

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор ИНК

_____ Бориков В.Н.

« ____ » _____ 2016 г.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
В ПАКЕТЕ ПРОГРАММ MATHCAD

Методические указания
по выполнению лабораторной работы №3
по курсу «Методы и средства обработки измерительных сигналов»

Томск – 2016

ББК 32.811.1я73
УДК 621.372.037(075.8)
Я 45

Якимов Е.В. Спектральный анализ в пакете программ Mathcad: методические указания по выполнению лабораторной работы №3 – Томск: Издательство Томского политехнического университета, 2016. – 12 с.

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию
методическим семинаром кафедры Физических методов и приборов
контроля качества ТПУ
«12» 04 2016 г. протокол № 9

Зав. кафедрой ФМПК _____ Суржиков А.П.

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры
Физических методов и приборов контроля качества ТПУ
Е.М. Фёдоров

Томский политехнический университет, 2016

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- 1.1. изучение функций Mathcad для анализа спектра сигналов;
- 1.2. изучение функций Mathcad для работы с файлами данных;
- 1.3. исследование спектра сигналов.

2. КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

2.1. Спектры периодических сигналов

Периодические (полигармонические) сигналы

$$X(t)=X(t+k \cdot T), \quad (1)$$

где k – целое число, T – период повторения сигнала.

Для полигармонических сигналов вводится понятие **спектра**, т.е. совокупности простых гармонических составляющих, на которые можно разложить сигнал. Спектр сигнала выражает его частотный (спектральный) состав, т.е. распределение по частоте амплитуды и фазы гармоник.

Полигармонический сигнал может быть представлен дискретным рядом Фурье (дискретным спектром):

$$X(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot k \cdot t\right)+b_k \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot k \cdot t\right), \quad (2)$$

$$\text{где } \omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T}, a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T X(t) dt, a_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T X(t) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot k \cdot t\right) dt, b_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T X(t) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot k \cdot t\right) dt.$$

$$X(t)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot k \cdot t+\varphi_k\right), \quad (3)$$

$$\text{где } c_0 = \frac{a_0}{2} - \text{среднее значение}, c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \varphi_k = -\arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

Информативные параметры сигналов.

X_{\max} – максимальное значение;

$$X_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \cdot \int_t^{t+T} X(t) dt - \text{среднее значение (постоянная составляющая);}$$

$$X_{\text{ср.выпр}} = \frac{1}{T} \cdot \int_t^{t+T} |X(t)| dt - \text{средневыпрямленное значение;}$$

$$X_{\text{скз}}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_t^{t+T} X^2(t) dt - \text{действующее значение (СКЗ);}$$

$$X_{\text{скз}}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T X^2(t) dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

$$K_a = \frac{X_m}{X_{\text{скз}}}, K_\varphi = \frac{X_{\text{скз}}}{X_{\text{ср.выпр}}} - \text{коэффициенты амплитуды и формы;}$$

Прямоугольный импульс.

$$a_k = 2 \cdot X_m \cdot \frac{\tau}{T} \cdot S\left(\frac{k \cdot \tau}{T}\right), \quad b_k = 0, \quad \frac{a_0}{2} = X_m \cdot \frac{\tau}{T} - \text{среднее}, \quad X_{\text{СКЗ}}^2 = X_m^2 \cdot \frac{\tau}{T} - \text{СКЗ},$$

$$S(x) = \frac{\sin(\pi \cdot x)}{\pi \cdot x}.$$

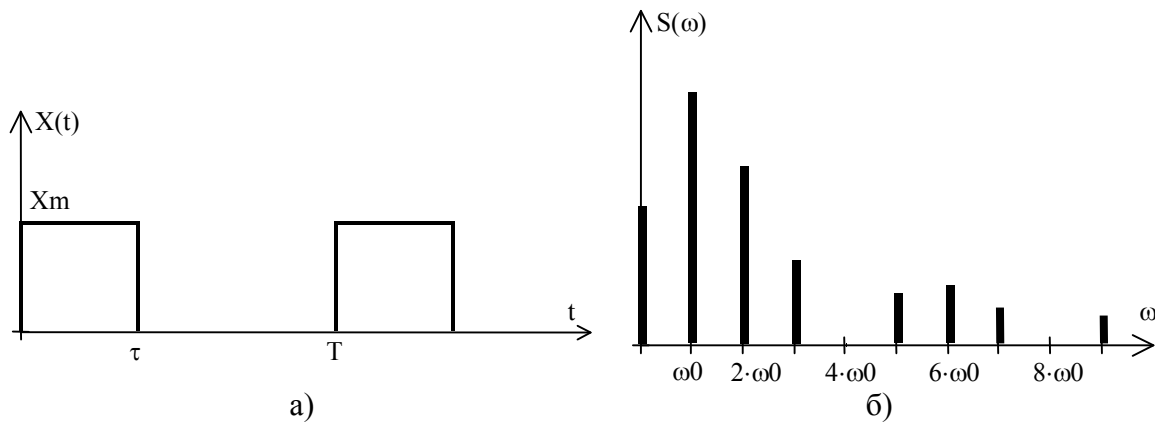


Рис. 1. Прямоугольный импульс (а) и его дискретный спектр (б)

