которых адресуется память данных **dma** (data memory address).

**LT dma** ; загрузка 1-го сомножителя в регистр T  
**MPYA dma** ; умножение 2-го сомножителя на содержимое  
; регистра T, передача полученного произведения  
; в регистр P, добавление предыдущего произведения  
; (содержимого регистра P) к содержимому аккумулятора A

Схема выполнения операции изображена на рис. 9.6.

В цикле операция вычисления произведения с накоплением этим способом выполняется практически за два такта, т. к. на все вычисления добавляется команда прибавления последнего произведения **APAC**. Время вычисления суммы **n** произведений в тактах будет равно  $(2n + 1)$ . Такое время выполнения операции умножения с накоплением определя-



ется тем, что из памяти данных за один такт можно произвести одну выборку, в то время как для одноктактового выполнения операции требуется два обращения к памяти данных.

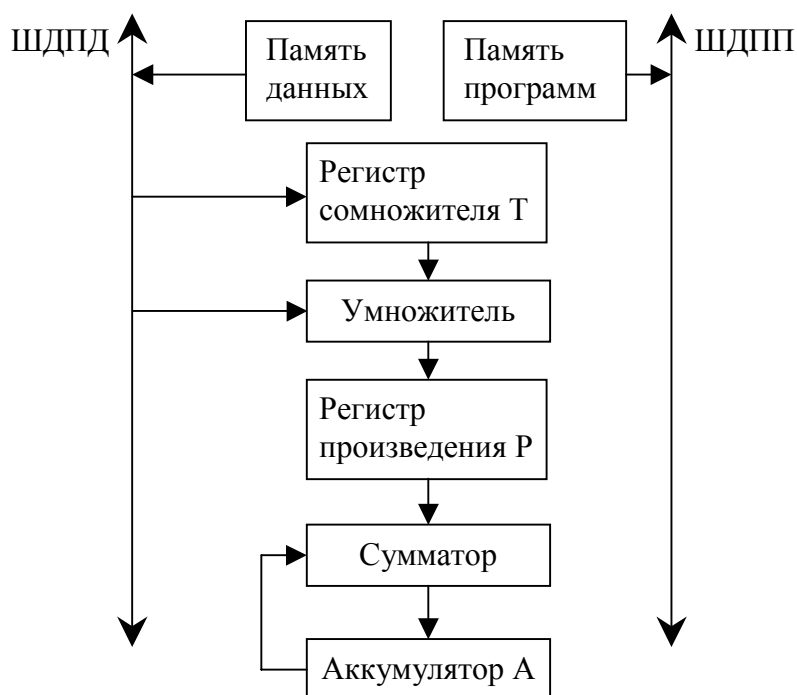


Рис. 9.6. Пути передачи данных при выполнении команд LT – МРУА

### Вариант 2

Для хранения коэффициентов фильтра используется память программ ПП. В этом случае для вычисления отсчета на выходе фильтра можно применять одну комбинированную команду MAC, которая позволяет адресовать для двух сомножителей память данных (**dma**, data memory address) и память программ (**pma**, program memory address):

- MAC **pma, dma** ; перемножение содержимого адресуемых ячеек
- ; ПП и ПД, передача полученного произведения
- ; в регистр Р, добавление предыдущего произведения
- ; (содержимого регистра Р) к содержимому аккумулятора А

Схема выполнения операции приведена на рис. 9.7.

При повторении MAC в цикле с помощью команды повторения RPT нет необходимости выбирать каждый раз слово команды из ПП. Поэтому команда становится практически одноктактовой (при повторении). Время вычисления суммы  $n$  произведений в тактах будет равно  $(n + 2)$ . При использовании для вычисления команды MAC (с целью получения времени вычислений  $(n + 2)$ ) для хранения коэффициентов необходимо задействовать только внутреннюю память программ.

