

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор ИНК

\_\_\_\_\_ Бориков В.Н.

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2016 г.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА  
МЕТОДОМ БИЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
В ПАКЕТЕ ПРОГРАММ МАТНСАД

Методические указания  
по выполнению лабораторной работы №4  
по курсу «Методы и средства обработки измерительных сигналов»

Томск – 2016

ББК 32.811.1я73  
УДК 621.372.037(075.8)  
Я 45

Якимов Е.В. Проектирование цифрового фильтра методом билинейного преобразования в пакете программ Mathcad: методические указания по выполнению лабораторной работы №4 – Томск: Издательство Томского политехнического университета, 2016. – 20 с.

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры Физических методов и приборов контроля качества ТПУ  
«12» 04 2016 г. протокол № 9

Зав. кафедрой ФМПК \_\_\_\_\_ Суржиков А.П.

*Рецензент*

Кандидат технических наук, доцент кафедры  
Физических методов и приборов контроля качества ТПУ  
*Е.М. Фёдоров*

Томский политехнический университет, 2016

## 1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- 1.1. изучение метода билинейного преобразования и различных видов аппроксимации фильтров-прототипов;
- 1.2. синтез передаточной функции цифрового фильтра (ЦФ) по аналоговому прототипу методом билинейного преобразования;
- 1.3. исследование переходной и амплитудно-частотной (АЧХ) характеристики фильтра.

## 2. КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

### 2.1. Задачи и методы синтеза цифровых фильтров

Синтез ЦФ в общем случае включает **синтез передаточной функции** и структуры фильтра по заданной его частотной или импульсной характеристике, а также **оценку требуемой разрядности** чисел для коэффициентов фильтра и отсчетов входного, выходного и внутренних сигналов.

**Синтез передаточной функции ЦФ**  $H(z)$  по заданной частотной характеристике  $H_d(j\omega)$  заключается в ее **аппроксимации** и определении **коэффициентов передаточной функции**. Методы синтеза разделяются на аналитические, итерационные и численные.

По виду аппроксимируемой частотной характеристики  $H_d(j\omega)$  различают цифровые фильтры со ступенчато-образной амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) – фильтры нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосно-пропускающие (ППФ), полосно-заграждающие (ПЗФ), многополосные (МПФ) (рис. 1) и ЦФ с произвольной частотной характеристикой. Могут быть синтезированы также ЦФ с частотной характеристикой цифрового дифференциатора и преобразователя Гильберта.

Так как частотные характеристики ЦФ периодичны по частоте с периодом  $\omega_d$  и их модуль (АЧХ) и аргумент (ФЧХ) обладают свойствами соответственно четной и нечетной симметрии относительно частот  $\omega = 0$  или  $\omega_d/2$ , то их достаточно задать в полосе частот  $(0 - \omega_d/2)$  или полосе  $(0 - \pi)$  нормированных частот  $\lambda = \omega \cdot T_d$  (рис. 1).

Исходными данными для синтеза ЦФ по заданной частотной характеристике (рис. 1) являются:

- частоты среза, задерживания  $\omega_c$ ,  $\omega_z$ , определяющие границы и значения полос пропускания, задерживания и переходных полос фильтра;
- допустимая неравномерность АЧХ фильтра в полосе пропускания (или ослабление на границах полосы пропускания в случае монотонных АЧХ)  $A_{\Pi}$ , дБ;
- минимальное затухание АЧХ в полосе задерживания  $A_z$ , дБ.

Параметрам  $A_{\Pi}$ ,  $A_z$ , определяющим допустимые погрешности аппроксимации заданной идеализированной АЧХ  $|H_d(j\omega)|$ , соответствуют на рис. 1 уровни допустимого отклонения расчетной АЧХ  $|H(j\omega)|$  от 1 в полосе пропускания  $(1 - \delta_1)$  и от нуля в полосе задерживания  $\delta_2$ :  $A_{\Pi} = 20 \cdot \lg[1/(1 - \delta_1)]$ , дБ;  $A_z = 20 \cdot \lg(1/\delta_2)$ , дБ.

Выделенные на рис. 1 пунктиром области образуют поле допусков на погрешности аппроксимации, в которые должна уложиться расчетная аппроксимирующая АЧХ  $|H(j\omega)|$ , показанная на рис. 1, в.

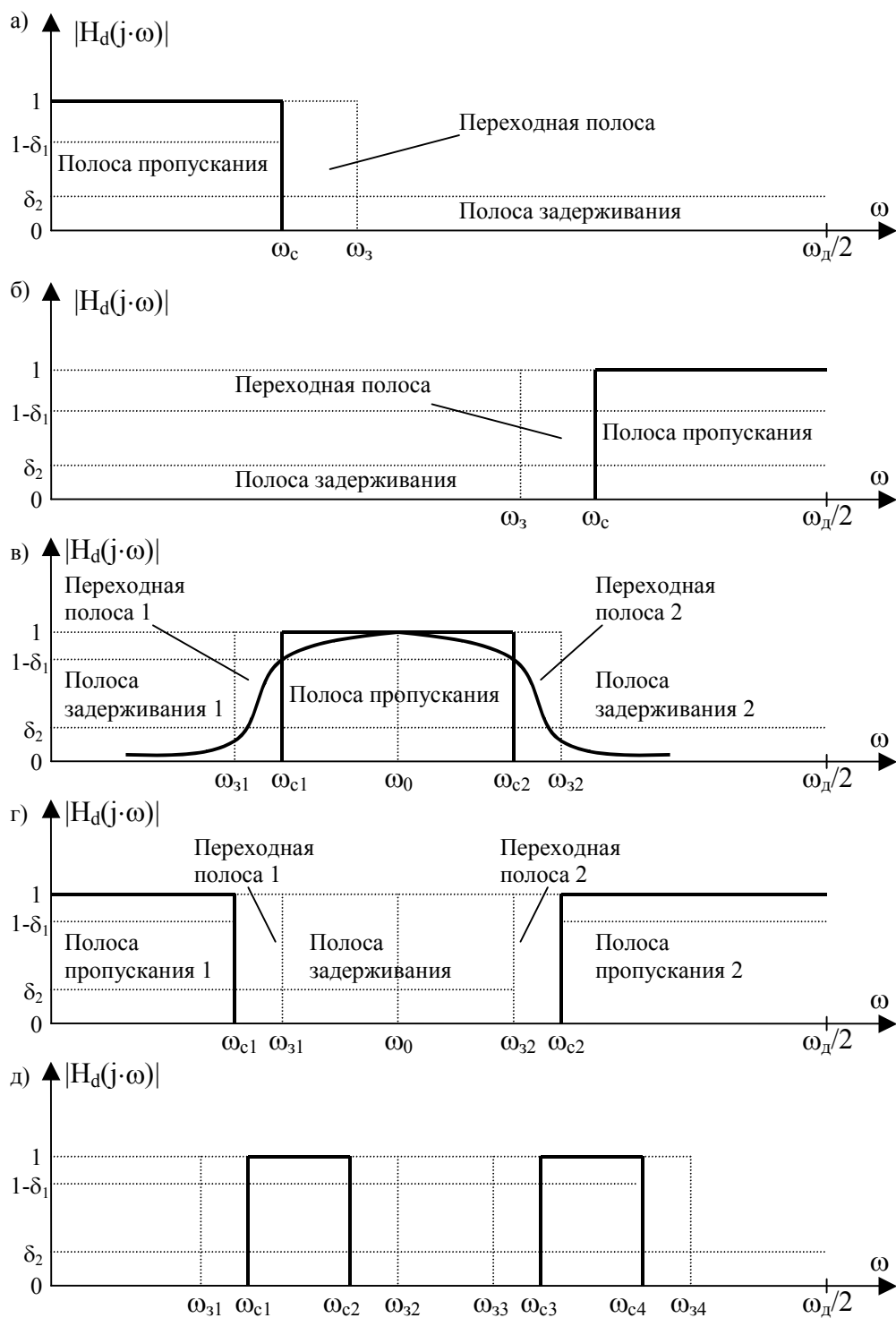


Рис. 1. Примеры задания АЧХ ЦФ

## 2.2. Метод билинейного преобразования

Метод билинейного преобразования относится к **аналитическим методам** расчета.

