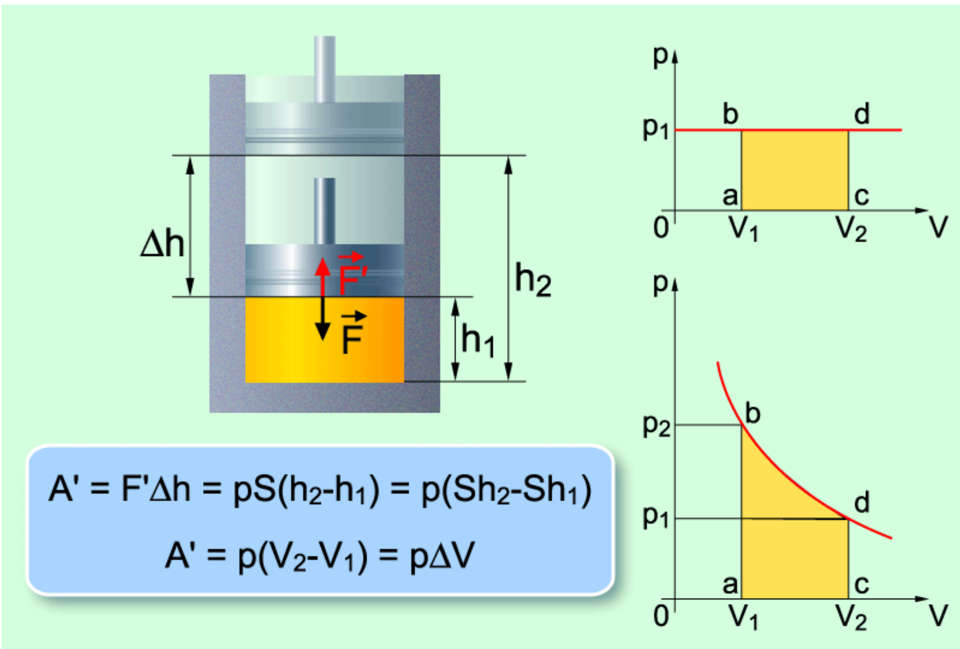
Е.В. Полицинский

МЕХАНИКА, МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА:

конспекты лекций



2010

П 50

Механика, молекулярная физика и термодинамика: конспекты лекций / *Е.В. Полицинский*. – Юргинский технологический институт Национального исследовательского Томского политехнического университета, 2010 – 206с.

Учебное пособие написано на основе курса лекций, читаемых для студентов механико-машиностроительного факультета Юргинского технологического института Национального исследовательского Томского политехнического университета. Содержание соответствует программе курса физики для технических университетов. Изложены физические основы механики, молекулярной физики и термодинамики. Главное внимание уделено рассмотрению физического смысла и содержания основных понятий и законов. Автор широко использует таблицы и схемы для обобщения и систематизации теории, приводит аналогию между параметрами и уравнениями, связями между физическими величинами. Пособие хорошо иллюстрировано, может использоваться для самостоятельного изучения теоретического материала, для работы на лекционных занятиях в комплексе с лекциями-презентациями, в качестве ориентировочной основы действий для самостоятельного написания студентами конспектов.

Учебное пособие предназначено для студентов и преподавателей технических вузов.

УДК 53 (075)
ББК 22.3:74.202 я73

Оглавление

Введение

Физика — это наука, изучающая общие свойства движения вещества и поля. (А.И.Иоффе).

Физика наука о простейших формах движения материи и соответствующих им наиболее общих законах природы. Изучаемые физикой формы движения материи (механическая, тепловая, электрическая, магнитная и т.д.) являются составляющими более сложных форм движения материи (химических, биологических и др.), поэтому **физика является основой для других естественных наук** (астрономия, биология, химия, геология и др.).

Физика – база для создания новых отраслей техники — фундаментальная основа подготовки инженера.

В своей основе **физика – экспериментальная наука**: её законы базируются на фактах, установленных опытным путем. В результате обобщения экспериментальных фактов устанавливаются **физические законы – устойчивые повторяющиеся объективные закономерности, существующие в природе, устанавливающие связь между физическими величинами.**

Все, что мы узнали о материальном мире, возникло из опыта. И любые заключения и предположения, которые мы делаем о свойствах материальных объектов, в конечном счете, проверяются на опыте. Опыт является окончательным критерием правильности наших представлений. В процессе опыта мы определяем те или иные физические величины, например скорость или температуру. Таким образом, определить физическую величину означает указать способ ее измерения. Физические величины являются наблюдаемыми. Напротив, если мы говорим о какой-либо величине и не можем указать способ её измерения, то она не является наблюдаемой. Такие величины просто не рассматриваются в физике, не являются её предметом. Физические величины являются достоверными в том смысле, что физический опыт должен обладать свойством повторяемости. Это значит, что при повторении опыт, проведенный в равных условиях, должен приводить всякий раз к одинаковому результату. В других науках это не всегда так, и чем менее выполняется это требование, тем менее эта наука достоверна.

Физические величины обладают свойством размерности. **Под размерностью физической величины понимают совокупность параметров, необходимых для её определения.** Другими словами, указать размерность физической величины означает указать, какие измерения нужно произвести, чтобы её определить. Самые простые физические величины – это длина, время и масса. Они имеют, как говорят, собственные размерности, обозначаемые соответственно буквами *L*, *T* и *M*, потому что для их определения никаких других измерений производить не нужно. Но уже, например, для определения скорости тела необходимо произвести два независимых измерения – длины *L* и времени *T*. Поэтому размерность скорости есть отношение *L/T*. Как мы увидим, размерность физической величины находится с помощью формулы, которая служит её определением.

Подчеркнем, что размерность физической величины и единицы её измерения – это разные понятия. Например, скорость может измеряться в *см/с*, или в *м/с*, или в *км/ч*, а размерность её при этом не меняется – она всегда есть *L/T*, потому что независимо от того, в каких единицах мы измеряем скорость, мы всегда производим измерения одних и тех же двух параметров – длины *L*, и времени *T*. Размерность физической величины представляет её важнейшее свойство. Часто приходится сравнивать между собой различные величины. Физические величины можно сравнивать, только если они обладают одинаковой размерностью. Например, нельзя сравнивать между собой длину пути и отрезки времени: это бессмысленно – они обладают разной размерностью.

Все то, что может быть выражено количественно, называют величиной. **Физическая величина – это характеристика свойств физических объектов или явлений, имеющая числовое значение, которое получается в результате измерений.** Каждая физическая величина должна иметь свою единицу измерения. Число, показывающее, сколько в измеренной величине содержится единиц, называют числовым значением этой величины. Измерение, при котором значение величины определяется непосредственным сравнением с её единицей, называют прямым измерением. **Прямое измерение** – измерение, полученное с помощью измерительного прибора, например – температуры с помощью термометра, длины с помощью линейки, микрометра, штангенциркуля. Прямое измерение далеко не всегда дает достаточно точный результат, не всегда выполнимо и удобно. Например, при определении объема шара, мы не можем воспользоваться каким либо прибором для проведения прямого измерения, но известно что $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$. Воспользовавшись например штангенциркулем и тем, что $D = 2 \cdot R$ – объём может быть найден, если использовать записанную выше формулу. Измерение, при котором числовое значение величины находится путем вычисления по формуле, называется **косвенным измерением**. На практике чаще приходится выполнять косвенные измерения.