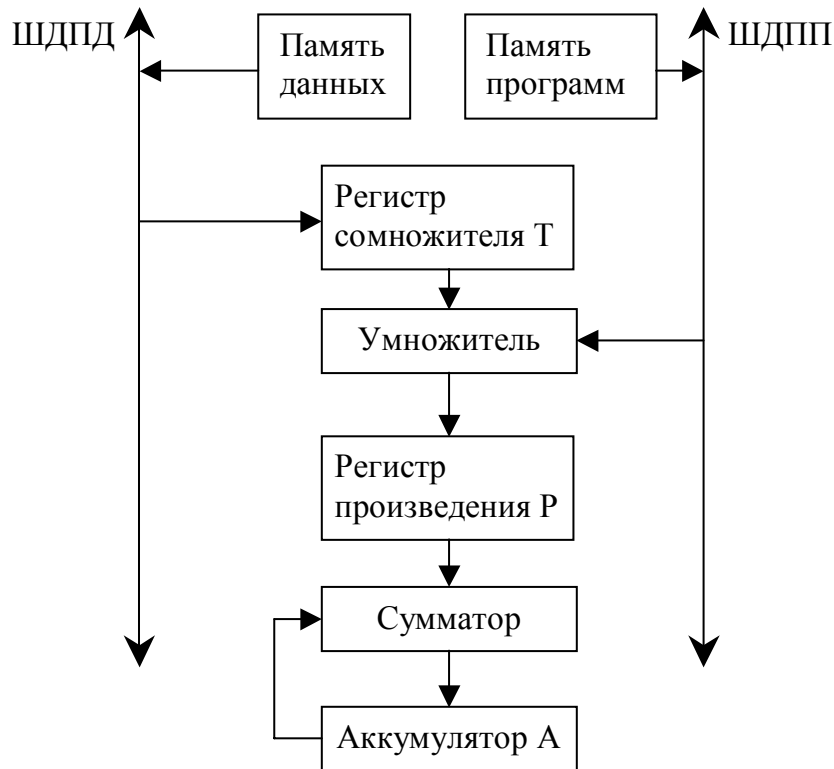


Рис. 9.7. Пути передачи данных при выполнении команды МАС

### 9.5.3. Улучшенные стандартные процессоры ЦПОС (Enhanced-conventional DSP)

Методом повышения производительности (помимо обычного метода увеличения тактовых частот), который используется при разработке ЦПОС, является расширение параллелизма работы. При этом можно идти двумя основными путями:

- увеличивать количество операций, производимых одновременно;
- увеличивать количество команд, выполняемых одновременно.

Процессоры, использующие первый вариант повышения производительности, относят к улучшенным стандартным процессорам (**Enhanced-conventional**), а процессоры, использующие второй вариант, – к процессорам типа **VLIW**.

Увеличение количества операций, производимых одновременно, в улучшенных стандартных (**Enhanced-conventional**) ЦПОС достигается:

- увеличением количества дополнительных функциональных и операционных узлов и модулей (умножители, сумматоры, АЛУ и т. д.);
- увеличением количества различных специализированных устройств и специализированных сопроцессоров (декодеры Витерби, сопроцессоры для построения цифровых фильтров и т. д.);

- «расширением» шин передачи данных (увеличением ширины шин) для повышения количества передаваемой одновременно информации;
- использованием памяти с многократным доступом (памяти с возможностью выполнения нескольких обращений за один такт);
- расширением и усложнением системы команд, которые позволяют использовать дополнительные функциональные модули.

Перечисленные меры являются традиционными для ЦПОС и использовались, начиная с самых первых процессоров. Поэтому точно разделить процессоры на стандартные и улучшенные не всегда возможно, поскольку многие процессоры занимают промежуточное положение между ними. К улучшенным стандартным можно отнести процессоры DSP56301 (Motorola), TMS320C55x (TI), ADSP-2116x, DSP16xxx (Lucent) и некоторые другие.

Однако при этом существенно усложняется архитектура и система команд процессора за счет появления многофункциональных комбинированных команд. Для того чтобы писать эффективные программы на ассемблере, необходимо хорошее знание архитектуры и системы команд процессора. Это в условиях усложнения системы становится более затруднительным. С другой стороны, подобная архитектура является недружественной для компиляторов языков высокого уровня (языка C). Как уже отмечалось выше, компиляторы эффективно используют только простые команды, характерные для архитектур типа RISC [15].

#### **9.5.4. Процессоры ЦПОС с архитектурой VLIW**

Как уже отмечалось, возможным способом повышения производительности является увеличение количества команд, выполняемых одновременно. Подобный метод реализован в процессорах с архитектурой VLIW (Very Long Instructions Word, очень длинное слово команды). Этот способ построения ЦПОС называют также Multi-Issue Architectures (многократные команды в параллельном режиме) [14].