По методу билинейного преобразования синтезируемому ЦФ ставится в соответствие некоторый аналоговый фильтр-прототип (АФП) с передаточной функцией  $H(s)$  и частотной характеристикой  $H(j \cdot \Omega)$ , однозначно связанными с передаточной функцией  $H(z)$  и частотной характеристикой  $H(j \cdot \omega)$  ЦФ:

АФП	ЦФ	АФП	ЦФ
$H(s) \xrightleftharpoons[z=f^{-1}(s)]{s=f(z)} H(z)$		$H(j \cdot \Omega) \xrightleftharpoons[\omega=f^{-1}(\Omega)]{\Omega=f(\omega)} H(j \cdot \omega)$	

Связь эта определяется прямой  $s=f(z)$  и обратной  $z=f^{-1}(s)$  преобразующими функциями и соответствующими им при  $s=j \cdot \Omega$  и  $z=e^{j \cdot \omega T_d}$  преобразованиями частот

$\Omega=f(\omega)$ ,  $\omega=f^{-1}(\Omega)$  аналогового и цифрового фильтров.

С помощью этих преобразований определяются требования к АФП, по которым хорошо разработанными методами синтезируется его передаточная функция  $H(s)$ , преобразуемая затем в искомую передаточную функцию ЦФ  $H(z)$ .

Преобразующие функции должны удовлетворять следующим условиям:

- левая S-полуплоскость  $s=\sigma+j \psi$ ,  $\sigma<0$ , в которой размещаются полюсы устойчивого АФП, должна однократно отображаться внутрь круга единичного радиуса  $|z|<1$ , в котором на Z-плоскости размещаются полюса устойчивого ЦФ, т.е. устойчивому АФП должен соответствовать устойчивый ЦФ;
- вся мнимая ось частот  $j \cdot \Omega$  АФП,  $\Omega=(0 \pm \infty)$ , должна однократно, т.е. в один обход, отображаться на окружность единичного радиуса Z-плоскости  $e^{j \cdot \omega \cdot T_d}$ ,  $\omega=(0 \pm \omega_d/2)$ , обеспечивая близость частотных характеристик обоих фильтров.

Этим условиям отвечает билинейное преобразование, которое определяется следующим образом:

$$s=f(z)=(2/T)[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})] \quad (1)$$

Можно также найти обратное соотношение

$$z^{-1}=[(2-s \cdot T)/(2+s \cdot T)] \quad (2)$$

Из свойств процедуры перехода на основе билинейного преобразования следует, что мнимая ось S-плоскости отображается в единичную окружность в Z-плоскости (где  $|z|=1$ )

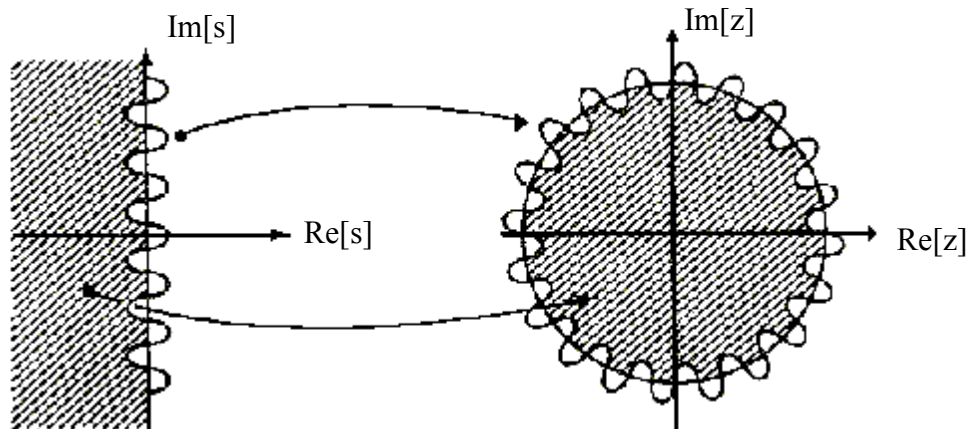


Рис. 2. Свойства процедуры перехода на основе билинейного преобразования

Билинейное преобразование – однозначная функция. Это означает, что каждой точке в Z-плоскости соответствует точно одна точка в s-плоскости и наоборот. Из этого свойства однозначности следует, что **отсутствует эффект наложения спектров** при билинейной процедуре отображения.

Методика расчета цифровых фильтров на основе метода билинейного преобразования включает в себя нахождение подходящей передаточной функции  $H(s)$  аналогового фильтра и применение к ней билинейного преобразования для получения передаточной функции  $H(z)$  требуемого цифрового фильтра

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=(2/T)(1-z^{-1})/(1+z^{-1})} \quad (3)$$

При этом преобразовании будут сохраняться и частотные характеристики, и свойства устойчивости аналогового фильтра. Однако это не означает, что частотные характеристики аналогового и цифрового фильтра идентичны, одинакова только их «форма». Например, если амплитудно-частотная характеристика аналогового фильтра монотонно спадает при  $0 < \Omega < \infty$ , то соответствующий цифровой фильтр, полученный с помощью соотношения (3), будет обладать монотонно спадающей АЧХ при  $0 < \omega < \infty$ . То есть, если АЧХ аналогового фильтра имеет  $k$  подъемов и спадов при  $0 < \Omega < \infty$ , то и амплитудно-частотная характеристика соответствующего цифрового фильтра будет обладать  $k$  подъемами и спадами.

В результате перехода к нормированным частотам ЦФ частотные преобразования принимают вид

$$\Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \quad (4)$$

Характер деформации частот при билинейном преобразовании показан на рис. 3.

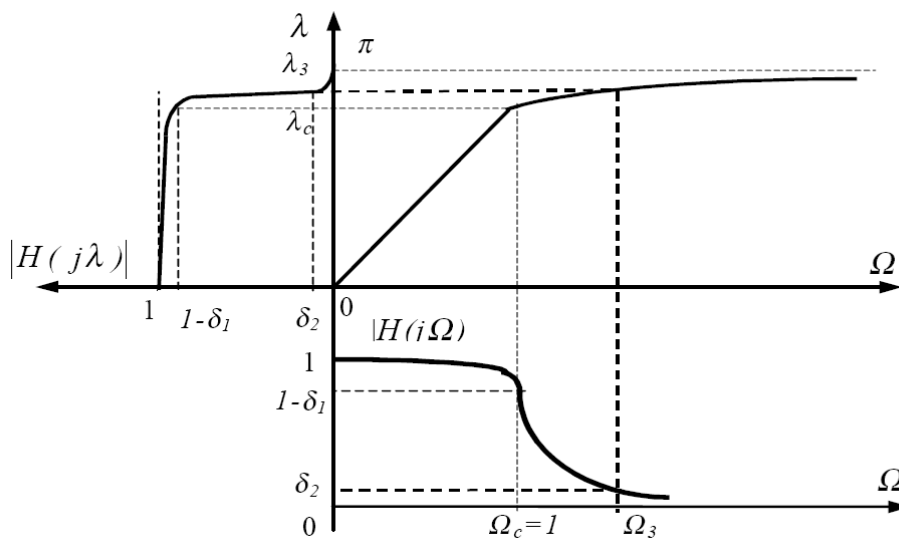


Рис. 3. Преобразование АЧХ аналогового ФНЧ в АЧХ цифрового ФНЧ

Для обеспечения равенства  $\omega_c = 1$  рад/с необходимо деформировать частоту аналогового ФНЧ – прототипа:  $\Omega_c = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{T}{2}\right)$ .