Треугольный импульс (симметричный).

$$a_k = X_m \cdot \frac{\tau}{T} \cdot S^2\left(\frac{k \cdot \tau}{2 \cdot T}\right), \quad b_k = 0, \quad \frac{a_0}{2} = X_m \cdot \frac{\tau}{2 \cdot T} - \text{среднее}, \quad X_{\text{СКЗ}}^2 = X_m^2 \cdot \frac{\tau}{3 \cdot T} - \text{СКЗ}.$$

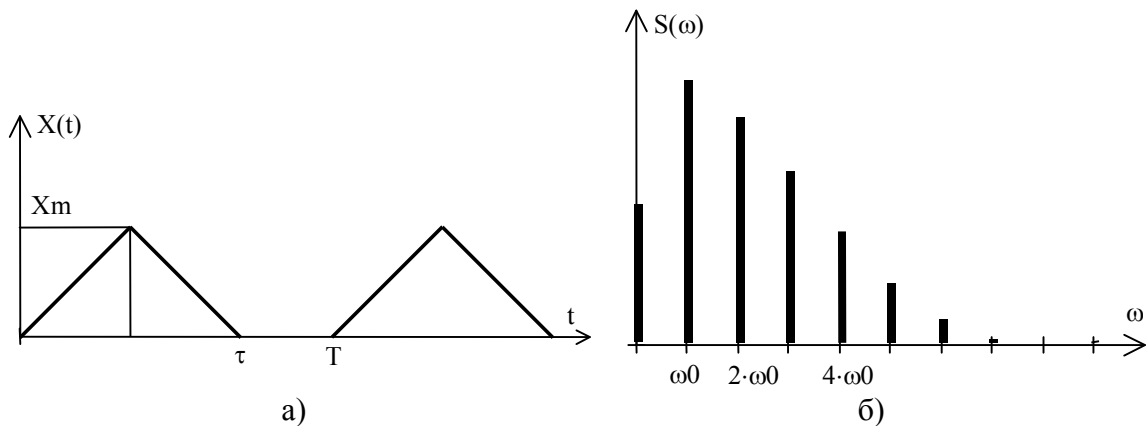


Рис. 2. Треугольный импульс (симметричный) (а) и его спектр (б)

Треугольный импульс (пилообразный).

$$b_k = -X_m \cdot \frac{1}{\pi \cdot k}, \quad a_k = 0, \quad \frac{a_0}{2} = X_m \cdot \frac{1}{2} - \text{среднее}, \quad X_{\text{СКЗ}}^2 = X_m^2 \cdot \frac{1}{3} - \text{СКЗ}.$$

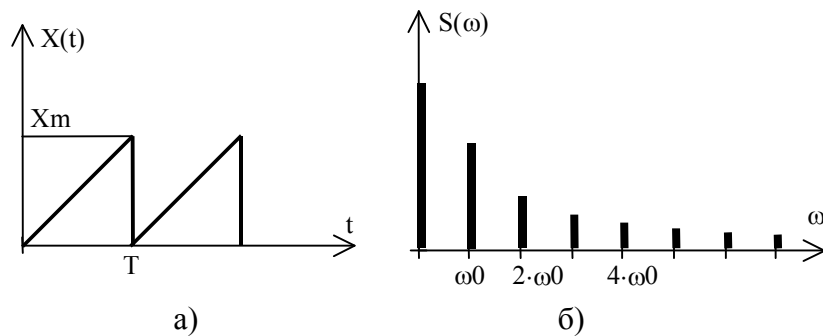


Рис. 3. Треугольный импульс (пилообразный) (а) и его спектр (б)

Полусинусоида.