Подобные процессоры используют упрощенную систему команд (**архитектура RISC** [15]), каждая из которых определяет единственную операцию. Несколько простых команд выполняются параллельно (одновременно) в независимых операционных модулях. Общая команда процессора формируется как большая **суперкоманда – набор (пакет) команд** для отдельных модулей – и, соответственно, имеет большую длину. Архитектура предполагает использование регистровых файлов большого размера для хранения операндов и результатов работы всех операционных модулей. При этом применяются команды типа «регистр, регистр → регистр», «память → регистр», «регистр → память». Коман-

да типа «регистр, регистр → регистр» означает, что источником двух операндов являются регистры и результат операции помещается в регистр. Длинные слова предполагают также существование многоуровневых шин передачи данных и слов команды.

Использование простой системы команд позволяет разрабатывать эффективные компиляторы программ на языке С и эффективные оптимизаторы. В результате можно получить исполняемые программы высокого качества при использовании для написания исходных программ языка высокого уровня.

К недостаткам ЦПОС с архитектурой VLIW следует отнести большие объемы памяти, требуемой для записи программы с длинными командами, и нерациональное использование этой памяти.

#### **9.5.5. Суперскалярные процессоры**

Суперскалярные процессоры (**superscalar**) отличаются от процессоров типа VLIW в связанных между собой моментах.

Команды суперскалярного процессора, предназначенные для отдельных операционных модулей, не объединяются в одну общую суперкоманду, а выступают самостоятельно.

Процессор имеет модуль, который определяет, какие из команд могут быть выполнены параллельно, и группирует их в пакет. Правила группировки основаны на зависимостях данных, используемых в командах последовательно, и ресурсах процессора.

Таким образом, если в процессорах VLIW планирование параллельно выполняемых команд возлагается на программиста, то в суперскалярных процессорах эту задачу решает сам процессор.

Один и тот же набор команд может по-разному выполняться на различных этапах выполнения программы. Поэтому вопрос о расчете и предсказании времени выполнения программы, что важно для систем реального времени, является неопределенным. При расчете на наихудший случай потенциальные возможности процессора будут использованы не полностью.

#### **9.5.6. Гибридные процессоры**

Класс микропроцессоров, которые называются **микроконтроллерами**, ориентирован на управление объектами в реальном масштабе времени. Это наиболее широкий класс микропроцессоров, обладающий наибольшей специализацией, разнообразием функций и параметров, разнообразием различных периферийных устройств. Вычислительные требования, предъявляемые к микроконтроллерам, зачастую достаточно

скромны. Микроконтроллеры широко применяют в качестве встроенных элементов в различные приборы.

Задачи управления некоторыми реальными объектами, например двигателями, требуют обработки сигналов и применения цифровых фильтров в цепях управления. Большие семейства ЦПОС различных фирм ориентированы на реализацию задач управления именно электроприводами. Примерами могут служить: семейство TMS320C24xx фирмы TI, в основе которого лежит ядро ЦПОС C2000; встраиваемые контроллеры семейства ADMC3xx фирмы ADI, в основе которого лежит 16-разрядное ядро ADSP-2171, и некоторые другие.

Существует много задач, которые требуют сочетания возможностей решения классических задач ЦОС и задач управления. Примерами могут служить приборы мобильной телефонии, где требуется обработка голосовых сигналов и управление клавиатурой, дисплеем и т. д., задачи построения интеллектуальных кассовых аппаратов. Классические микроконтроллеры хорошо решают задачи управления и мало эффективны в задачах ЦОС, а ЦПОС, наоборот. Поэтому одним из методов решения подобных задач до недавнего времени было использование двух отдельных процессоров. В последнее время появились гибридные процессоры, объединяющие в одном кристалле возможности микроконтроллера и ЦПОС.

### 9.6. Влияние архитектуры на возможности процессора

В качестве характеристики влияния особенностей архитектуры ЦПОС на его возможности и параметры в табл. 9.7 приведены сравнительные данные по реализации КИХ-фильтра и БПФ преобразования при использовании различных процессоров.

Таблица 9.7

*Влияние архитектуры ЦПОС на его возможности:*

*K1, T1 – количество тактов и время вычисления отсчета КИХ-фильтра;*

*T2 – время реализации БПФ на 256 точек*

Тип данных	Архитектура	Процессор	Частота, МГц	MIPS	K1	T1, мс	T2, мкс
ФТ 16 p	Стандартная	TMS320C54	120	120	730	6,1	
			160	–	–	–	65
ФТ 16 p	Улучшенная стандартная	DSP16xxx (Lucent)	120	120	757	6,3	–
ФТ 16/32 p	VLIW	TMS320C62	250	2000	347	1,4	–
			300	–	–	–	9
ФТ 16 p	VLIW	SC140 (Motorola)	300	1800	183	0,6	–