Билинейное преобразование обеспечивает простую процедуру перехода от аналоговых к цифровым фильтрам и сохраняет вид частотных характеристик при преобразовании. Это означает, что широкополосные аналоговые фильтры с крутой переходной областью отображаются в широкополосные цифровые фильтры **без эффекта наложения**. В этом заключается основное преимущество этого метода по сравнению с методом инвариантности импульсной характеристики. Недостатком билинейного преобразования является то, что нелинейность соотношения между цифровой частотой  $\omega$  и аналоговой частотой  $\Omega$  приводит к **искажению частотных характеристик** аналоговых фильтров. Кроме того, при этом преобразовании **не сохраняется импульсная характеристика**.

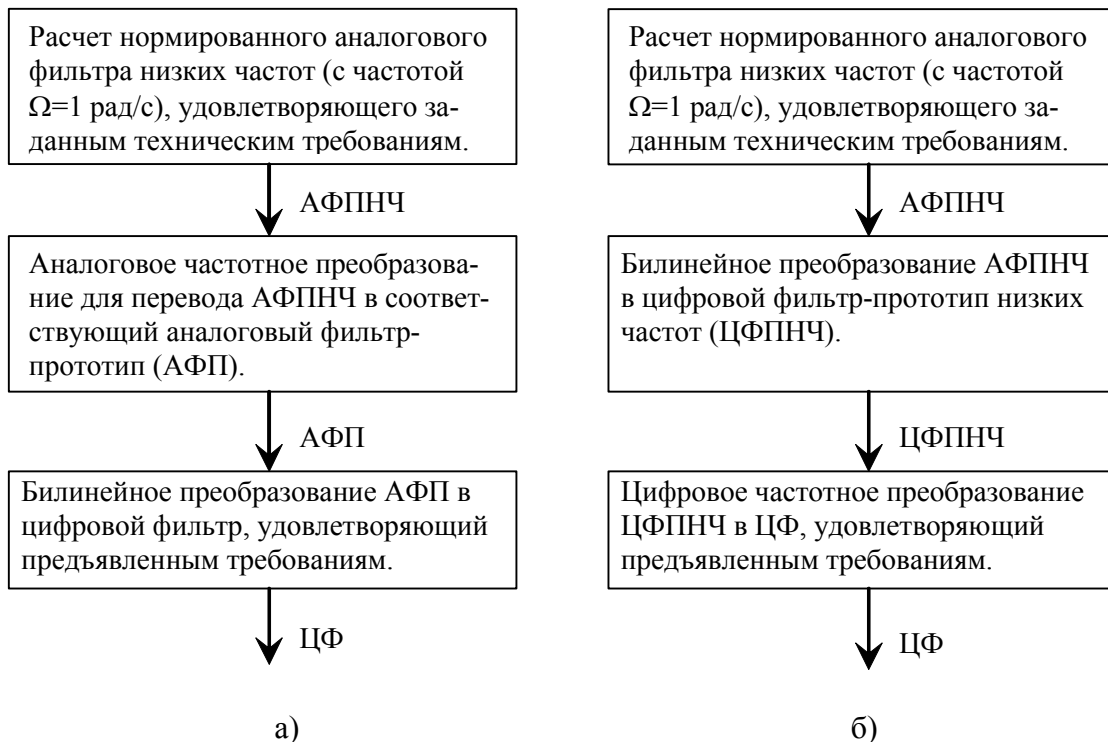
### 2.3. Порядок синтеза РЦФ по аналоговому прототипу

Возможны два метода проектирования ЦФ по аналоговому прототипу.

В первом методе расчет аналогового фильтра-прототипа (АФП) начинается с нахождения соответствующего аналогового фильтра-прототипа низких частот (АФПНЧ). В дальнейшем используется подходящее **аналоговое частотное преобразование** для перевода этого прототипа низких частот в требуемый АФП. Наконец, **на основе процедуры отображения** этот аналоговый фильтр преобразуется в желаемый цифровой БИХ-фильтр (фильтр с бесконечной импульсной характеристикой), который удовлетворяет предъявленным требованиям. Полностью эта процедура расчета показана на [рис. 3.а](#).

Процедуры перехода на основе метода **инвариантности импульсной характеристики** и **метода Эйлера** не обеспечивают хороших методов расчета цифровых фильтров, если полоса аналогового фильтра не ограничена низкими частотами. **Метод билинейного преобразования** (из-за нелинейного соотношения между цифровой частотой  $\omega$  и аналоговой частотой  $\Omega$ ) дает лучшие результаты только для тех частотных характеристик аналогового фильтра, которые представляют собой ступенчато-образную функцию. Это означает, что **процедура отображения** ([рис. 3.а](#)) не обеспечивает хороших методов расчета фильтров верхних частот, заграждающих и некоторых типов полосовых фильтров.

Для исключения этих недостатков используется другой подход к расчету цифровых БИХ-фильтров. Такой способ изображен на [рис. 3.б](#). В этом случае **процедура отображения** всегда имеет дело с нормированным цифровым прототипом низких частот. Следовательно, рассмотренные в предыдущих подразделах три процедуры перехода смогут обеспечить хорошие результаты. В основном этот подход состоит в нахождении подходящего нормированного аналогового фильтра-прототипа низких частот. Аналоговый прототип отображается в цифровой фильтр-прототип низких частот (ЦФПНЧ). Наконец, используется **цифровое частотное преобразование** для перехода от цифрового прототипа низких частот к окончательному варианту, т.е. цифровому фильтру с подходящими характеристиками в полосе пропускания и полосе задерживания и удовлетворяющему предъявленным требованиям.



[Рис. 3.](#) Процедуры расчета цифровых фильтров

## 2.4. Синтез аналогового ФНЧ-прототипа (АФПНЧ)

Синтез АФПНЧ включает выбор аппроксимирующей функции, определение порядка фильтра  $m$ , значений нулей  $s_{0i}$  и полюсов  $s_{pi}$  и передаточной функции по заданным граничным частотам  $\Omega_c = 1, \Omega_3$  и допускам на погрешности аппроксимации  $\delta_1, \delta_2$  ( $A_{\text{п}}, A_3$ ).

Нули и полюса синтезированного АФПНЧ полностью определяют его передаточную функцию  $H(s)$ :

$$H(s) = C \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (s - s_{0i})}{\prod_{i=1}^m (s - s_{pi})} \quad (5)$$

где  $C$  – нормирующий множитель;  $m_1$  – число конечных нулей ( $m_1 < m$ ).

Следует отметить, что полюса АФПНЧ являются вещественными или комплексно-сопряженными числами (со знаком минус перед реальной частью), а конечные нули чисто мнимыми.

Синтез АФПНЧ заключается в аппроксимации его заданной идеализированной ЧХ с помощью соответствующих аппроксимирующих функций.

В качестве аппроксимирующих функций используются полиномы и дроби. К полиномиальным относятся аппроксимации Тейлора (фильтры Баттерворта), Чебышева, к дробным – Кауэра–Золоторева (эллиптические фильтры), Чебышева инверсная.

Передаточные функции фильтров с полиномиальной аппроксимацией не имеют конечных нулей, их частотные характеристики монотонны в полосе задерживания.

У фильтров с дробной аппроксимацией передаточные функции имеют нули на конечных частотах в полосе задерживания, а частотные характеристики – пульсации (в том числе равноволновые) в этой полосе. Фильтры Чебышева и эллиптические имеют равноволновые пульсации и в полосе пропускания.