Таким образом, для установления количественных соотношений между физическими величинами их необходимо измерять, т.е. сравнивать их с соответствующими эталонами. Для этого вводится система единиц, которая постулирует основные единицы физических величин и на их базе определяет единицы остальных физических величин, которые называются производными единицами.

Сначала в разных странах использовались свои единицы измерения, например меры длины в Англии и США – дюйм (25,4 мм), фут (12 дюймов); в России – вершак (4,445 см), аршин (0,7112 м), сажень (2,13336 м), верста (1,0668 км) и т.д. Это вносило неудобства, которые необходимо было ликвидировать.

Совокупность основных единиц с выведенными из них производными единицами называется системой единиц. Конечно, ряд внесистемных единиц, безусловно, широко используется. Например, на флоте – миля (1852 м), в быту – литр (10^{-3} м^3) и т.д.

Международная Система единиц (СИ)

(System International – SI).

Основные единицы:

Метр (м) – длина пути, проходимого светом в вакууме за 1/299792458 с.

Килограмм (кг) – масса, равная массе международного прототипа килограмма (платиноиридиевого цилиндра, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа).

Секунда (с) – время, равное 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

Ампер (А) – сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенных в вакууме на расстоянии 1 метр один от другого, создает между этими проводниками силу, равную $2\cdot10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Кельвин (К) – 1/213,16 часть термодинамической температуры тройной

точки воды.

Моль (моль) – количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в 12 г изотопа углерода ^{12}C.

Кандела (кд) – сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540\cdot10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср.

Дополнительные единицы системы СИ:

Радиан (рад) – угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

Стерадиан (ср) – телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающей на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

Единицы, которые устанавливаются произвольно и независимо друг от друга называются основными, а те, которые выводятся из формул, называются производными.

По определению мощность – работа в единицу времени $N = \frac{A}{t}$.

Далее подставляем единицы работы и времени получаем 1дж/с = $1\frac{н \cdot м}{с} = 1\frac{кг \cdot м \cdot м}{с^2 \cdot с} = 1\frac{кг \cdot м^2}{с^3}$. Таким образом, получена единица измерения мощности названная ватт.

Важно уметь работать с единицами измерения, быстро и правильно переходить к системе СИ.

1). $\upsilon = 720\frac{км}{ч} = \frac{720 \cdot 1000м}{3600с} = 200\frac{м}{с}$;

2). $V = 10 см^3$ (м^3 ?)

1м =100 см; 1м^2=10^4 м^2; 1м^3=10^6 см^3 и, следовательно, 1 см^3 = 10^{-6}м^3, откуда 10 см^3 = 10^{-5}м^3.

3). V = 2л (м^3 ?)

1 л = 1 дм^3=10^{-3} м^3 $\Rightarrow$ V = 2·10^{-3} м^3.

Физические величины могут быть скалярными и векторными. **Физические величины, характеризующиеся числовым значением, направлением и геометрическим способом сложения, называются векторными.**

Остановимся на действиях с векторами.

Коллинеарные векторы – векторы, направленные вдоль одной прямой или параллельные друг другу (векторы *a* и *b*, рис.1).

При умножении вектора $\vec{a}$ на скаляр *k* мы получим новый вектор $\vec{p}$ модуль, которого равен произведению модуля вектора $\vec{a}$ на модуль скаляра *k* $\vec{p} = k \cdot \vec{a}$.

Модуль вектора – скаляр.

При решении задач важно уметь переходить для нахождения числовых значений векторных величин к проекциям на соответствующие оси.

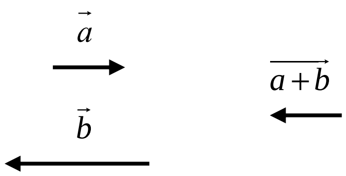
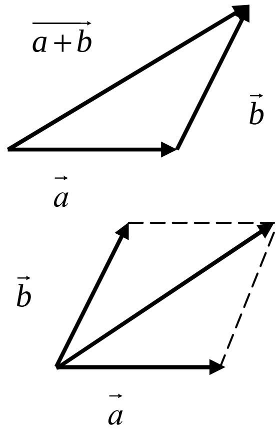


Рис. 1. Сложение коллинеарных векторов



На рис. 2 показаны способы сложения неколлинеарных векторов

Рис.2. Сложение неколлинеарных векторов

<u>Проекция вектора</u> на соответствующую ось – <u>длина отрезка</u> на оси ограниченная проекциями начала и конца вектора на данную ось. Если от проекции начала вектора к проекции конца вектора мы идём против направления оси, то проекция отрицательна (рис.3).

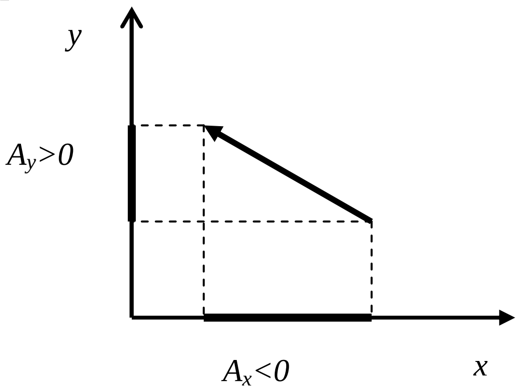
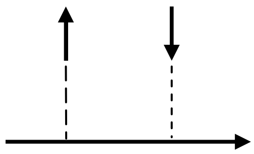


Рис.3. Проекции вектора A на координатные оси

Если вектор перпендикулярен оси, то при любом направлении вектора его проекция на ось равна нулю.



Проекция суммы векторов на координатную ось равна алгебраической сумме проекций складываемых векторов на ту же ось.

Для полноценного понимания учебного материала необходимо:

1. Знать смысл и значение каждого понятия.
2. Знать и уметь устанавливать связи между понятиями.
3. Владеть использующимися действиями и операциями.

Для описания физических явлений и процессов широко используется математический аппарат. Без математических знаний, навыков и умений нельзя полноценно изучать физику. Поэтому настоятельно рекомендуем самостоятельно повторить (**смотрите приложение**):

1. Правила приближённого вычисления.

2. Правила действия со степенями и корнями, работу с числами, приведёнными к стандартному виду.

3. Характеристики геометрических фигур (площади, объёмы фигур).

4. Тригонометрические функции острого угла, основные тригонометрические тождества.

5. Основные производные.

6. Табличные интегралы.

Для самостоятельной работы с теорией, самостоятельному написанию конспектов рекомендуем использовать обобщённые планы изучения основных элементов физических знаний (рис. 4).