Окончание табл. 9.7

Тип данных	Архитектура	Процессор	Частота, МГц	MIPS	K1	T1, мс	T2, мкс
ФТ 16 р	Суперскалярная	LCI400 (LSI)	200	800	607	3,0	–
ПТ 32 р	Стандартная	ADSP-2106x	60	60	812	13,5	–
ПТ 32 р	Улучшенная стандартная	ADSP-2116x	100	100	573	5,7	–
ПТ 32 р	VLIW	TMS320C67x	167	–	500	2,5	21
ПТ	–	PII (Intel)	550	–	1498	2,7	–
			1000	–	–	–	9,5

### 9.7. Контрольные вопросы

1. Принципы построения и функционирования систем ЦОС. Методы реализации алгоритмов ЦОС. Базовые операции алгоритмов ЦОС.
2. Особенности алгоритмов ЦОС, влияющие на элементную базу.
3. Архитектура ЦПОС. Обобщенная структура ЦПОС.
4. Классификация ЦПОС по архитектуре. Особенности различных видов ЦПОС.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное учебное пособие предназначено для студентов специальности 200106 «Информационно-измерительная техника и технологии».

Поскольку широкое распространение методов цифровой обработки ограничено прежде всего трудностью в понимании теории, основное внимание в пособии уделено основам теории математического описания и синтеза цифровых систем: КИХ- и БИХ-фильтров, фильтров на основе ДПФ, анализаторов спектра.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. – Киев: Вища школа, 1983. – 455 с.
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов / пер. с англ. под ред. Ю.Н. Александрова. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
3. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1990. – 256 с.
4. Иванов М.Т., Сергиенко А.Б., Ушаков В.Н. Теоретические основы радиотехники. – М.: Высшая школа, 2002. – 306 с.
5. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач: учебное пособие для радиотехнических специальностей вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2002. – 214 с.
6. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003. – 604 с.
7. Глинченко А.С. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие: в 2-х ч. – Ч. 1. – Красноярск: Изд-во КГТУ, 2001. – 199 с.
8. Солонина А.И., Улахович Д.А., Яковлев Л.А. Алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001. – 464 с.
9. Солодов А.В. Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля. – М.: Наука, 1967. – 432 с.
10. Хлистунов В.Н. Основы цифровой электроизмерительной техники. – М.: Энергия, 1966. – 345 с.
11. Куликовский Л.Ф. Автоматические информационно-измерительные приборы. – М.: Энергия, 1966. – 424 с.
12. Хуснатдинов Г.Н. Оценка среднего во времени значения функции случайного процесса // Труды ВНИИЭП, 1969. – Вып. 6.
13. Кисель В.А. Аналоговые и цифровые корректоры. – М.: Радио и связь, 1986. – 184 с.
14. Eyre J., Bier J. The Evolution of DSP Processor // IEEE Signal Processing magazine, 2000, March.
15. Гончаров Ю. Новое поколение ЦПС Texas Instruments // Компоненты и технологии, 2001. – № 1.
16. Иванов В.А. и др. Математические основы теории автоматического регулирования: учебное пособие для вузов / под ред. Б.К. Чемоданова. – М.: Высшая школа, 1971. – 808 с.
17. Каппелини В., Константи́нидис А., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 360 с.
18. Хэмминг Р.В. Цифровые фильтры. – М.: Недра, 1987. – 221 с.
19. Гоноровский И.С., Демин М.П. Радиотехнические цепи и сигналы: учебное пособие. – М.: Радио и связь, 1994. – 479 с.
20. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 265 с.
21. Введение в цифровую фильтрацию сигналов / под ред. Р. Богнера, А. Константи́нидиса. – М.: Мир, 1976. – 216 с.

Учебное издание

ЯКИМОВ Евгений Валерьевич

## ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Учебное пособие

Научный редактор  
*кандидат технических наук,  
доцент Д.В. Миляев*

Выпускающий редактор *Т.С. Савенкова*

Редактор *Е.А. Тетерина*

Компьютерная верстка *В.П. Аршинова*

Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 25.07.2011. Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».

Печать XEROX. Усл. печ. л. 9,77. Уч.-изд. л. 8,84.


Заказ 1034-11. Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет  
Система менеджмента качества

Издательства Томского политехнического университета сертифицирована  
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30  
Тел/факс: +7 (3822) 56-35-35, [www.tpu.ru](http://www.tpu.ru)