Типичные графики частотных характеристик нормализованного АФПНЧ с полиномиальной и дробной аппроксимациями приведены на [рис. 4](#).

Для частотных характеристик с равноволновыми пульсациями на графиках указаны соответствующие им частоты нулей и полюсов  $\Omega_{pi}, \Omega_{0i}$  ПФ.

Фильтры с дробной аппроксимацией обеспечивают лучшие характеристики затухания при одинаковом порядке фильтра или меньшее значение порядка при заданном затухании частотной характеристики.



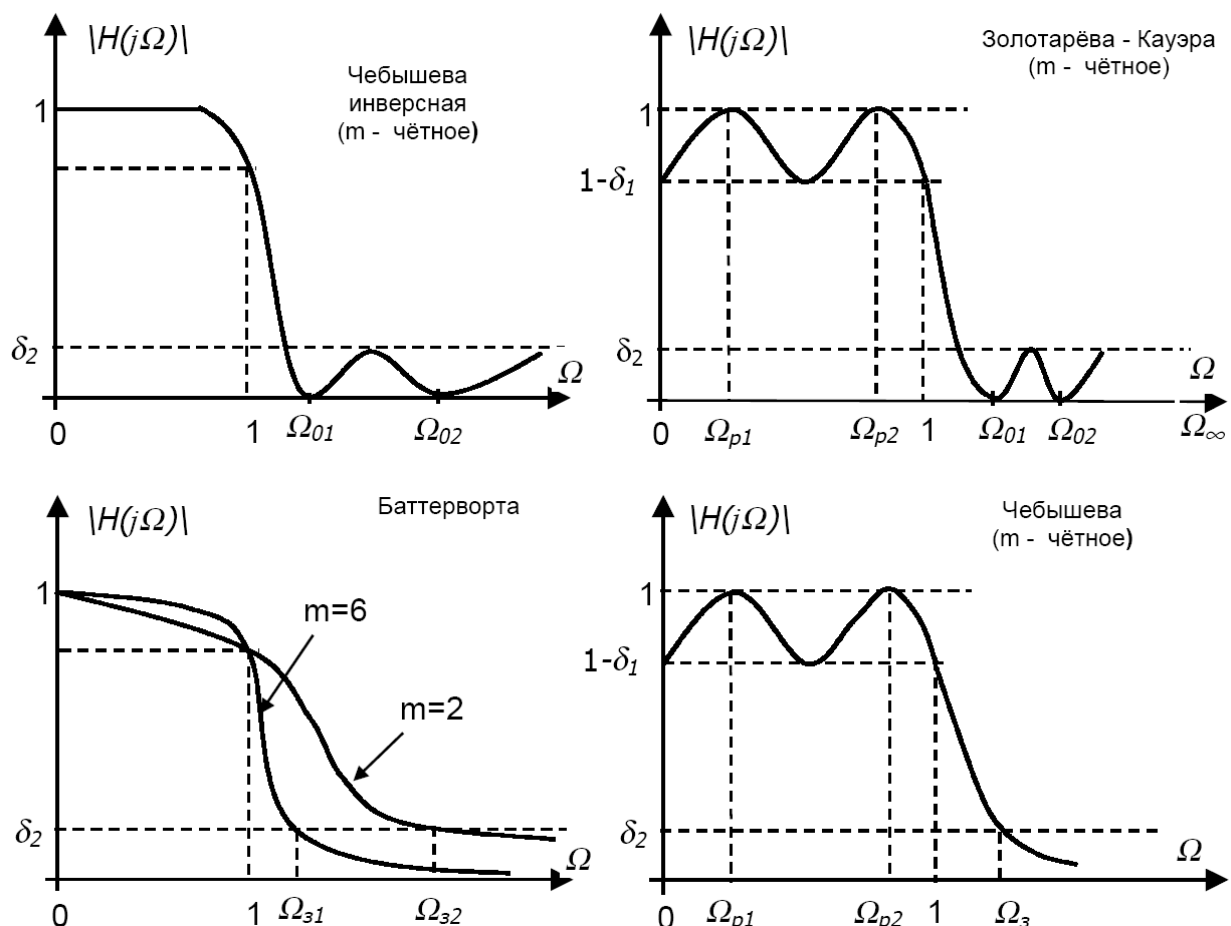


Рис. 4. Графики частотных характеристик нормализованного АФПНЧ, соответствующие различным аппроксимирующим функциям

### Фильтр Баттерворта.

Аппроксимация АФПНЧ Баттерворта имеет вид

$$H(s) = \frac{C}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)} \quad (6)$$

где  $s_k = \sigma_k + j \cdot \psi_k = e^{j \cdot \pi \cdot \left[ \frac{1}{2} + \frac{(2 \cdot k - 1)}{2 \cdot n} \right]}$ ,  $C$  – константа нормирования.

На практике порядок фильтра Баттерворта определяется по заданному ослаблению  $A_3$  на некоторой частоте  $\Omega_3$ .

$$n = \frac{\lg(A_3^2 - 1)}{2 \cdot \lg(\Omega_3)} \quad (7)$$

Если фильтр имеет четный порядок  $n$ , то удобно представлять передаточную функцию фильтра в виде произведения биквадратных звеньев

$$H(s) = \frac{C}{\prod_{k=1}^{n/2} (s^2 - 2 \cdot \sigma_k \cdot s + 1)}, \quad \sigma_k = \cos \left[ \pi \cdot \left[ \frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot n} + \frac{1}{2} \right] \right].$$

### Фильтр Чебышева 1.

Аппроксимация АФПНЧ Чебышева 1 при порядке фильтра  $n$  имеет вид

$$H(s) = \frac{C}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)} \quad (8)$$

где  $s_k = \sigma_k + j \cdot \psi_k$ ,  $\sigma_k = -\text{sh}(\varphi) \cdot \sin\left[\frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right]$ ,  $\psi_k = \text{ch}(\varphi) \cdot \cos\left[\frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right]$ ,

$$\text{sh}(\varphi) = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}, \quad \text{ch}(\varphi) = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}, \quad \gamma = \left[ \frac{1 + \sqrt{\varepsilon^2 + 1}}{\varepsilon} \right]^{1/n}, \quad \varepsilon - \text{пульсации в полосе пропускания.}$$

На практике порядок фильтра Чебышева 1 определяется по заданному ослаблению  $A_3$  на некоторой частоте  $\Omega_3$  и пульсации в полосе пропускания  $\varepsilon$ .

$$n = \frac{\lg(g + \sqrt{g^2 - 1})}{\lg(\Omega_3 + \sqrt{\Omega_3^2 - 1})}, \quad g = \sqrt{\frac{A_3^2 - 1}{\varepsilon^2}}. \quad (9)$$

Если фильтр имеет четный порядок  $n$ , то удобно представлять передаточную функцию фильтра в виде произведения биквадратных звеньев

$$H(s) = \frac{C}{\prod_{k=1}^{n/2} (s^2 - 2 \cdot \sigma_k \cdot s + \sigma_k^2 + \psi_k^2)}.$$

### Фильтр Чебышева 2 (инверсный).

Аппроксимация АФПНЧ Чебышева 2 (инверсная) имеет вид

$$H(s) = C \cdot \frac{\prod_{k=1}^n (s - \text{sn}_k)}{\prod_{k=1}^n (s - \text{sp}_k)} \quad (10)$$

где  $\text{sp}_k = \sigma_k + j \cdot \psi_k$  – полюса,  $\text{sn}_k = j \cdot \vartheta_k = j \cdot \frac{\Omega_3}{\cos\left[\frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right]}$  – нули.

$$\sigma_k = \Omega_3 \cdot \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}, \quad \psi_k = -\Omega_3 \cdot \frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}, \quad \alpha_k = -\text{sh}(\varphi) \cdot \sin\left[\frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right], \quad \beta_k = \text{ch}(\varphi) \cdot \cos\left[\frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right],$$

$$\text{sh}(\varphi) = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}, \quad \text{ch}(\varphi) = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}, \quad \gamma = \left[ A_3 + \sqrt{A_3^2 - 1} \right]^{1/n}.$$

На практике порядок фильтра Чебышева 2 также определяется по заданному ослаблению  $A_3$  на некоторой частоте  $\Omega_3$  и пульсации в полосе пропускания (выражение 9).