$$a_k = X_m \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \left[S\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot k \cdot \tau}{T} - 1\right)\right) + S\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot k \cdot \tau}{T} + 1\right)\right) \right], \quad b_k = 0, \quad \frac{a_0}{2} = X_m \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \frac{2}{\pi} - \text{среднее},$$

$$X_{\text{СКЗ}}^2 = X_m^2 \cdot \frac{\tau}{2 \cdot T} - \text{СКЗ}.$$

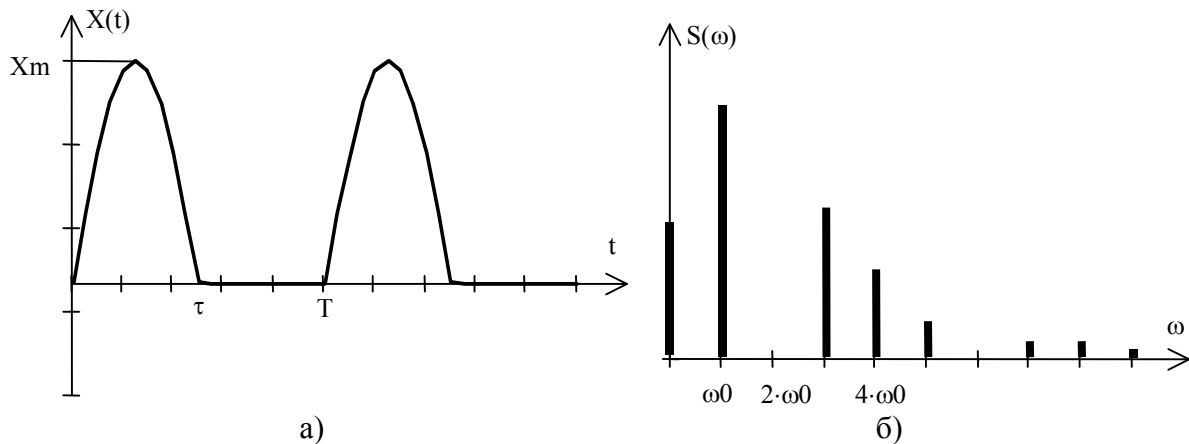


Рис. 4. Полусинусоида (а) и ее спектр (б)

2.2. Моделирование спектра периодических сигналов в программе Mathcad

2.2.1. При моделировании спектра периодического сигнала в пакете программ Mathcad достаточно знать выражения для коэффициентов ряда Фурье и задать требуемое количество анализируемых гармоник.

Например, для прямоугольного сигнала требуется проанализировать первые 10 гармоник.

$k := 0..9$ - номера гармоник

$X_m := 10$ - амплитуда импульса

$t_0 := 0.5$ - длительность импульса

$T := 2$ - период сигнала

$Q := \frac{T}{t_0}$ $Q = 4$ - скважность сигнала

$FF(x) := \frac{\sin(\pi \cdot x)}{\pi \cdot x}$ - функция отсчетов

$a_k := 2 \cdot \frac{X_m}{Q} \cdot FF\left(\frac{k \cdot 1}{Q}\right)$ $a_0 := 1 \cdot \frac{X_m}{Q}$ $b_k := 0$ - коэффициенты ряда Фурье

$C_k := \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}$ - амплитудно-частотная характеристика

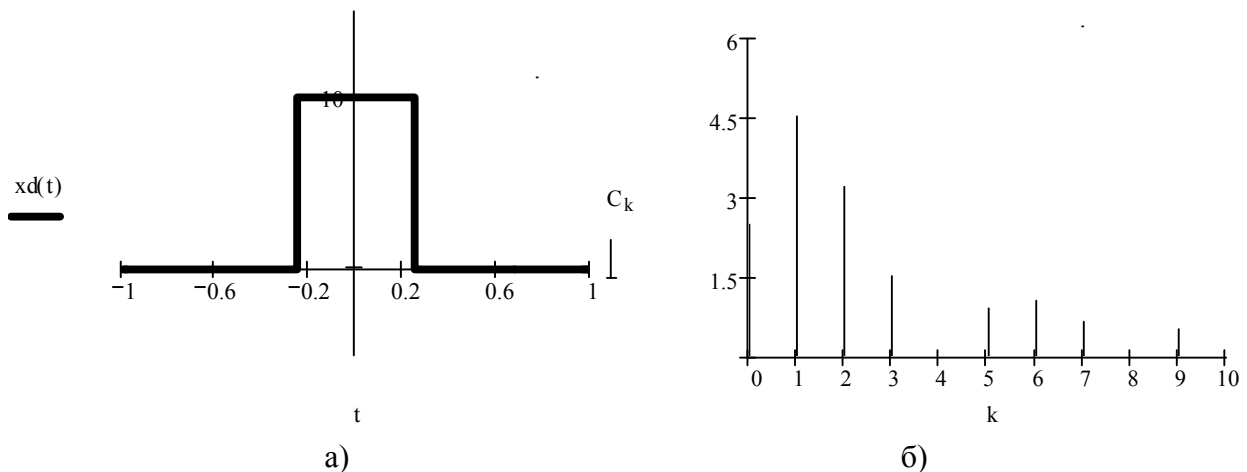


Рис. 5. Прямоугольный периодический сигнал (а) и его спектр (б)

2.2.2. Более сложный способ вычисления спектра, но вместе с тем более универсальный, использует встроенные функции интегрирования Mathcad и позволяет вычислять коэффициенты ряда Фурье при произвольной форме периодических сигналов.