Физическое явление	**Физическая величина**
1. Признаки явления, по которым оно обнаруживается. 2. Условия, при которых явление протекает. 3. Связь данного явления с другими. 4. Объяснение данного явления на основе научной теории. 5. Примеры проявления явления в природе или использования на практике.	1. Название физической величины и её условное обозначение. 2. Характеризуемое явление, процесс, свойство. 3. Определение, физический смысл. 4. Формула, связывающая данную величину с другими. 5. Единицы измерения. 6. Способы измерения величины.
Физический закон	**Физическая теория**
1. Словесная формулировка закона. 2. Математическое выражение закона. 3. Условия применимости закона. 4. Опыты, подтверждающие справедливость закона. 5. Примеры применения закона на практике.	1. Опытное обоснование теории. 2. Основные положения, законы, понятия, принципы в теории. 3. Границы применимости теории. 4. Основные следствия теории. 5. Практическое применение теории.

Рис. 4. Обобщённые планы изучения

Механика

Механика – часть физики, в которой изучаются закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

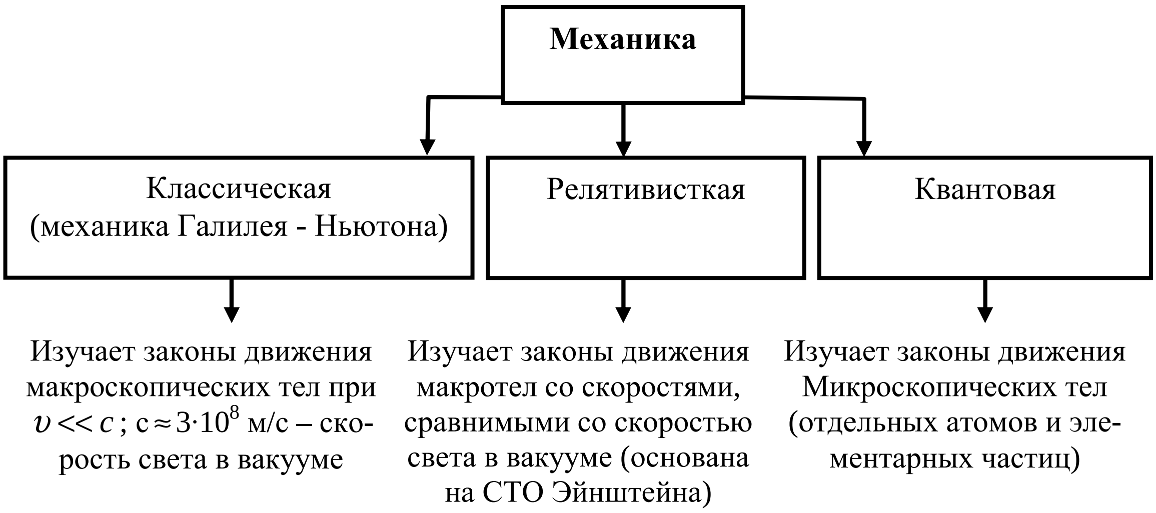


Рис. 5. Предмет изучения механики

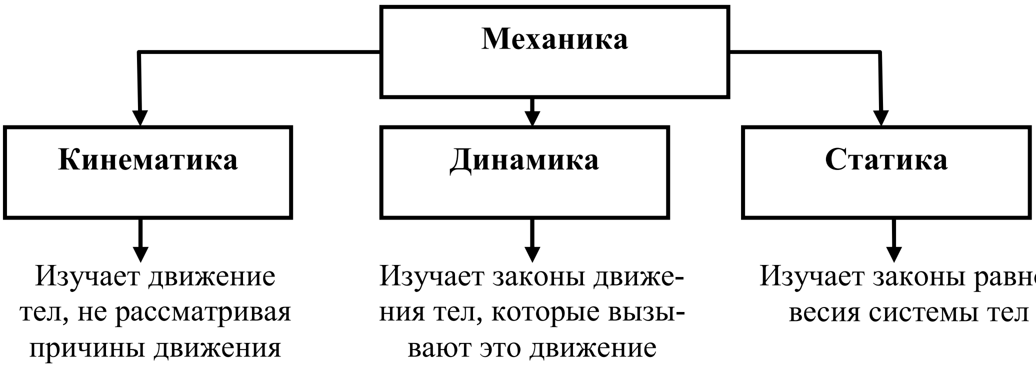


Рис. 6. Разделы механики

Механическим движением называют изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени.

Развитие механики как науки начинается с III века до н.э., когда древнегреческий учёный Архимед (287 – 212 гг. до н.э.) сформулировал закон равновесия рычага и законы равновесия плавающих тел. Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом Г. Галилеем (1564 – 1642 гг.) и окончательно сформулированы английским учёным И. Ньютоном (1643 – 1727 гг.).

Основная задача механики – определять положение тела в любой момент времени.

Физические модели в механике – модели, применяемые для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач.

Материальная точка – тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Абсолютно твердое тело – тело, деформацией которого в условиях данной задачи можно пренебречь и при всех условиях расстояние между любыми двумя точками этого тела остается постоянным.

Абсолютно упругое тело – тело, деформация которого подчиняется закону Гука, а после прекращения внешнего силового воздействия такое тело полностью восстанавливает свои первоначальные размеры и форму.

Абсолютно неупругое тело – тело, полностью сохраняющее деформированное состояние после прекращения действия внешних сил.

Любое движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движений.

Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, жёстко связанная с телом, остается параллельной своему первоначальному положению.

Вращательное движение – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

Совокупность тела отчёта, связанной с ним системой координат и прибора для измерения времени называют **системой отсчёта**.

Тело отсчёта – произвольно выбранное тело, относительно которого определяется положение других (движущихся) тел.

Положение любого движущегося тела определяется по отношению к телу отсчёта, поэтому механическое движение относительно.

Положение материальной точки в пространстве в любой момент времени (закон движения) можно определять либо с помощью зависимости координат от времени

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \qquad (1),$$

(координатный способ), либо при помощи зависимости от времени радиус-вектора

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1^*).$$

(векторный способ), проведенного из начала координат до данной точки (рис. 7). Уравнения (1), (1*) это – кинематические уравнения движения материальной точки.

Произвольное макроскопическое тело или систему тел можно мысленно разбить на малые взаимодействующие между собой части, каждая из которых рассматривается как материальная точка. Тогда изучение движения произвольной системы тел сводится к изучению системы материальных точек. В механике сначала изучают движение одной материальной точки, а затем – движение системы материальных точек.

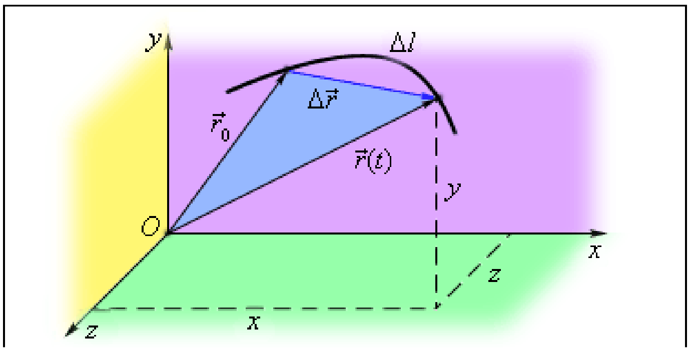


Рис. 7. Способы определения положения тела в пространстве

Перемещаясь с течением времени из одной точки в другую, тело (материальная точка) описывает некоторую линию. Линию, которую описывает движущиеся тело называют **траекторией**.