Если фильтр имеет четный порядок  $n$ , то удобно представлять передаточную функцию фильтра в виде произведения биквадратных звеньев

$$H(s) = C \cdot \prod_{k=1}^{n/2} \frac{s^2 + \vartheta_k^2}{(s^2 - 2 \cdot \sigma_k \cdot s + \sigma_k^2 + \psi_k^2)}.$$

## 2.5. Переход от АФПНЧ к ЦФ заданного типа

Аналоговый фильтр-прототип низких частот (АФПНЧ) преобразуется к требуемому аналоговому фильтру-прототипу (АФП) с помощью следующих частотных преобразований:

$$\text{АФПНЧ-АФНЧ: } s \rightarrow \frac{s}{\Omega_u} \quad (\text{фильтр низких частот});$$

$$\text{АФПНЧ-АФВЧ: } s \rightarrow \frac{\Omega_u}{s} \quad (\text{фильтр высоких частот});$$

**АФПНЧ-АПФ:**  $s \rightarrow \frac{s^2 + \Omega_u \Omega_l}{s(\Omega_u - \Omega_l)}$  (полосовой фильтр);

**АФПНЧ-АРФ:**  $s \rightarrow \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l}$  (режекторный фильтр).

$\Omega_u$  – верхняя частота среза,  $\Omega_l$  – нижняя частота среза.

Полученный АФП преобразуется в требуемый ЦФ с помощью билинейного преобразования (1, 3).

АФПНЧ может быть преобразован в ЦФПНЧ путем билинейного преобразования (1, 3). Далее выполняются частотные преобразования для получения требуемого ЦФ:

**ЦФПНЧ-ЦФНЧ:**  $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha \cdot z^{-1}}, \alpha = \frac{\sin(\frac{[\omega_c - \omega_u]}{2} \cdot T)}{\sin(\frac{[\omega_c + \omega_u]}{2} \cdot T)};$

**ЦФПНЧ-ЦФВЧ:**  $z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha \cdot z^{-1}}, \alpha = -\frac{\cos(\frac{[\omega_c - \omega_u]}{2} \cdot T)}{\cos(\frac{[\omega_c + \omega_u]}{2} \cdot T)};$

**ЦФПНЧ-ЦПФ:**  $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha \cdot k}{k+1}\right] \cdot z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} \cdot z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha \cdot k}{k+1}\right] \cdot z^{-1} + 1}, \alpha = \frac{\cos(\frac{[\omega_u + \omega_l]}{2} \cdot T)}{\cos(\frac{[\omega_u - \omega_l]}{2} \cdot T)},$

$k = \operatorname{ctg}(\frac{[\omega_u - \omega_l]}{2} \cdot T) \cdot \operatorname{tg}(\frac{\omega_c}{2} \cdot T);$

**ЦФПНЧ-ЦРФ:**  $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha}{k+1}\right] \cdot z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k} \cdot z^{-2} - \left[\frac{2 \cdot \alpha}{k+1}\right] \cdot z^{-1} + 1}, \alpha = \frac{\cos(\frac{[\omega_u - \omega_l]}{2} \cdot T)}{\cos(\frac{[\omega_u + \omega_l]}{2} \cdot T)},$

$k = \operatorname{tg}(\frac{[\omega_u - \omega_l]}{2} \cdot T) \cdot \operatorname{tg}(\frac{\omega_0}{2} \cdot T).$

$\omega_u$  – верхняя частота среза,  $\omega_l$  – нижняя частота среза,  $\omega_0$  – центральная частота ПФ и РФ,  $\omega_c$  – частота среза ЦФПНЧ,  $T$  – период дискретизации.

## 2.6. Особенности синтеза ЦФ методом билинейного преобразования в Mathcad

Особенности расчета ЦФ в пакете программ Mathcad нагляднее всего отобразить на конкретном примере.

В качестве примера далее показан расчет цифрового полосового фильтра (ПФ) с аппроксимацией Чебышева 1 рода, порядок АФПНЧ – 2.

### 2.6.1. Ввод исходных данных

$$\begin{aligned}
 F_d &:= 4 \cdot 10^3 \quad \text{- Частота дискретизации ЦФ, Гц} & N &:= 2 \quad \text{- порядок ЦФ} & N_r &:= N \\
 T_d &:= (F_d)^{-1} & T_d &:= 2.5 \times 10^{-4} \quad \text{- период дискретизации ЦФ, с} \\
 f_x &:= 100 \quad \text{- центральная частота полосы пропускания ЦФ, Гц} & \omega_x &:= 2 \cdot \pi \cdot f_x & \omega_x &= 628.3185 \\
 dF &:= 20 \quad \text{- полоса пропускания ЦФ, Гц} & dB &:= 2 \cdot \pi \cdot dF & dB &= 125.6637 \\
 f_l &:= \frac{2 \cdot F_d}{2 \cdot \pi} \cdot \tan\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot f_x}{2 \cdot F_d}\right) \quad \text{- Внесение предискажений перед билинейным преобразованием} \\
 f_l &= 100.206125367257 & \omega_l &:= 2 \cdot \pi \cdot f_l & \omega_l &= 629.6137 \\
 A_p &:= 1 \quad \text{- Уровень пульсаций в полосе пропускания ЦФ, дБ} & \varepsilon &:= \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1} & \varepsilon &= 0.5088
 \end{aligned}$$

### 2.6.2. Расчет полюсов нормированного ФНЧ

$$\begin{aligned}
 \gamma &:= \left( \varepsilon^{-1} + \sqrt{1 + \varepsilon^{-2}} \right)^{\frac{1}{N}} \\
 \sigma &:= -\frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2} \cdot \sin\left[\frac{2 \cdot k - 1}{(2 \cdot N)} \cdot \pi\right] & \psi &:= \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2} \cdot \cos\left[\frac{2 \cdot k - 1}{(2 \cdot N)} \cdot \pi\right] \\
 \lambda &:= \sigma^2 + \psi^2 \quad \text{-нормирующий коэффициент фильтра} \\
 P1 &:= \sigma + i \cdot \psi & P2 &:= \sigma - i \cdot \psi \quad \text{- полюса АФ-прототипа} \\
 P1 &= -0.5489 + 0.8951i & P2 &= -0.5489 - 0.8951i & \lambda &= 1.1025
 \end{aligned}$$

### 2.6.3. Расчет АЧХ фильтра-прототипа

$$\begin{aligned}
 \omega_{\min} &:= \omega_x - dB \cdot 2 & \omega_{\max} &:= \omega_x + dB \cdot 2 & d\omega &:= (\omega_{\max} - \omega_{\min}) \cdot (100)^{-1} \\
 \omega &:= \omega_{\min}, \omega_{\min} + d\omega, \dots, \omega_{\max} \quad \text{-диапазон частот построения АЧХ фильтра} \\
 s(\omega) &:= i \cdot \omega & s1(\omega) &:= \frac{s(\omega)^2 + \omega_l^2}{s(\omega) \cdot dB} \quad \text{- преобразование нормированного АФ-прототипа в ПФ с заданными параметрами} \\
 H(\omega) &:= \lambda \cdot \frac{1}{s1(\omega)^2 + s1(\omega) \cdot (-2 \cdot \sigma) + \lambda} \quad \text{-синтез передаточной функции АФ-прототипа} \\
 |H(\omega_x)| &= 1.0002 & 20 \cdot \log\left(\frac{|H(\omega_x \cdot 2)|}{|H(\omega_x)|}\right) &= -34.056 \quad \text{- значения АЧХ АФ-прототипа}
 \end{aligned}$$