Например, для прямоугольного сигнала требуется проанализировать первые 10 гармоник.

Сигнал может быть задан симметрично (рис. 5.а) на интервале времени от $-(T/2)$ до $+(T/2)$. В этом случае изменятся пределы интегрирования при вычислении коэффициентов ряда, выражения 2–3.

$k := 0..9$ - номера гармоник

$X_m := 10$ - амплитуда импульса

$t_0 := 0.5$ - длительность импульса

$T := 2$ - период сигнала

$Q := \frac{T}{t_0}$ $Q = 4$ - скважность сигнала

$t_{st} := \frac{-T}{2}$ $t_{max} := \frac{T}{2}$ $t := t_{st}, t_{st} + t_0 \cdot 10^{-2} .. t_{max}$ - время моделирования

$x_d(th) := \begin{cases} X_m & \text{if } |th| \leq \frac{t_0}{2} \\ (0) & \text{otherwise} \end{cases}$ - математическое описание сигнала

$Ad_k := \frac{2}{T} \cdot \int_{t_{st}}^{t_{max}} x_d(th) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot k \cdot th\right) dth$ $Ad_0 := \frac{1}{T} \cdot \int_{t_{st}}^{t_{max}} x_d(th) dth$ - коэффициенты ряда Фурье

$Bd_k := \frac{2}{T} \cdot \int_{t_{st}}^{t_{max}} x_d(th) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot k \cdot th\right) dth$ - коэффициенты ряда Фурье

$Cd_k := \sqrt{(Ad_k)^2 + (Bd_k)^2}$ - амплитудно-частотная характеристика

Результат вычисления амплитудного спектра будет такой же, как на рис. 5.б.

2.3. Спектры непериодических сигналов

Отличие переходных (непериодических) сигналов от периодических в том, что их нельзя представить суммой гармоник, то есть в виде **дискретного спектра**. Однако такие сигналы можно представить в виде **непрерывного спектра**, получаемого преобразованием Фурье

$$S(j \cdot \omega) = \int_0^{\infty} X(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt = S(\omega) \cdot e^{j \cdot \varphi(\omega)} . \quad (4)$$

Учитывая равенства

$$S(j \cdot \omega) = A(\omega) + j \cdot B(\omega) \text{ и } e^{-j \cdot \omega t} = \cos(\omega \cdot t) - j \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

спектр сигнала вычисляется также в виде

$$S(j \cdot \omega) = \int_0^{\infty} X(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt - j \cdot \int_0^{\infty} X(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) dt . \quad (5)$$

Экспоненциальный импульс.

$$X(t) = \begin{cases} X_m \cdot e^{-a \cdot t} , & t \geq 0; \\ 0 & , t < 0. \end{cases} \quad (6)$$

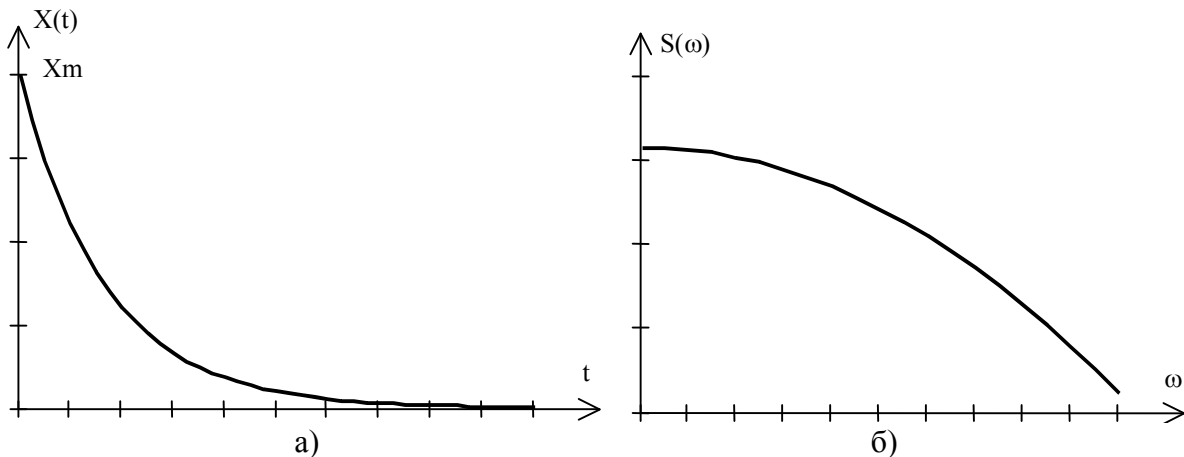


Рис. 6. Экспоненциальный импульс (а) и его спектр (б)

