МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор ИНК
____________ Бориков В.Н.
«___» ____________ 2016 г.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ПАКЕТЕ ПРОГРАММ MATHCAD

Методические указания
по выполнению лабораторной работы №1
по курсу «Методы и средства обработки измерительных сигналов»

Томск – 2016

ББК 32.811.1я73
УДК 621.372.037(075.8)
Я 45

Якимов Е.В. Моделирование линейных систем в пакете программ Mathcad: методические указания по выполнению лабораторной работы №1 – Томск: Издательство Томского политехнического университета, 2016. – 8 с.

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры Физических методов и приборов контроля качества ТПУ
«12» 04 2016 г. протокол № 9

Зав. кафедрой ФМПК ________________ Суржиков А.П.

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры
Физических методов и приборов контроля качества ТПУ
Е.М. Фёдоров

Томский политехнический университет, 2016

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1.1. изучение функций Mathcad для моделирования линейных систем;
1.2. синтез передаточной функции фильтра в Mathcad;
1.3. исследование амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) фильтра, переходной характеристики.

2. КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

2.1. Аналоговые линейные системы

Связь между входным X(t) и выходным Y(t) сигналами некоторой аналоговой системы называется **функцией преобразования**

$$Y(t)=F[X(t)]. \quad (1)$$

Линейными называют системы, для которых выполняется принцип суперпозиции: реакция на линейную комбинацию сигналов равна линейной комбинации реакций на эти сигналы, поданные на вход по отдельности.

$$F[X1(t)+X2(t)]=F[X1(t)]+F[X2(t)]. \quad (2)$$

$$F[C\cdot X(t)]=C\cdot F[X(t)], \text{ где } C=\mathrm{const}. \quad (3)$$

Реакция на **δ-импульс** называется **импульсной характеристикой системы – h(t)**. Физически реализуемые системы удовлетворяют двум условиям

$$h(t)=0 \text{ при } t<0 \text{ и } \int_0^{\infty}|h(t)|\,dt<\infty . \quad (4)$$

Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие называется **переходной характеристикой $h_1(t)$.** Переходная характеристика связана с импульсной характеристикой зависимостью $h_1(t)=\int h(t)\,dt$.

Импульсная и переходная характеристика системы позволяют определить реакцию системы на произвольный входной сигнал (в соответствии с **интегралом Дюамеля**) в одной из четырех форм

$$Y(t)=X(0)\cdot h_1(t)+\int_0^t X'(\tau)\cdot h_1(t-\tau)\,d\tau . \quad (5)$$

$$Y(t)=X(0)\cdot h_1(t)+\int_0^t X'(t-\tau)\cdot h_1(\tau)\,d\tau . \quad (6)$$

$$Y(t)=X(t)\cdot h_1(0)+\int_0^t X(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau . \quad (7)$$

$$Y(t)=X(t)\cdot h_1(0)+\int_0^t X(t-\tau)\cdot h(\tau)\,d\tau . \quad (8)$$

Для анализа системы применяются также **преобразование Лапласа и преобразование Фурье**

$$Y^*(s)=\int_0^{\infty} Y(t)\cdot e^{-s\cdot t}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-s\cdot t}\,dt\cdot\int_0^t X(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau , \quad (9)$$

$$Y^*(s)=H(s)\cdot X^*(s), \quad (10)$$

$$H(s)=\int_0^{\infty} h(\tau)\cdot e^{-s\cdot\tau}\,d\tau\ ,\ X(s)=\int_0^{\infty} X(t)\cdot e^{-s\cdot t}\,dt\ . \qquad (11)$$

где Y*(s), X*(s) – изображения сигналов (**преобразования Лапласа** сигналов);
H(s) – **передаточная функция** системы.

$$Y^*(j\cdot\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} Y(t)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\,dt\ ,\ X^*(j\cdot\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} X(t)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\,dt\ , \qquad (12)$$

$$H(j\cdot\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot\tau}\,d\tau\ =H(\omega)\cdot e^{j\cdot\varphi(\omega)}, \qquad (13)$$

$$Y^*(j\cdot\omega)=H(j\cdot\omega)\cdot X^*(j\cdot\omega)\,. \qquad (14)$$

где $Y^*(j\cdot\omega)$, $X^*(j\cdot\omega)$ – изображения сигналов (**преобразования Фурье** сигналов);
$H(j\cdot\omega)$ – **частотная характеристика** системы (зависимость выходного сигнала при воздействии входного гармонического сигнала от частоты);
$H(\omega)$, $\varphi(\omega)$ – **амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики**.