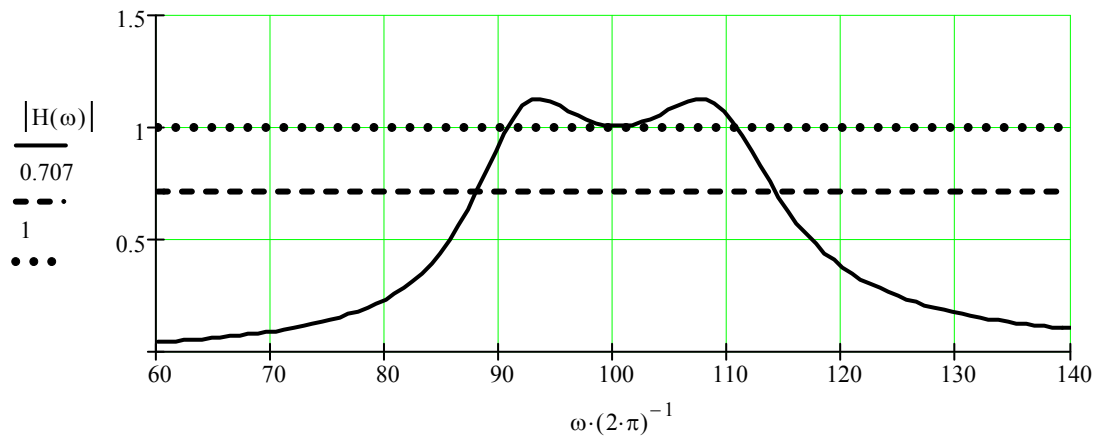


Рис. 5. График АЧХ АФП (полосовой фильтр Чебышева 1 рода)

#### 2.6.4. Расчет коэффициентов ЦФ

$$C_0 := \left[ \left( \frac{2 \cdot F_{\text{Д}}}{\text{dB}} \right)^2 + \frac{-2 \cdot \sigma \cdot 2 \cdot F_{\text{Д}}}{\text{dB}} + \left( 1 + \frac{2 \cdot \omega l^2}{\text{dB}^2} \right) + \left( \frac{-2 \cdot \sigma \cdot \omega l^2}{2 \cdot F_{\text{Д}} \cdot \text{dB}} \right) + \left[ \frac{\omega l^4}{(2 \cdot F_{\text{Д}})^2 \cdot \text{dB}^2} \right] \right]^{-1} \quad C_0 = 2.3955 \times 10^{-4}$$

$$B_0 := C_0 \quad B_1 := 0 \quad B_2 := -2 \cdot C_0 \quad B_3 := 0 \quad B_4 := C_0 \quad A_0 := 1$$

$$A_1 := \left[ -4 \cdot \left( \frac{2 \cdot F_{\text{Д}}}{\text{dB}} \right)^2 + -2 \cdot \left( \frac{-2 \cdot \sigma \cdot 2 \cdot F_{\text{Д}}}{\text{dB}} \right) + 2 \cdot \left( \frac{-2 \cdot \sigma \cdot \omega l^2}{2 \cdot F_{\text{Д}} \cdot \text{dB}} \right) + 4 \cdot \left[ \frac{\omega l^4}{(2 \cdot F_{\text{Д}})^2 \cdot \text{dB}^2} \right] \right] \cdot C_0$$

$$A_2 := \left[ 6 \cdot \left( \frac{2 \cdot F_{\text{Д}}}{\text{dB}} \right)^2 + -2 \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot \omega l^2}{\text{dB}^2} \right) + 6 \cdot \left[ \frac{\omega l^4}{(2 \cdot F_{\text{Д}})^2 \cdot \text{dB}^2} \right] \right] \cdot C_0$$

$$A_3 := \left[ -4 \cdot \left( \frac{2 \cdot F_{\text{Д}}}{\text{dB}} \right)^2 + 2 \cdot \left( \frac{-2 \cdot \sigma \cdot 2 \cdot F_{\text{Д}}}{\text{dB}} \right) + -2 \cdot \left( \frac{-2 \cdot \sigma \cdot \omega l^2}{2 \cdot F_{\text{Д}} \cdot \text{dB}} \right) + 4 \cdot \left[ \frac{\omega l^4}{(2 \cdot F_{\text{Д}})^2 \cdot \text{dB}^2} \right] \right] \cdot C_0$$

$$A_4 := \left[ \left( \frac{2 \cdot F_{\text{Д}}}{\text{dB}} \right)^2 - \left( \frac{-2 \cdot \sigma \cdot 2 \cdot F_{\text{Д}}}{\text{dB}} \right) + \left( 1 + \frac{2 \cdot \omega l^2}{\text{dB}^2} \right) - \left( \frac{-2 \cdot \sigma \cdot \omega l^2}{2 \cdot F_{\text{Д}} \cdot \text{dB}} \right) + \left[ \frac{\omega l^4}{(2 \cdot F_{\text{Д}})^2 \cdot \text{dB}^2} \right] \right] \cdot C_0$$

$$B = \begin{pmatrix} 2.3955 \times 10^{-4} \\ 0 \\ -4.791 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 2.3955 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ -3.9165 \\ 5.8008 \\ -3.85 \\ 0.9663 \end{pmatrix} \quad \text{- значения коэффициентов ЦФ}$$

### 2.6.5. Расчет АЧХ синтезированного ЦФ

$$\omega_{\min} := \omega_x - \text{dB} \cdot 2 \quad \omega_{\max} := \omega_x + \text{dB} \cdot 2 \quad d\omega := (\omega_{\max} - \omega_{\min}) \cdot (100)^{-1}$$

$\omega := \omega_{\min}, \omega_{\min} + d\omega, \dots, \omega_{\max}$  - диапазон частот построения АЧХ фильтра

$$z(\omega) := e^{i \cdot \omega \cdot T_d} \quad H_2 z(\omega) := \frac{B_0 + B_1 \cdot z(\omega)^{-1} + B_2 \cdot z(\omega)^{-2} + B_3 \cdot z(\omega)^{-3} + B_4 \cdot z(\omega)^{-4}}{A_0 + A_1 \cdot z(\omega)^{-1} + A_2 \cdot z(\omega)^{-2} + A_3 \cdot z(\omega)^{-3} + A_4 \cdot z(\omega)^{-4}}$$

$$|H_2 z(\omega_x)| = 1 \quad 20 \cdot \log \left( \frac{|H_2 z(\omega_x/2)|}{|H_2 z(\omega_x)|} \right) = -35.1586 \text{ - значения АЧХ ЦФ}$$