Путь (S) – расстояние, пройденное телом (материальной точкой) вдоль траектории движения.

Перемещение ($\vec{S}$ ($\Delta\vec{r}$)) – вектор, соединяющий начальное и конечное положение тела; он направлен от начальной точки движения тела к конечной (рис. 8).

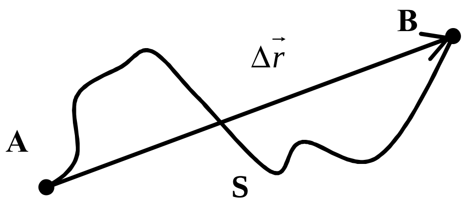


Рис. 8. Путь и перемещение

Пример. Автомобиль дважды проехал вокруг Москвы по кольцевой дороге, длина которой 109 км. Чему равны пройденный автомобилем путь и перемещение?

Путь 218 км; модуль перемещения 0.

Равномерное прямолинейное движение

Прямолинейным равномерным движением называется движение, при котором тело за любые равные промежутки времени совершает одинаковые перемещения и траектория – прямая.

Ниже (таблица 1) приведена зависимость координаты x от времени t для трёх движущихся вдоль оси x тел.

Таблица 1

Зависимость x(t) для трёх движущихся тел

t (с)	0	1	2	3
x_1 (м)	0	2	4	6
x_2 (м)	0	3	6	9
x_3 (м)	10	9	8	7

Из таблицы 1 видно, что все три тела движутся равномерно прямолинейно. Однако, они движутся по разному (первое тело за секунду перемещается на 2 м; второе – на 3 м; третье – на 1 м и движется в сторону противоположную оси *x*). Отсюда возникает необходимость во введении физической величины, которая показывало бы, какое перемещение совершает тело в единицу времени.

Вектор скорости тела $\vec{\upsilon}$ равен отношению перемещения $\Delta\vec{r}$ ко времени перемещения t:

$$\vec{\upsilon} = \frac{\Delta\vec{r}}{t} \qquad (2),$$

$[\upsilon]$ 1м/с.

Модуль скорости равномерного прямолинейного движения равен отношению пути S ко времени t, за которое этот путь пройден:

$$\upsilon = \frac{S}{t} \qquad (2^*).$$

Из (2) и (2*) запишем уравнение равномерного движения

$$\vec{r} = \vec{\upsilon}\cdot t \qquad (3),$$

$$S = \upsilon \cdot t \qquad (3^*).$$

Учитывая, что $S = x\text{-}x_0$, можно записать решение основной задачи механики для равномерного прямолинейного движения:

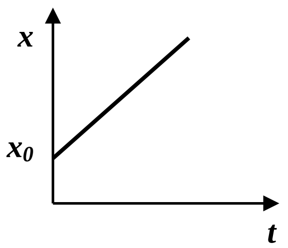
$$x = x_0 + \upsilon\cdot t \qquad (4).$$

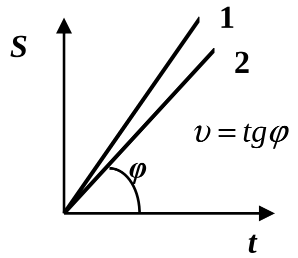
Уравнение скорости

$$\upsilon_x = const \qquad (5).$$

При наличии одной координатной оси можно опустить индекс и записать просто $\upsilon = const$.

Ниже приведены графики зависимости x(t), S(t), υ(t) (рис.9, 10 и 11 соответственно), смотрите (4), (3*) и (5).





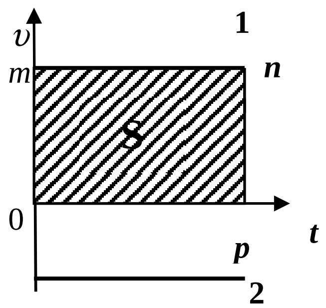


Рис.9. Зависимость x(t) *Рис.10. Зависимость S(t)* *Рис.11. Зависимость $\upsilon(t)$*

Чем больше $tg\varphi$, тем с большей скорость движется тело (рис. 10), т.е. $\upsilon_1 > \upsilon_2$. Модуль перемещения за данный промежуток времени численно равен площади заштрихованного прямоугольника (рис.11), тело 2 (рис.11) движется в противоположном оси *x* направлении.

Равнопеременное прямолинейное движение

Равнопеременным прямолинейным движением называется движение, при котором за любые равные промежутки времени скорость тела изменяется на одинаковую величину и траектория – прямая линия.

Ниже (таблица 2) приведена зависимость проекции скорости υ_x на ось *x* от времени *t* для трёх движущихся вдоль оси *x* тел.

Таблица 2

Зависимость $\upsilon(t)$ для трёх движущихся тел

t (с)	0	1	2	3
υ_1 **(м)**	0	2	4	6
υ_2 **(м)**	0	3	6	9
υ_3 **(м)**	10	9	8	7

У всех трёх тел (таблица 2) движущихся вдоль оси *x* скорость изменяется в единицу времени на одинаковую величину. Однако скорость в единицу времени у этих тел изменяется по разному (для первого тела на 2 м/с за секунду, второго на 3 м/с за секунду, третьего – на 1 м/с за секунду, кроме того, в отличие от первых двух тел скорость с течением времени уменьшается). Возникает необходимость во введении физической величины, которая показывала бы как меняется скорость тела в единицу времени.

Ускорением $\vec{a}$ равнопеременного движения называется физическая величина равная отношению изменения скорости тела ко времени, за которое это изменение произошло

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{t} \qquad (6),$$

где $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0$.

В проекции на какую-либо ось

$$a = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} \qquad (6^*).$$

Если физический смысл скорости состоит в том, что скорость показывает, как быстро изменяются координаты тела ($\upsilon_x = \frac{x - x_0}{t}$), то физический смысл ускорения согласно (6), (6^*) состоит в том, что эта величина показывает нам как быстро с течением времени изменяется скорость тела (быстрота изменения скорости).

Из (6^*)$\Rightarrow$ $[a]$ 1 м/с^2.

Быстроту движения тела при переменном движении характеризуют средней и мгновенной скоростями.

Средняя скорость

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{t} \qquad (7).$$

Мгновенной скоростью называют скорость тела в данный момент времени или в данной точке траектории. Спидометр автомобиля показывает мгновенную скорость.

Если, $a>0$ – движение равноускоренное; $a<0$ – равнозамедленное.

Приведём важнейшие формулы равноускоренного движения известные из школьного курса физики.