Частотная характеристика системы может быть определена по передаточной функции путем подстановки $s=j\cdot\omega$.

Для линейной системы выполняется принцип суперпозиции

$Y^*(s)=H(s)\cdot X_1^*(s)+H(s)\cdot X_2^*(s)= H(s)\cdot[X_1^*(s)+X_2^*(s)\ ],$ (15)

$Y^*(s)=C\cdot H(s)\cdot X^*(s)=H(s)\cdot C\cdot X^*(s).$ (16)

При последовательном / параллельном соединении линейных систем общая передаточная функция равна произведению / сумме передаточных функций этих систем

$H^*(s)=H_1(s)\cdot H_2(s),$ (17)

$H^*(s)=H_1(s)+H_2(s).$ (18)

В том случае, если при проектировании системы заданы требования в частотной области, прежде всего, производится расчет передаточной функции (частотной характеристики) системы. По передаточной функции далее можно определить импульсную (переходную) характеристику системы.

Например, во многих случаях полученная передаточная функция системы H(s) может быть представлена в дробно-рациональной форме

$$H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_0+b_1\cdot s+b_2\cdot s^2+...+b_m\cdot s^m}{a_0+a_1\cdot s+a_2\cdot s^2+...+a_n\cdot s^n}, \qquad (19)$$

причем m<n и коэффициенты a_i, b_i – действительные числа.

Вычислив корни знаменателя A(s), т.е. **полюса системы** sp_i, можно представить передаточную функцию в виде

$$H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_0+b_1\cdot s+b_2\cdot s^2+...+b_m\cdot s^m}{a_n\cdot(s-sp_0)^{k_0}\cdot(s-sp_1)^{k_1}...\cdot(s-sp_{n-1})^{k_{n-1}}}, \qquad (20)$$

где k_i – кратность корней.

В случае, если все полюса простые (k_i=1), импульсная характеристика системы определяется выражением

$$h(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{B(sp_i)}{A^{/}(sp_i)}\cdot e^{t\cdot sp_i}\ ,\qquad t>0. \qquad (21)$$

Переходная характеристика определяется в этом случае выражением

$$h_1(t) = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{B(sp_i)}{sp_i \cdot A'(sp_i)} \cdot e^{t \cdot sp_i}, \; t > 0. \qquad (22)$$

2.2. Функции Mathcad для моделирования аналоговых линейных систем

В качестве исходных данных берется описание передаточной функции H(s) системы в операторной форме. По передаточной функции определяется переходная характеристика системы $h_1(t)$ – данный переход осуществляется функцией **invlaplace**. Зная переходную характеристику и математическое описание входного сигнала X(t) можно найти реакцию системы Y(t) на произвольное воздействие, используя одно из выражений (5) – (6). При этом потребуется найти производную входного сигнала X′(t), для чего может быть использована функция Mathcad для дифференцирования $\frac{d}{dt}$.

Например, исследуется фильтр низких частот (ФНЧ) 1 порядка:
тип фильтра – ФНЧ; аппроксимация – по Баттерворту;
частота среза F_c = 100 Гц; коэффициент усиления – K0=10; порядок фильтра – 1.