Затухающие колебания.

$$X(t) = \begin{cases} X_m \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) , & t \geq 0; \\ 0 & , t < 0. \end{cases} \quad (7)$$

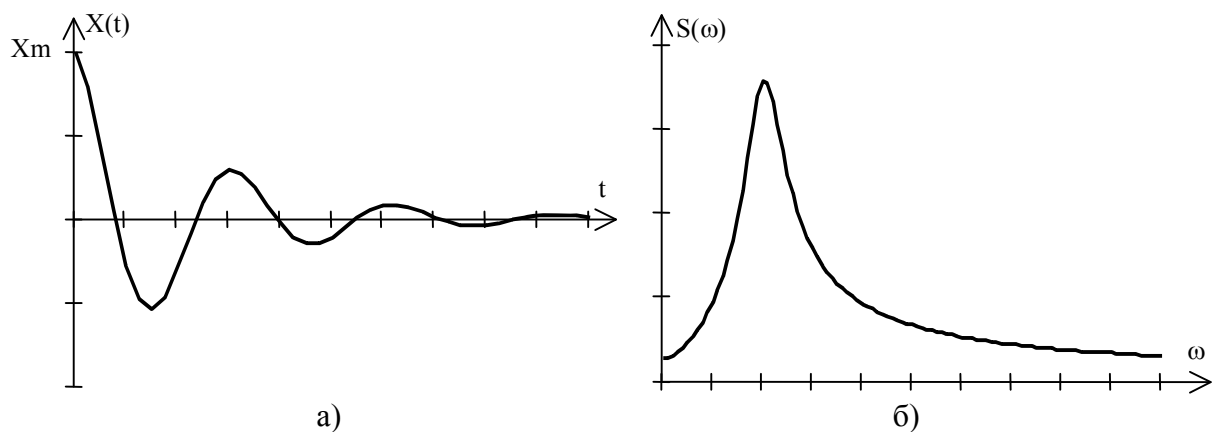


Рис. 7. Затухающие колебания (а) и их спектр (б)

Прямоугольный импульс.

$$X(t) = \begin{cases} X_m & , 0 \leq t \leq \tau; \\ 0 & , t < 0; t > \tau. \end{cases} \quad (8)$$

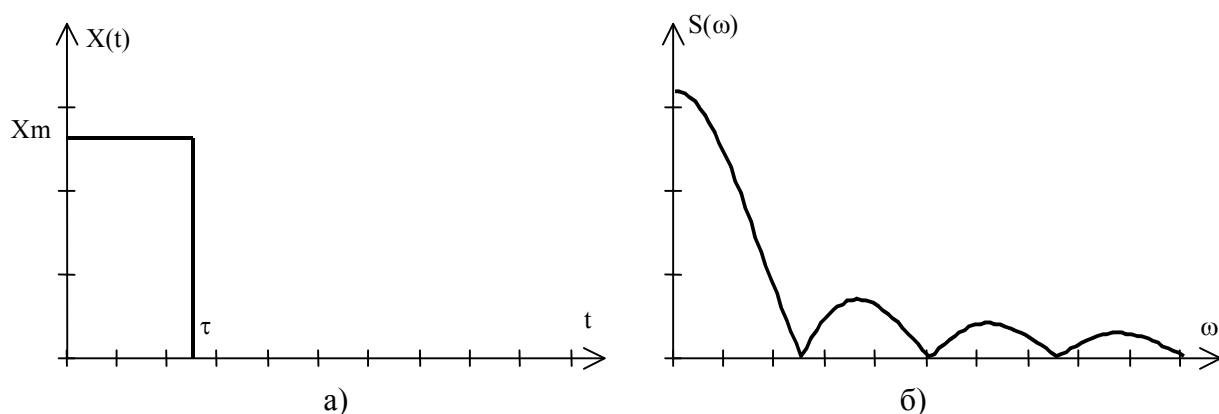


Рис. 8. Прямоугольный импульс (а) и его спектр (б)

2.4. Моделирование спектра непериодических сигналов в программе Mathcad

Вычисление спектра непериодических сигналов рекомендуется производить в соответствии с выражениями (5). В этом случае удастся повысить скорость вычислений по сравнению с прямым вычислением интегрального преобразования Фурье (4).