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{S}{t} \quad (8), \qquad S = \upsilon_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \quad (12),$$

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2} \quad (9), \qquad S = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2 \cdot a} \quad (13),$$

$$a = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} \quad (10) \text{ и } \Rightarrow \qquad x = x_0 + \upsilon_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2} \quad (14).$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + a \cdot t \quad (11),$$

В задачах, где требуется определить путь за какую-нибудь n-ю секунду движения, например за десятую, то для решения удобно использовать формулу

$$S_n = \frac{a}{2} \cdot (2 \cdot n - 1) \qquad (15),$$

где n – номер секунды, считая от начала движения.

Отметим, что формула (15) некорректна с точки зрения соответствия размерности (будем считать, что $[(2\cdot n-1)]$ 1с).

В задачах на сочетание нескольких видов движения на всём пути $\upsilon_{\text{ср}} = \dfrac{S}{t}$, где $S = S_1 + S_2 + ...$ и $t = t_1 + t_2 + ...$. При этом следует учесть, что конечная скорость на одном участке пути является начальной скоростью на соседнем участке. Ниже приведены графики зависимости *a(t),* υ*(t), S(t), x(t)* для равнопеременного движения.

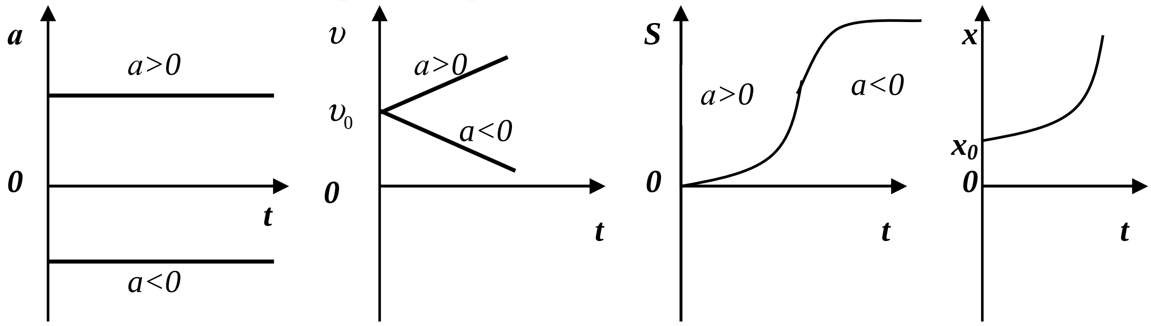


Рис.12. Графики зависимости a(t), υ*(t), S(t), x(t)*
для равнопеременного движения

Прямолинейное движение с переменным ускорением

Если моменты времени t_1, и t_2 бесконечно близки, то время Δt бесконечно мало и в этом случае обозначается через dt. За время dt точка проходит бесконечно малое расстояние dS. Их отношение образует мгновенную скорость точки

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (16).$$

Производная радиус-вектора r по времени определяет мгновенную скорость перемещения точки

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (17).$$

Поскольку перемещение совпадает с бесконечно малым элементом траектории dr = dS, то вектор скорости направлен по касательной к траектории, а его величина:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = \frac{dr}{dt} \qquad (18).$$

В случае движения вдоль оси x

$$\upsilon = dx / dt \qquad (19).$$

Интегрируя выражение (18) в интервале времени от t_0 до t, получим формулу, позволяющую вычислить путь (рис.13), пройденный телом за время от t_1 до t_2 если известна зависимость $\upsilon(t)$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt \qquad (20).$$

Для определения S надо знать функцию $\upsilon(t)$. Тогда путь, пройденный за промежуток времени от t_1 до t_2, определяется заштрихованной на рисунках (рис.13 – 15) площадью.

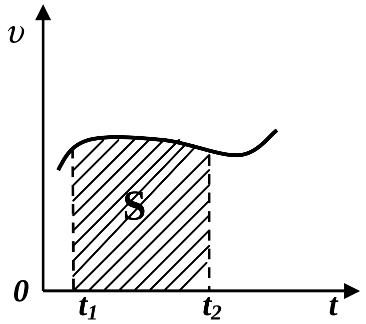


Рис.13. К определению пути пройденного точкой за время от t_1 до t_2

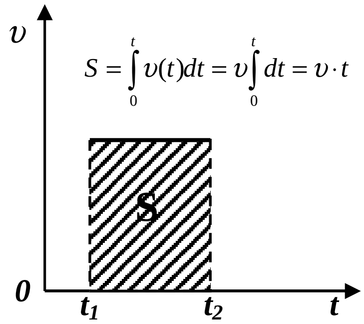


Рис.14. К определению пути пройденного точкой за время от t при равномерном движении

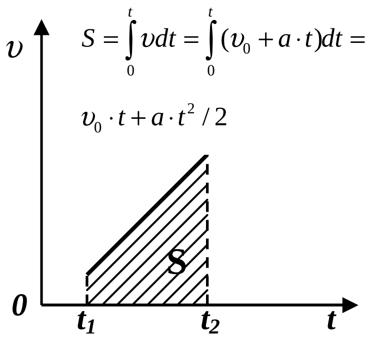


Рис.15. К определению пути пройденного точкой за время от t при равноускоренном движении

Производную скорости по времени, которая является второй производной по времени от радиус-вектора, называют ускорением точки:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (21).$$

Если известен закон $a = a(t)$, то:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt \qquad (22).$$

Траектории движения реальных тел – кривые. Криволинейное движение точки на разных участках траектории движения можно рассмотреть как комбинацию прямолинейного движения и движения по окружности.

Свободным падением называют падение тела в вакууме под действием притяжения к планете. Если $h << R_З$, тело движется с постоянным, направленным вертикально вниз ускорением g = 9,81 м/с^2 – ускорением свободного падения.

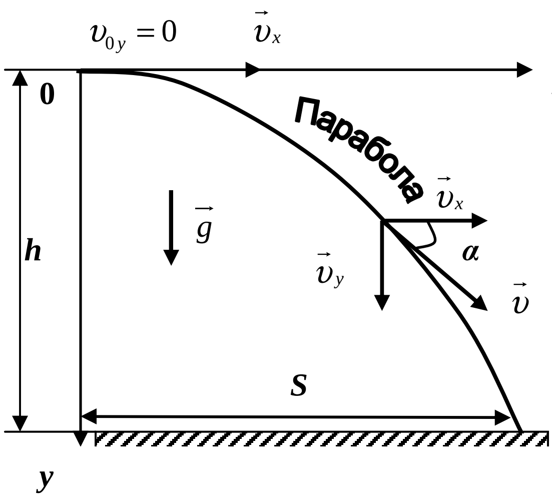
Все законы равнопеременного движения ((8) – (15)) можно применять.

$\upsilon = \upsilon_0 + a \cdot t$	$\upsilon = \upsilon_0 + g \cdot t$	Знаки перед υ_0, υ и g зависят от выбора системы отсчёта (направления оси)
$S = \upsilon_0 \cdot t + \dfrac{a \cdot t^2}{2}$	$h = \upsilon_0 \cdot t + \dfrac{g \cdot t^2}{2}$	

И. т.д.