2.2.1. Для фильтра 1 порядка передаточная функция записывается в виде

$$A_0 := 1 \qquad A_1 := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot F_c} \qquad H(s) := \frac{K0}{A_0 + s \cdot A_1}.$$

2.2.2. Переходная характеристика $h_1(t)$ вычисляется следующим образом

$$h_1(t) := H(s) \cdot \frac{1}{s} \text{ invlaplace}, s \;\rightarrow 2000 \cdot \pi \cdot \left(\frac{-1}{200 \cdot \pi} \cdot \exp(-200 \cdot \pi \cdot t) + \frac{1}{200 \cdot \pi} \right)$$

2.2.3. Задавая время tx в некотором диапазоне, можно построить график переходной характеристики.

$$tmax := 2 \cdot F_c^{-1} \qquad dt := \frac{tmax}{100} \qquad tx := 0, dt .. tmax \quad .$$

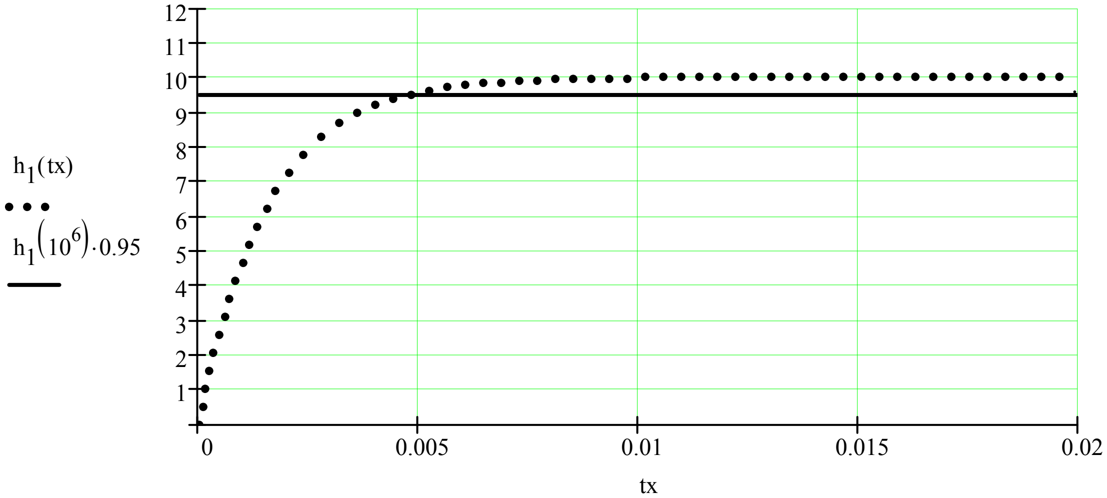

Рис. 1. Переходная характеристика ФНЧ 1 порядка

2.2.4. По переходной характеристике можно определить **время установления** выходного сигнала системы на уровне 95 % от установившегося значения (или 105 % при наличии колебаний). На рис. 1 уровень 95 % показан в виде прямой линии, установившееся значение определяется путем подстановки заведомо большого значения времени tx (например, 10^6 с).

2.2.5. Для нахождения отклика системы на некоторый сигнал x(t), заданный в виде математического выражения, например

$$Ux := 1 \qquad fx := F_c \cdot 1 \qquad wx := 2 \cdot \pi \cdot fx \qquad x(t) := Ux \cdot \sin(wx \cdot t)$$

где Ux – амплитуда синусоидального сигнала, wx – циклическая частота;

требуется произвести вычисления согласно выражению (6)

$$y(tx) := h_1(tx) \cdot x(0) + \int_0^{tx} h_1(\tau) \cdot dx(tx - \tau)\, d\tau$$

В данном случае при интегрировании используется производная входного воздействия, которая обозначена dx(t) и может быть вычислена в Mathcad с помощью функции дифференцирования