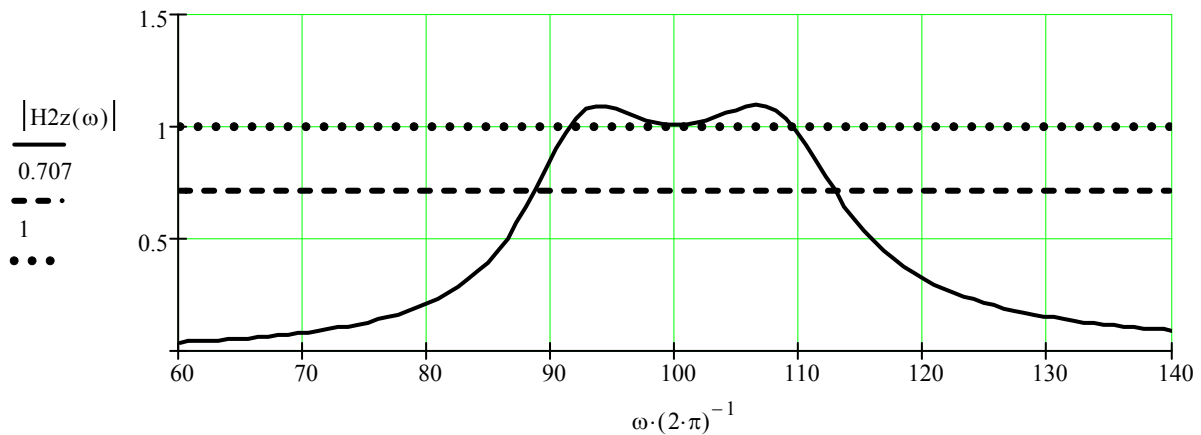


Рис. 6. График АЧХ синтезированного ЦФ (полосовой фильтр Чебышева 1 рода)

### 2.6.6. Реакция ЦФ на гармонический сигнал

$$N_{\max} := \text{floor}(f_x^{-1} \cdot F_{\text{д}} \cdot 10) \quad N_{\max} = 400 \quad \text{- количество обрабатываемых отсчетов}$$

$$p_i := 0..3 \quad y_{p_i} := 0 \quad \text{- обнуление первых отсчетов выходного сигнала ЦФ}$$

$$i := 0..N_{\max} \quad j := 4..N_{\max}$$

$$w := 2 \cdot \pi \cdot (f_x \cdot 1) \quad U_x := 1 \quad \text{- частота и амплитуда входного сигнала}$$

$$x_i := (U_x \cdot 1 \cdot \sin(w \cdot T_d \cdot i) + U_x \cdot 0) \quad \text{- отсчеты входного сигнала}$$

$$y_j := \left( \sum_{t=0}^4 B_t \cdot x_{j-t} - \sum_{t=1}^4 A_t \cdot y_{j-t} \right) \quad \begin{array}{l} \text{- отсчеты выходного сигнала} \\ \text{- алгоритм работы ЦФ} \end{array}$$

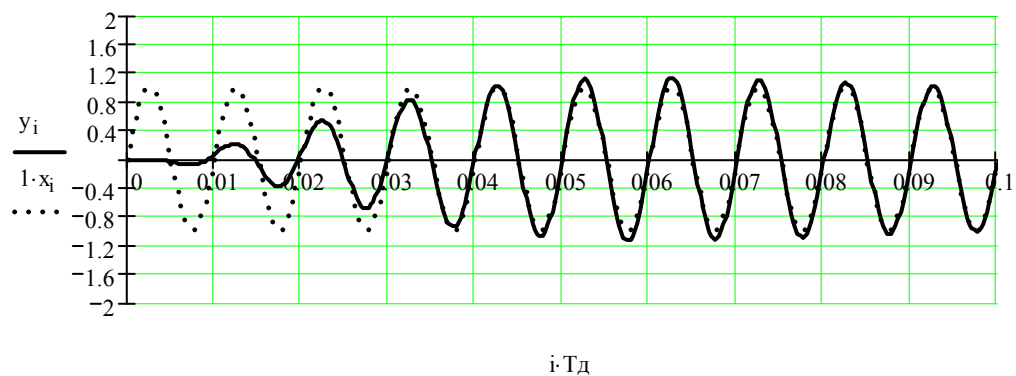


Рис. 7. Реакция ЦФ на гармонический сигнал ( $f_x=100$  Гц)

### 2.6.7. Реакция ЦФ на ступенчатое воздействие

При моделировании переходной характеристики ЦФ ступенчатое входное воздействие задается следующим образом

$$x_i := \begin{cases} 1 & \text{if } i \geq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

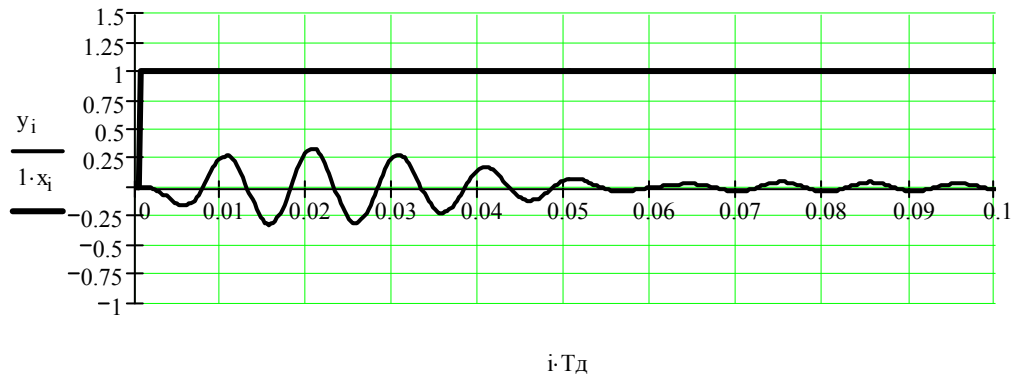


Рис. 8. Переходная характеристика ЦФ

### 2.6.8. Расчет полюсов ЦФ

Зная коэффициенты знаменателя передаточной функции ЦФ (матрица A), можно определить полюса ЦФ. Для этого необходимо сначала инвертировать порядок следования коэффициентов в матрице (поскольку в знаменателе передаточной функции ЦФ коэффициенты матрицы A соответствуют переменной  $z^{-1}$ ).

$$Na := \text{rows}(A) - 1 \quad jk := 0..Na \quad AA_{jk} := A_{Na-jk}$$

$$\lambda 2 := \text{polyroots}(AA)$$

$$jk := 0.. \text{rows}(\lambda 2) - 1$$

$$AA = \begin{pmatrix} 0.9663 \\ -3.85 \\ 5.8008 \\ -3.9165 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda 2 = \begin{pmatrix} 0.9764 + 0.168i \\ 0.9764 - 0.168i \\ 0.9819 - 0.1427i \\ 0.9819 + 0.1427i \end{pmatrix} \quad \begin{array}{|c|} \hline |\lambda 2_{jk}| = \\ \hline 0.9908 \\ 0.9908 \\ 0.9922 \\ 0.9922 \\ \hline \end{array}$$

Если модули полюсов ЦФ меньше 1, то ЦФ устойчивый. В данном случае все полюса лежат внутри окружности единичного радиуса, следовательно, ЦФ устойчивый.

## 2.7. Особенности синтеза других типов ЦФ

### 2.7.1. Полосовой фильтр (ПФ) Баттерворта (АФПНЧ 2 порядка)

Коэффициенты фильтра рассчитываются так же, как показано выше в примере расчета ПФ Чебышева 1 рода (АФПНЧ 2 порядка), п. 2.6, полюса фильтра-прототипа определяются выражениями

$$\sigma := \cos \left[ \left[ \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot k - 1}{(2 \cdot N)} \right] \cdot \pi \right] \quad \psi := \sin \left[ \left[ \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot k - 1}{(2 \cdot N)} \right] \cdot \pi \right]$$

$$\lambda := \sigma^2 + \psi^2 \quad \text{-нормирующий коэффициент фильтра}$$

$$P1 := \sigma + i \cdot \psi \quad P2 := \sigma - i \cdot \psi \quad \text{- полюса АФ-прототипа}$$

$$P1 = -0.7071 + 0.7071i \quad P2 = -0.7071 - 0.7071i \quad \lambda = 1$$

### 2.7.2. ФНЧ Чебышева 1 рода (АФПНЧ 2 порядка)

Расчет полюсов фильтра аналогичен показанному в примере расчета полосового фильтра Чебышева 1 рода (АФПНЧ 2 порядка), п. 2.6.