Движение тела брошенного горизонтально

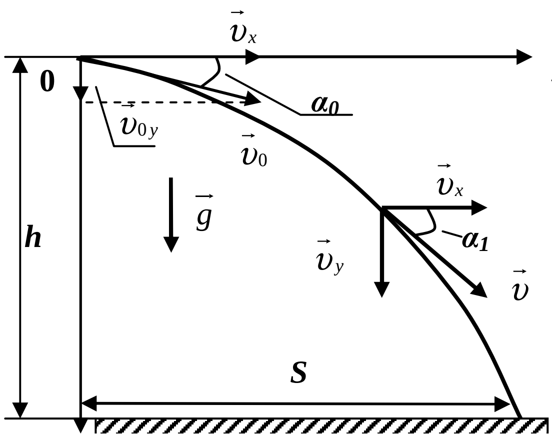
Движение тела будет представлять собой суперпозицию двух движений, происходящих одновременно: равномерного и прямолинейного в горизонтальном направлении со скоростью $\vec{\upsilon}_x$ и свободного падения, то есть равноускоренного движения вниз без начальной скорости с высоты h с ускорением свободного падения $\vec{g}$.



$$x = S = \upsilon_x \cdot t$$
$$y = h = \frac{g \cdot t^2}{2}$$
$$tg\alpha = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}$$
$$\upsilon^2 = \upsilon_y^2 + \upsilon_x^2$$
$$\upsilon_y = g \cdot t$$

Рис.16. Траектория движения тела брошенного горизонтально

Движение пикирующего тела (рис.17)



$$\upsilon_{oy} = \upsilon_0 \sin\alpha_0$$
$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha_0$$
$$tg\alpha = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}$$
$$\upsilon^2 = \upsilon_y^2 + \upsilon_x^2$$
$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + g \cdot t$$
$$y = h = \upsilon_0 \cdot t \sin\alpha_0 + g \cdot t^2$$
$$x = S = \upsilon_0 \cdot t \cos\alpha_0$$

Рис. 17. Траектория пикирующего тела

Кроме того, могут пригодиться и другие уравнения, например $h = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2 \cdot g}$.

Движение тела, брошенного под углом α к горизонту (рис.18)

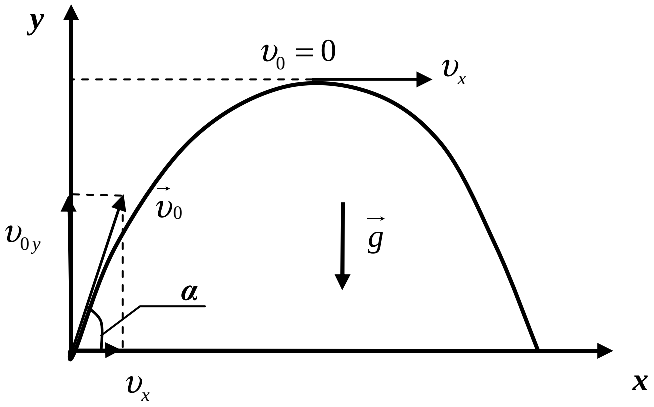


Рис.18. Траектория движения тела брошенного под углом α к горизонту

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha$$

$$x = \upsilon_x \cdot t = \upsilon_0 \cdot t \cos\alpha$$

$$S_{max} = \upsilon_x \cdot t_{общ} = \upsilon_0 \cdot t_{общ} \cos\alpha$$

Здесь $t_{общ}$ – всё время полёта.

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} - g \cdot t,$$

где $\upsilon_{oy} = \upsilon_0 \sin\alpha$.

$$y = y_0 + \upsilon_{0y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} =$$

$$= y_0 + \upsilon_0 \cdot t \sin\alpha - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

В высшей точке подъёма $\upsilon_y = 0$, поэтому

$$t_{взлёта} = t_{падения} = \frac{\upsilon_{0y}}{g} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g},$$

а максимальная высота взлёта

$$h_{\max} = \frac{g}{2} \cdot t_{\text{ взлёта}} = \frac{\upsilon_0^2}{2 \cdot g} \sin^2\alpha.$$

Кроме того,

$$S_{max} = \upsilon_0 \cdot 2 \cdot t_{взлёта} \cos\alpha = 2 \cdot \upsilon_0 \cdot \frac{\upsilon_0}{g} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{\upsilon_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad (*).$$

Из (*) $\Rightarrow$, так как $\sin 2\alpha = 1$ (максимальное значение), $2 \cdot \alpha = 90^\circ$, то при угле $\alpha = 45^\circ$ дальность полёта тела будет наибольшей.

Следует отметить, что если тело, брошенное под углом к горизонту, испытывает сопротивление внешней среды (воздуха), то его движение вдоль оси x уже не будет равномерным, а будет происходить с замедлением (уравнения равномерного движения применять нельзя. Траектория движения тела в данном случае уже не парабола (рис. 19)).

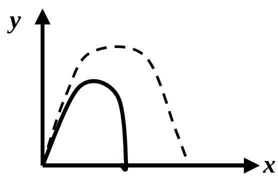


Рис. 19. Траектория движения

Движение по окружности

Простейший случай – равномерное движение. **Равномерное движение материальной точки по окружности** – движение, при котором материальная точка (тело) за равные промежутки времени проходит равные по длине дуги окружности.

Такое движение можно характеризовать следующими параметрами: линейная и угловая скорость, период, частота, нормальное (центростремительное) ускорение.

Линейная скорость (физическая величина равная отношению длины дуги S ко времени t, за которое пройдена эта дуга)

$$\upsilon = \frac{S}{t} \qquad (23).$$

Вращаясь по окружности, точка может поворачивать на разные углы в единицу времени, отсюда возникает необходимость во введении физической величины, которая бы показывала, на какой угол поворачивается точка в единицу времени. Это – угловая скорость

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \qquad (24),$$

$[\omega]$ 1 рад/с.

Период T – физическая величина равная времени одного полного оборота по окружности (отношение всего времени вращения t к числу полных оборотов N)

$$T = \frac{t}{N} \qquad (25).$$

Частота ν – физическая величина, показывающая какое количество оборотов, совершает материальная точка при её равномерном вращении по окружности в единицу времени

$$\nu = \frac{N}{t} \qquad (26).$$

Из (25) и (26) $\Rightarrow$, что:

$$T = \frac{1}{\nu} \qquad (27).$$

Скорость в каждой точки траектории направлена по касательной. Так как, несмотря на то, что по модулю скорость точки остаётся постоянной, движение по окружности – это всегда движение с нормальным (центростремительным ускорением) (рис. 20).