$$dx(t) := \frac{d}{dt} x(t)$$

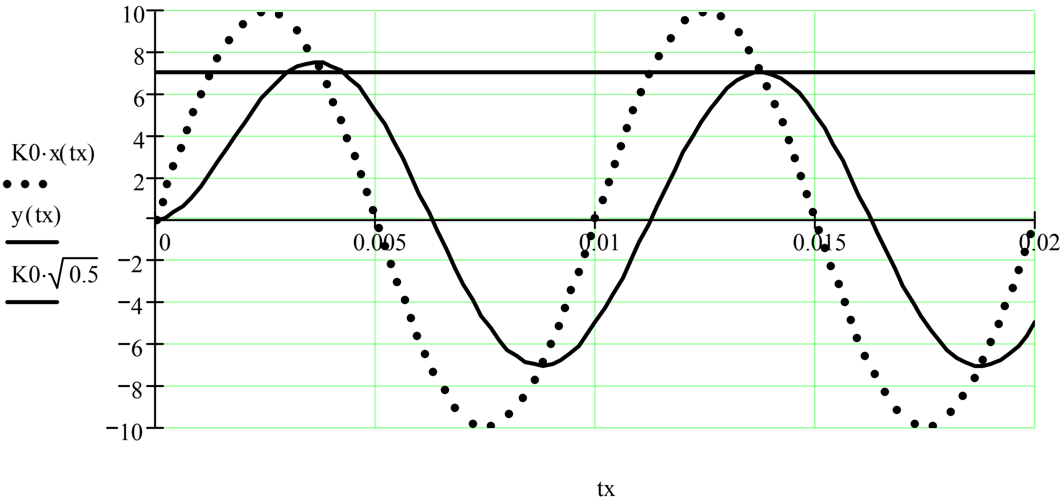

Рис. 2. Реакция ФНЧ 1 порядка на гармонический сигнал

2.2.6. Для анализа частотной характеристики системы можно воспользоваться заменой переменной $s = j \cdot \omega$ в передаточной функции H(s).

Диапазон частот для вычисления частотной характеристики может быть задан следующим образом

$$f := 1, 2 .. F_c \cdot 4 \qquad s(f) := 2 \cdot \pi \cdot i \cdot f \qquad Hf(f) := H(s(f))$$

Функция Hf(f) в данном случае является частотной характеристикой системы. Модуль данной функции определяет амплитудно-частотную характеристику (**АЧХ**), а функция Mathcad **arg()** определяет фазо-частотную характеристику (**ФЧХ**).

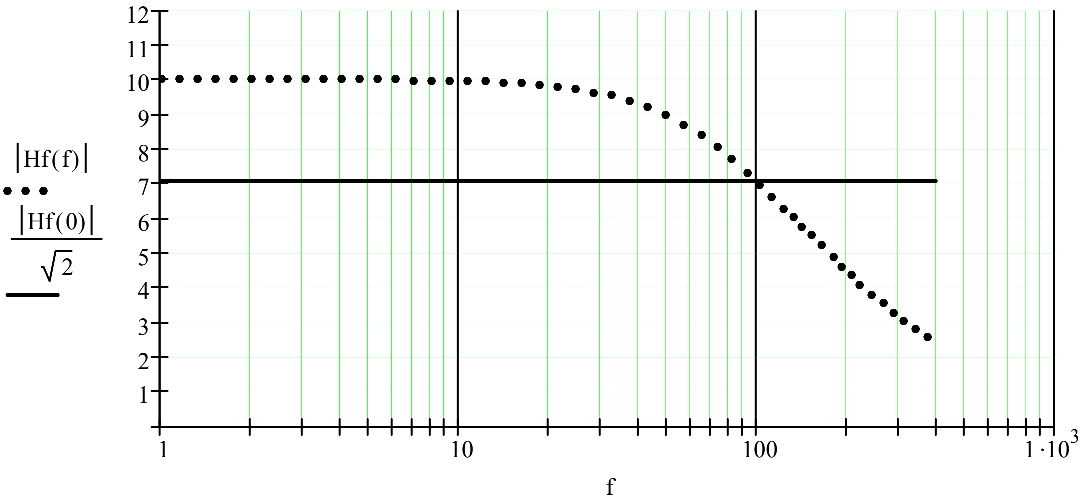

Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика ФНЧ 1 порядка

По графику АЧХ можно определить **частоту среза** – на данной частоте пересекаются график АЧХ и прямая, определяющая уровень спада на 3 дБ.

3. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

При выполнении лабораторной работы используется пакет программ Mathcad версии 2000 и выше.