При переходе от нормированного АФПНЧ к АФП используется преобразование

$$s(\omega) := i \cdot \omega \quad s1(\omega) := \frac{s(\omega)}{\omega1} \quad \text{- преобразование нормированного АФ-прототипа в ФНЧ с заданными параметрами}$$

Коэффициенты фильтра рассчитываются следующим образом:

$$B_0 := \frac{1}{\frac{1}{\lambda} \cdot \left( \frac{2 \cdot F_d}{\omega1} \right)^2 + \left( \frac{-2 \cdot \sigma \cdot 2 \cdot F_d}{\lambda \cdot \omega1} \right) + (1)} \quad B_1 := 2 \cdot B_0 \quad B_2 := B_0 \quad A_0 := 1$$

$$A_1 := \left[ \frac{-2}{\lambda} \cdot \left( \frac{2 \cdot F_d}{\omega1} \right)^2 + (2) \right] \cdot B_0 \quad A_2 := \left[ \frac{1}{\lambda} \cdot \left( \frac{2 \cdot F_d}{\omega1} \right)^2 + \left( \frac{2 \cdot \sigma \cdot 2 \cdot F_d}{\lambda \cdot \omega1} \right) + (1) \right] \cdot B_0$$

Очевидно, что порядок цифрового фильтра равен при этом 2. Следовательно, уменьшается количество слагаемых числителя и знаменателя передаточной функции ЦФ

$$H2z(\omega) := \frac{B_0 + B_1 \cdot z(\omega)^{-1} + B_2 \cdot z(\omega)^{-2}}{A_0 + A_1 \cdot z(\omega)^{-1} + A_2 \cdot z(\omega)^{-2}}.$$

а также количество обнуляемых выходных отсчетов и порядок алгоритма работы цифрового фильтра.

$$p_i := 0..2 \quad y_{pi} := 0$$

$$y_j := \left( \sum_{t=0}^2 B_t \cdot x_{j-t} - \sum_{t=1}^2 A_t \cdot y_{j-t} \right)$$



### 3. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

При выполнении лабораторной работы используется пакет программ Mathcad версии 2000 и выше.

### 4. ПРОГРАММА ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

- 4.1. Выполнить синтез АФ-прототипа, в результате которого получить значения его полюсов  $P_P$  и нулей  $P_0$ , рассчитать и проанализировать АЧХ АФ-прототипа (АФП).
- 4.2. Рассчитать коэффициенты передаточной функции ЦФ, а также значения полюсов ЦФ. Проанализировать положение полюсов и нулей на комплексной  $Z$ -плоскости.
- 4.3. Рассчитать и проанализировать АЧХ ЦФ, проверить соответствие АЧХ заданным требованиям.
- 4.4. Найти отклик фильтра на сигнал в виде ступеньки – переходную характеристику фильтра.
- 4.5. Найти отклики фильтра на гармонические сигналы в полосе пропускания и полосе задерживания, оценить избирательные свойства фильтра.

### 5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 5.1. Что такое импульсная характеристика и передаточная функция ЦФ?
- 5.2. Как найти передаточную функцию ЦФ по разностному уравнению?
- 5.3. Как определяется частотная характеристика ЦФ?
- 5.4. Что такое порядок ЦФ и как сказывается его значение при реализации фильтра?
- 5.5. Что такое нули и полюса передаточной функции ЦФ?
- 5.6. Как определить устойчивость ЦФ по значениям его нулей и полюсов?
- 5.7. Как найти значения нулей и полюсов биквадратного звена по его коэффициентам?
- 5.8. Что такое билинейная преобразующая функция? Как преобразуются частоты аналогового и цифрового фильтров при билинейном преобразовании?
- 5.9. Как определяются требования к аналоговому фильтру-прототипу в методе билинейного преобразования?
- 5.10. Каковы особенности аппроксимирующих функций, используемых при синтезе ЦФ? Как зависит порядок синтезируемого ЦФ от вида аппроксимирующей функции?
- 5.11. Как преобразуется аналоговый ФНЧ-прототип в цифровой ПФ, ФНЧ, ФВЧ, РФ?
- 5.12. Какая функция Mathcad позволяет рассчитать полюса ЦФ по его коэффициентам? Как определить устойчивость ЦФ по его полюсам?
- 5.13. Записать выражение для тестового сигнала при определении переходной характеристики ЦФ.
- 5.14. Записать алгоритм работы ЦФ 3 порядка в программе Mathcad.
- 5.15. Как определяется передаточная функция полосового фильтра-прототипа в программе Mathcad?

## 6. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОГО ЗАДАНИЯ

- 6.1. Подготовить и ввести в программу исходные данные (п. 2.6.1) в соответствии с заданным вариантом, необходимые для синтеза **цифрового полосового фильтра (ПФ)**: аппроксимация Баттерворта (п. 2.7.1); полоса пропускания  $\Delta F=0.1 \cdot F_c$ ; центральная частота полосы пропускания  $F_0$ ; коэффициент усиления  $K_0$ ; порядок фильтра-прототипа  $N=2$ .

Вариант	1	2	3	4	5	6
$F_0$	100 Гц	200 Гц	300 Гц	400 Гц	500 Гц	600 Гц
$K_0$	10	20	30	40	50	60

При расчете необходимо внести предскажение обеих частот среза для компенсации искажения, вносимого билинейным преобразованием.

Частота дискретизации 16 кГц.

- 6.2. Выполнить расчет полюсов АФП и анализ их расположения на комплексной плоскости (п. 2.6.2).
- 6.3. Выполнить расчет передаточной функции и построить график АЧХ фильтра-прототипа (п. 2.6.3).
- 6.4. Выполнить расчет коэффициентов ЦФ (п. 2.6.4).
- 6.5. Выполнить расчет полюсов ЦФ и анализ их расположения на комплексной плоскости (п. 2.6.8).
- 6.6. Построить АЧХ ЦФ (п. 2.6.5). По графику АЧХ проверить ее соответствие заданным требованиям. Записать значения АЧХ на частотах среза и задерживания ( $2 \cdot F_c$ ).
- 6.7. Построить переходную характеристику цифрового фильтра и определить время установления (п. 2.6.7).
- 6.8. Определить отклик ЦФ на входной гармонический сигнал (п. 2.6.6) с частотой  $F_x=F_c$  и единичной амплитудой. Проверить правильность расчетов по значениям АЧХ.
- 6.9. Определить отклик ЦФ на входной гармонический сигнал (п. 2.6.6) с частотой  $F_x=2 \cdot F_c$  и единичной амплитудой. Проверить правильность расчетов по значениям АЧХ.
- 6.10. **Выполнить синтез (п.п. 6.1 – 6.9) цифрового ФНЧ: аппроксимация – по Чебышеву 1 (п. 2.7.2), частота среза  $F_c=F_0$  и коэффициент усиления  $K_0$  в соответствии с заданным вариантом. Частота дискретизации 16 кГц.**

## 7. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. /Пер. с англ. под ред. Ю.Н. Александрова. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
2. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1990. – 256 с.
3. Каганов В.И. Радиотехника+компьютер+Mathcad. – М.: Горячая линия - Телеком, 2001. – 416 с.
4. Глинченко А.С. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие. В 2 ч. Ч.1. – Красноярск: Изд-во КГТУ, 2001. – 199 с.
5. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003. – 604 с.



ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА  
МЕТОДОМ БИЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
В ПАКЕТЕ ПРОГРАММ MATHCAD

Методические указания к лабораторной работе №4  
по курсу «Методы и средства обработки измерительных сигналов»

Составитель Якимов Евгений Валерьевич