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} \qquad (28).$$

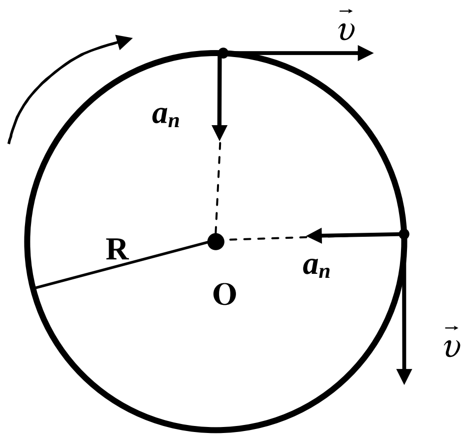


Рис.20. Точка, движущаяся по окружности радиусом R с постоянной по модулю скоростью υ

Используя аналогичные рассуждения для (24), получаем:

$$\omega = \frac{2\cdot\pi}{T} = 2\cdot\pi\cdot\nu \qquad (30).$$

Из сравнения (29) и (30)

$$\upsilon = \omega\cdot R \qquad (31).$$

Подставив (31) в (28) получаем:

$$a_n = \omega^2\cdot R \qquad (32).$$

$$a_n = \frac{\upsilon\cdot\upsilon}{R} = \frac{\upsilon}{R}\cdot\omega\cdot R = \upsilon\cdot\omega \qquad (33).$$

Отметим, что две точки лежащие на спице будут вращаться с одинаковой угловой скоростью и разными линейными скоростями (точка лежащая дальше от центра окружности будет иметь большую линейную скорость, то есть $\upsilon_2 > \upsilon_1$; $\omega_1 = \omega_2 = \omega$; смотрите (31)) (рис. 21).

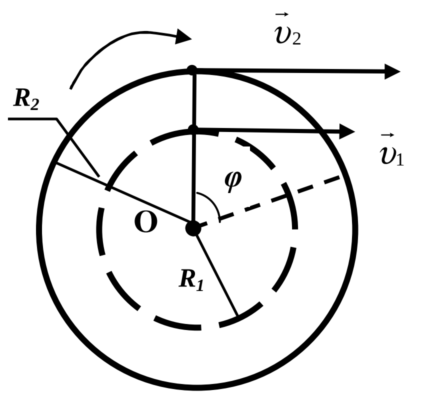


Рис. 21. Колесо радиусом R_2

Равнопеременное и переменное движение по окружности

Между параметрами и уравнениями кинематики прямолинейного движения и движения по окружности вокруг оси или центра вращения существует аналогия.

Таблица 3

Аналогия между параметрами

Путь S (м)	Угол φ (рад)
Скорость υ (м/с)	Угловая скорость ω (рад/с)
Ускорение a (м/с^2)	Угловое ускорение ε (рад/с^2)
Время t (с)	Время t (с)

Таблица 4

Аналогия между уравнениями

Равномерное движение	
Прямолинейное	По окружности
$\upsilon = \frac{S}{t}$	$\omega = \frac{\varphi}{t}$
Равнопеременное движение	
Прямолинейное	По окружности
$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{S}{t}$	$\omega_{\text{ср}} = \frac{\varphi}{t}$
$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2}$	$\omega_{\text{ср}} = \frac{\omega_0 + \omega}{2}$
$\upsilon = \upsilon_0 + a \cdot t$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$
$S = \upsilon_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$
$S = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2 \cdot a}$	$\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2 \cdot \varepsilon}$

Быстроту изменения скорости при криволинейном движении характеризуют тангенциальным a_τ, нормальным a_n и полным a ускорениями.

$\vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n$ всегда (рис. 22).

Полное ускорение равно векторной сумме тангенциального и нормального ускорений

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \qquad (34).$$

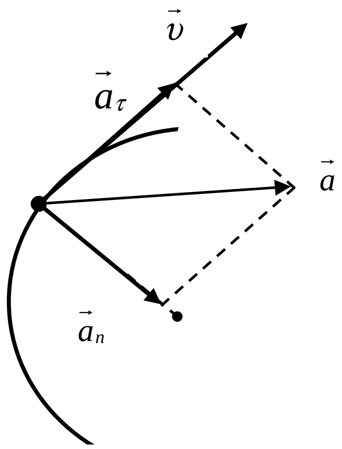


Рис. 22. Векторы тангенциального, нормального и полного ускорения точки

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \qquad (35).$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R \qquad (36).$$

Полезно знать, что
1 рад = 57,3° $\Rightarrow$
$1^{\circ} = \frac{1}{57,3}$ рад.

Ниже в таблице (таблица 5) приведена классификация движения в зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения.

Таблица 5

Классификация движения

a_τ	a_n	Движение
0	0	Прямолинейное равномерное
$a_\tau = a = const$	0	Прямолинейное равнопеременное
$a_\tau = f(t)$	0	Прямолинейное с переменным ускорением
0	*const*	Равномерное по окружности
0	$\neq 0$	Равномерное криволинейное
const	$\neq 0$	Криволинейное равнопеременное
$a_\tau = f(t)$	$\neq 0$	Криволинейное с переменным ускорением

В общем случае, рассматривают бесконечно малые углы поворота.

Элементарные (бесконечно малые) повороты рассматривают как векторы. Модуль вектора $d\vec{\varphi}$ равен углу поворота, а его направление совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т.е. подчиняется правилу правого винта (буравчика) (рис. 23).

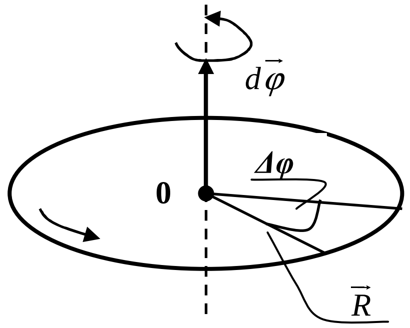


Рис. 23. Элементарный угол поворота $d\vec{\varphi}$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$$

Угловая скорость – векторная величина, определяемая первой производной угла поворота тела по времени

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad (37).$$

Вектор $\vec{\omega}$ (угловая скорость) направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта, так же как и вектор $d\vec{\varphi}$ (рис. 24).