4. ПРОГРАММА ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

4.1. Изучить методы моделирования линейных систем в пакете программ Mathcad.
4.2. Рассчитать и проанализировать АЧХ системы.
4.3. Найти отклик фильтра на сигнал в виде ступеньки – переходную характеристику фильтра.
4.4. Найти отклики фильтра на гармонические сигналы в полосе пропускания и полосе задерживания, оценить избирательные свойства фильтра.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

5.1. Свойства аналоговых линейных систем.
5.2. Свойства δ-импульса и прямоугольного ступенчатого сигнала.
5.3. Что такое импульсная и переходная характеристика системы. Взаимосвязь импульсной и переходной характеристик.
5.4. Что такое передаточная функция и частотная характеристика системы.
5.5. Взаимосвязь импульсной характеристики и передаточной функции системы.
5.6. Как определяется выходной сигнал системы при некотором произвольном входном сигнале (интеграл Дюамеля).
5.7. Как определяются время установления системы и частоты среза АЧХ.
5.8. Какая функция Mathcad применяется для вычисления обратного преобразования Лапласа.
5.9. Как задать в Mathcad временной интервал от T_{min} до T_{max} с шагом dT.
5.10. Как определить по графику переходной характеристики время установления.
5.11. Как задать в Mathcad диапазон частот от F_{min} до F_{max} с шагом dF.

5.12. Как определяется в Mathcad значение АЧХ на частоте Fx при известной передаточной функции H(s).
5.13. Как определить по графику АЧХ частоту среза ФНЧ.
5.14. Как записать в Mathcad функцию, которая является производной (определенным интегралом) от функции F(t).

6. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОГО ЗАДАНИЯ

6.1. Подготовить и ввести в программу (**п. 2.2.1**) исходные данные в соответствии с заданным вариантом (по номеру компьютера), необходимые для синтеза аналогового ФНЧ: аппроксимация – по Баттерворту; частота среза F_c; коэффициент усиления K0; порядок фильтра N=2.

Вариант	1	2	3	4	5	6
F_c	100 Гц	200 Гц	300 Гц	400 Гц	500 Гц	600 Гц
K0	10	20	30	40	50	60

ФНЧ Баттерворта второго порядка определяется следующим образом:

$H(s) = \dfrac{K0}{A_0 + A_1 \cdot s + A_2 \cdot s^2}$, где A_0=1, $A_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2 \cdot \pi \cdot F_c}$, $A_2 = \dfrac{1}{[2 \cdot \pi \cdot F_c]^2}$.

6.2. Рассчитать АЧХ фильтра (**п. 2.2.6**). Расчет провести в диапазоне частот, удобном для ее анализа. Записать значения АЧХ на частоте среза ($Fx = \cdot F_c$)и задерживания ($Fx = 2 \cdot F_c$). Построить график АЧХ (**п. 2.2.6**).
6.3. Вычислить переходную характеристику системы **h_1(t) (п. 2.2.2)**. Построить график переходной характеристики (**п. 2.2.3**). Определить время установления $t_{уст}$ (**п.2.2.4**) выходного сигнала на уровне 95 % (или 105 % при наличии колебательного переходного процесса).
6.4. Выполнить моделирование фильтра методом интеграла Дюамеля. Выбрать в качестве входного гармонический сигнал **X(t)** с частотой Fx равной частоте среза фильтра F_c и единичной амплитудой (**п. 2.2.5**). Построить график выходного сигнала **Y(t)** (**п. 2.2.5**).
Сравнить полученные значения в установившемся режиме со значениями АЧХ, полученными в п. 6.2.
6.5. Повторить п.6.4 для гармонического сигнала с частотой $Fx = 2 \cdot F_c$.

7. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. – Киев: Вища школа, 1983. – 455 с.
2. Каганов В.И. Радиотехника+компьютер+Mathcad. – М.: Горячая линия - Телеком, 2001. – 416 с.
3. Иванов В.А. и др. Математические основы теории автоматического регулирования. Учеб. пособие для вузов. / Под ред. Чемоданова Б.К. – М.: Высшая школа, 1971. – 808 с.
4. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003. – 604 с.