Далее приведен пример вычисления спектра прямоугольного импульса.

$X_m := 10$ - амплитуда импульса

$t_0 := 0.5$ - длительность импульса

$t := 0, t_0 \cdot 10^{-2} \dots t_0 \cdot 2$ - время моделирования

$$x(t) := \begin{cases} X_m & \text{if } t \leq t_0 \wedge t \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$A(q) := \int_0^{\infty} x(t) \cdot \cos(q \cdot t) dt \quad B(q) := \int_0^{\infty} x(t) \cdot \sin(q \cdot t) dt$$

$$S(q) := \sqrt{A(q)^2 + B(q)^2} \quad - \text{амплитудный спектр сигнала}$$

$fx := 0, 0.1.. 50$ - частотный диапазон моделирования

$\omega x(fx) := 2 \cdot \pi \cdot fx$ - круговая частота

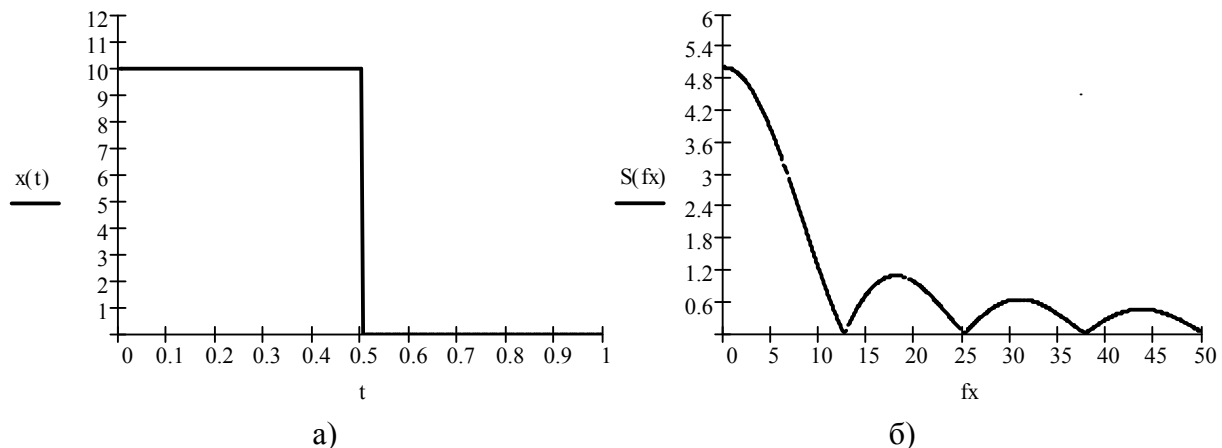


Рис. 9. Прямоугольный импульс (а) и его спектр (б)

2.5. Анализ спектра с помощью Быстрого преобразования Фурье (БПФ)

Для анализа спектра сигналов, записанных в виде файлов данных, в пакете программ Mathcad2001 имеются следующие функции:

READPRN("file") – считывание массива данных из текстового файла;

WRITEPRN("file") – запись данных из матрицы в текстовый файл;

READWAV(file) – считывание массива амплитуд из WAV-файла (колонки соответствуют каналам данных, строки – моментам времени).

WRITEWAV(file,s,b) – запись матрицы в формате WAV-файла;

CFFT(A) – вычисление БПФ матрицы A (следует не путать с функцией **cfft(A)**);

ICFFT(B) – вычисление обратного БПФ матрицы B.

Функции вычисления БПФ требуют, чтобы количество обрабатываемых отсчетов было кратно 2^V , где V – целое число.

2.5.1. Например, требуется записать текстовый файл данных сигнала, состоящего из основной гармоник и некоторого равномерно распределенного шума.

$F\ddot{a} := 8.192 \cdot 10^3$ - частота дискретизации, Гц $T\ddot{a} := F\ddot{a}^{-1}$

$fx := 96$ - основная частота сигнала, Гц $\omega x := 2 \cdot \pi \cdot fx$

$Ux := 10$ - амплитуда сигнала

Для записи не менее двух периодов основной гармоник fx при условии, что количество отсчетов N_{\max} кратно 2^V , N_{\max} должно определяться следующим образом:

$$N_h := \text{floor} \left(\frac{\log \left(\frac{F\ddot{a}}{fx} \cdot 2 \right)}{\log(2)} \right) \quad N_h = 7$$

$$N_{\max} := 2^{N_h+1} \quad N_{\max} = 256$$

$i := 0.. N_{\max} - 1$ - отсчеты сигнала

$x_{ideal} := U_x \cdot 1 \cdot \sin(\omega_x \cdot T \cdot i)$ - основная гармоника сигнала

$L := 10$ - количество гармоник шума

$K_r := 20$ - коэффициент гармоник $\lambda := \frac{K_r \cdot 100^{-1}}{\sqrt{L - 2 + 1}}$

$x_i := x_{ideal} + \sum_{k=2}^L U_x \cdot \lambda \cdot 1 \cdot \sin(\omega_x \cdot T \cdot i \cdot k)$ - суммарный сигнал

В данном примере используются кратные основной частоте сигнала гармоники шума.

2.5.2. Далее производится запись полученных отсчетов сигнала в файл «DataX.prn»

$f := \text{"DataX.prn"}$ WRITEPRN(f) := x -запись отсчетов сигнала в файл

2.5.3. Если требуется произвести считывание данных, например, записанных с помощью выше указанных процедур, выполняется обратная операция

$d := \text{"DataX.prn"}$ -файл входных данных

$Y := \text{READPRN}(d)$ - чтение входных данных из файла

$nm := \text{length}(Y)$ - количество отсчетов в файле данных

$i := 0..nm - 1$ $nm = 256$

$F_o := 8.192 \cdot 10^3$ -частота дискретизации $T := (F_o)^{-1}$

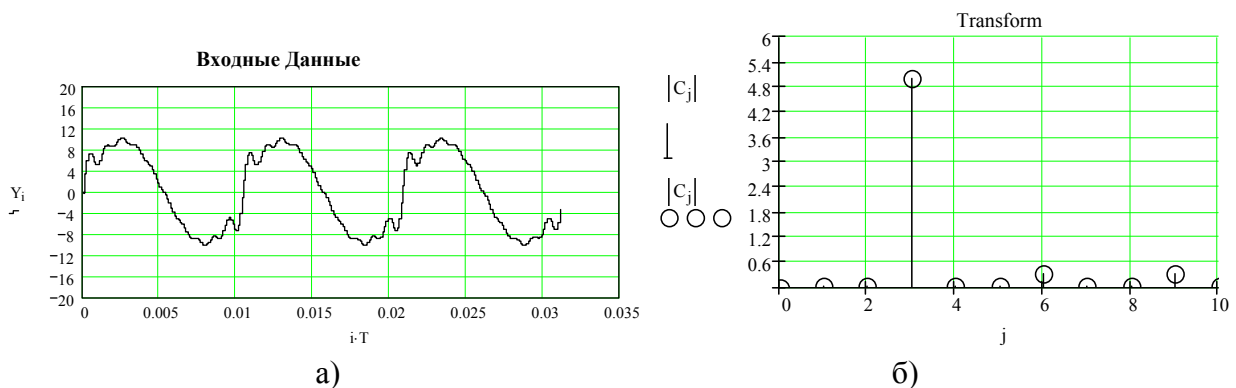


Рис. 10. Сигнал, записанный в файл данных «DataX.prn» (а) и его спектр (б)

2.5.4. Поскольку количество отсчетов в файле кратно 2^V , то нет необходимости выполнять проверку и усечение количества обрабатываемых данных.

Далее выполняется БПФ и строится график амплитудного спектра сигнала.

$C := \text{CFFT}(Y)$ - Амплитудно-фазовый спектр

$j := 0..16$ - индекс гармоник

2.5.5. По номеру можно определить соответствующую частоту гармоники в спектре.

$f_j := 3 \cdot \frac{F_o}{nm}$ $f_j = 96$

В данном случае гармонике с номером 3 соответствует частота 96 Гц.

3. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

При выполнении лабораторной работы используется пакет программ Mathcad версии 2000 и выше.

4. ПРОГРАММА ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

- 4.1. Изучить методы анализа спектра сигналов в пакете программ Mathcad.
- 4.2. Выполнить запись и считывание файла, содержащего отсчеты сигнала.
- 4.3. Рассчитать и проанализировать спектры сигналов с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ).
- 4.4. Рассчитать и проанализировать спектры непериодических сигналов с помощью преобразования Фурье.
- 4.5. Рассчитать и проанализировать спектры периодических сигналов с помощью дискретного ряда Фурье.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 5.1. Определение спектра сигнала.
- 5.2. Методы расчета спектра периодического сигнала.
- 5.3. Методы расчета спектра непериодического сигнала.
- 5.4. Определение среднего, среднеквадратического, средневыпрямленного значений, коэффициентов амплитуды и формы сигнала.
- 5.5. Основные функции Mathcad для записи/считывания файлов данных и анализа спектра.
- 5.6. Как определить ближайшее меньшее число кратное 2^V , где V – целое число.
- 5.7. Как задать в Mathcad прямоугольный импульс (треугольный симметричный).
- 5.8. Какие функции используются в Mathcad для записи/считывания текстовых файлов данных.
- 5.9. Как определить количество отсчетов в текстовом файле данных.
- 5.10. Какие функции Mathcad используются для вычисления БПФ, обратного БПФ.

6. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОГО ЗАДАНИЯ

6.1. Спектральный анализ с использованием БПФ

- 6.1.1. Подготовить и ввести в файл программы «lab2_1.mcd» исходные данные (**п.2.5.1**), необходимые для синтеза **сигнала X**: частота сигнала $F_c = 100$ Гц; амплитуда – 10; коэффициент гармоник $K_H = 20\%$ ($L=10$, первые 10 гармоник с равномерным распределением), частота дискретизации $F_d = 10$ кГц. Количество отсчетов сигнала должно быть 2^B , где B – целое число (рекомендуется записать не менее 2-х периодов сигнала).
- 6.1.2. Записать отсчеты полученного сигнала в файл «dataX.prn». Построить график сигнала (**п. 2.5.2**).
- 6.1.3. Создать второй программный файл «lab2_2.mcd», в котором произвести считывание данных (**п. 2.5.3**) из файла «dataX.prn» в матрицу Y .
- 6.1.4. Построить график **сигнала Y** (**п. 2.5.3**). Определить количество отсчетов сигнала в файле (считая, что количество заранее неизвестно).
- 6.1.5. Вычислить спектр сигнала методом БПФ (функция $C = \text{CFFT}(Y)$). Построить график амплитудного спектра сигнала (**п. 2.5.4**).

- 6.1.6. Проверить соответствие между номером гармоники в полученном спектре и действительной частотой гармоники в сигнале (**п. 2.5.5**). Для этого необходимо найти **номер K** максимальной гармоники в спектре – данная гармоника соответствует основной частоте сигнала $F_c=100$ Гц. По формуле $F_k=K \cdot F_d / N$ вычисляется частота гармоники (N – количество отсчетов анализируемого сигнала). В общем случае имеется отклонение между действительной частотой F_c и частотой F_k .
- 6.1.7. **Повторить пп. 6.1.1 – 6.1.6** для гармонического сигнала с частотой $F_c=2^7=128$ Гц. (при частоте дискретизации $F_d=10$ кГц). Построить графики исходного сигнала **X** и его спектра **C**, а также проверить соответствие между номером гармоники в полученном спектре и действительной частотой гармоники в сигнале.
- 6.1.8. **Повторить пп. 6.1.1 – 6.1.6** для гармонического сигнала с частотой $F_c=100$ Гц. (частота дискретизации при этом равна 2^V , где V – целое число, например $V=13$). Построить графики исходного сигнала **X** и его спектра **C**, а также проверить соответствие между номером гармоники в полученном спектре и действительной частотой гармоники в сигнале.
- 6.1.9. **Повторить пп. 6.1.1 – 6.1.6** для гармонического сигнала с частотой $F_c=2^7=128$ Гц. (частота дискретизации при этом равна 2^V , где V – целое число). Построить графики исходного сигнала **X** и его спектра **C**, а также проверить соответствие между номером гармоники в полученном спектре и действительной частотой гармоники в сигнале.

6.2. Анализ спектра с использованием преобразования Фурье и ряда Фурье

- 6.2.1. Создать программный файл «lab2_3.mcd». Задать непериодический сигнал в виде функции времени (форма сигнала задается преподавателем), **п. 2.4**.
- 6.2.2. Вычислить спектр сигнала, используя преобразование Фурье (мнимую и действительную части рекомендуется вычислять отдельно). Построить график полученного спектра сигнала (**п. 2.4**).
- 6.2.3. Определить коэффициенты ряда Фурье для выбранного сигнала в случае, когда сигнал является периодическим (период задать в два раза больше длительности сигнала). Построить график полученного спектра сигнала (представить его в виде дискретных гармоник), **п. 2.2.2**.
- 6.2.4. Сравнить графики полученных спектров.

7. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. – Киев: Вища школа, 1983. – 455 с.
2. Каганов В.И. Радиотехника+компьютер+Mathcad. – М.: Горячая линия - Телеком, 2001. – 416 с.
3. Иванов В.А. и др. Математические основы теории автоматического регулирования. Учеб. пособие для вузов. / Под ред. Чемоданова Б.К. – М.: Высшая школа, 1971. – 808 с.
4. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003. – 604 с.