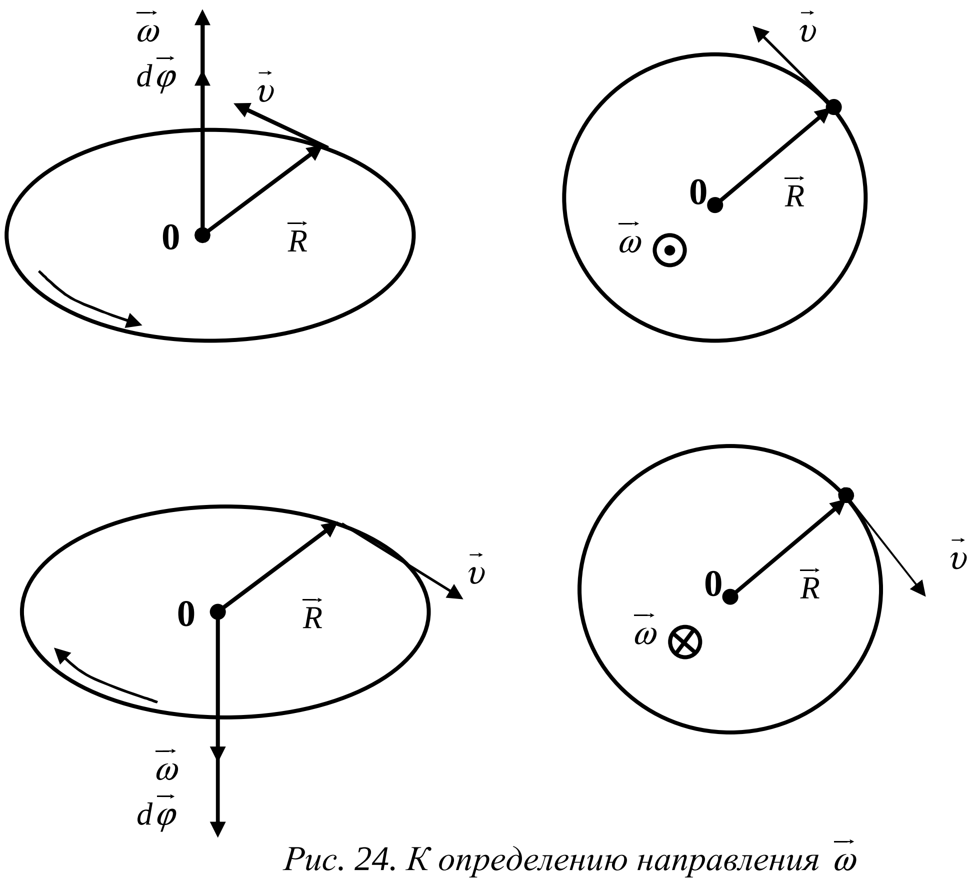


Рис. 24. К определению направления $\vec{\omega}$

Угловое ускорение – векторная физическая величина, определяемая первой производной угловой скорости по времени

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (38).$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости.

При ускоренном движении вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен вектору $\vec{\omega}$, при замедленном – направлен противоположно ему (рис.25). Также как и $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ – псевдовектор. Псевдовекторы – векторы, не имеющие определённых точек приложения: они могут откладываться из любой точки оси вращения.

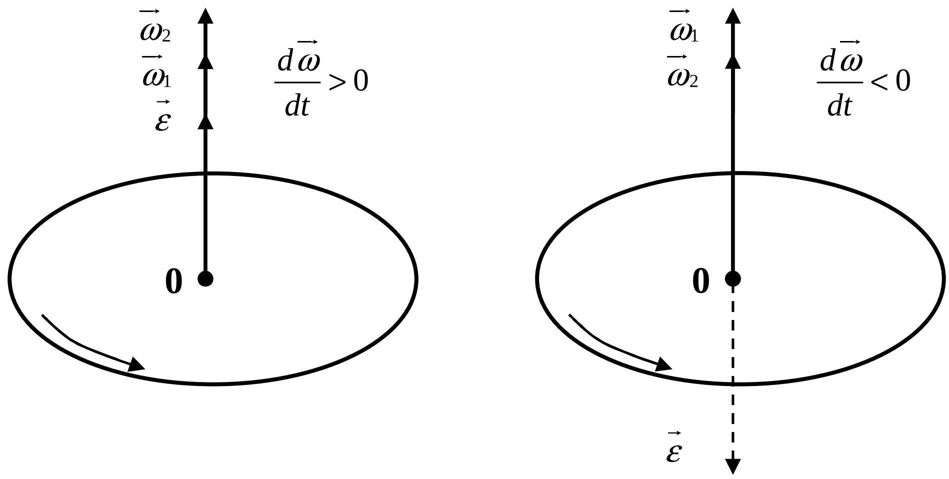


Рис. 25. К определению направления $\vec{\varepsilon}$

Если известна зависимость $\omega = \omega(t)$, то

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^t \omega dt \qquad (39).$$

Если известна зависимость $\varepsilon = \varepsilon(t)$, то

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon dt \qquad (40).$$

Законы Ньютона

При рассмотрении кинематики использовалась неподвижная система отсчета. Однако в природе не существует абсолютного движения, **всякое движение имеет относительный характер: либо одного тела относительно другого, либо относительно выбранной системы отсчета.** Возникает вопрос, все ли системы отсчета являются равноправными, а если нет, то какие являются предпочтительными. Единственное требование к системе отсчета состоит в том, что её выбор не должен вносить усложнения в описание движения тел, то есть **законы движения в выбранной системе отсчета должны иметь наиболее простой вид.** В частности, **в такой системе должны оставаться неизменными**

свойства пространства и времени: пространство должно быть однородным и изотропным, а время однородным.

Однородность пространства и времени означает, что наблюдаемые физические свойства и явления должны быть одинаковы в любой точке пространства и в любой момент времени. Не существует выделенных в каком-либо отношении точек пространства и моментов времени.

Изотропность пространства означает, что все направления в пространстве равнозначны. Физические явления в замкнутой системе не должны изменяться при её повороте в пространстве.

Система отсчета, которая использовалась до сих пор, отвечала этим требованиям, но возникает вопрос, как её реализовать, то есть с какими объектами, реально существующими в природе, можно её связать. Оказывается, что выбор подобной системы отсчета является непростым делом. Если «привязать» неподвижную систему координат к какому-либо произвольно движущемуся объекту, например к вагону поезда, можно заметить, что в данной системе отсчета сразу произойдут странные явления, например груз, подвешенный на нити, будет время от времени отклоняться от вертикали (что связано с действием различных ускорений вагона: при торможении или ускорении и при поворотах). В результате для описания этих явлений в данной системе координат придётся прибегнуть к представлениям о взаимодействиях, внешних по отношению к системе, и включить их в рассмотрение. В то же время ясно, что в другой системе координат, не испытывающей указанных ускорений, описание механических явлений будет гораздо проще.

Другой пример не очень подходящей системы отсчета – неподвижная система, связанная с Землей. В этой системе можно, например, обнаружить вращение плоскости колебаний физического маятника (на самом деле связанное с вращением Земли вокруг своей оси), для объяснения которого также придется привлекать физические причины, являющиеся посторонними по отношению к данной системе отсчета. Вместе с тем, по отношению к Солнцу и звёздам маятник будет вести себя стабильно, то есть **Солнце и звезды являются подходящими физическими объектами для выбора указанной системы отсчета**.

Система отсчёта, относительно которой материальная точка, свободная от внешних воздействий, либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно называется инерциальной системой отчёта.

Неинерциальная система отчёта – система, движущаяся относительно инерциальной с ускорением.

Существует бесконечное множество инерциальных систем отсчета. Во всех этих системах свойства пространства и времени одинаковы и одинаковы законы механики. Не существует никакой абсолютной системы отсчета, которую можно было бы предпочесть другим системам. В этом состоит **принцип относительности Галилея.** Его можно сформулировать и так:

- **Законы динамики одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта.**
- **Никакими механическими опытами невозможно установить, движется ли данная инерциальная система или покоится: оба эти состояния эквивалентны.**

Координаты точки в двух системах отсчета, одна из которых *K'* движется равномерно и прямолинейно относительно другой (*K*) со скоростью u, связаны соотношением (рис. 26)

$$\vec{r} = \vec{r}^{\,/} + \vec{u} \cdot t \qquad (41).$$

При этом считается, что время абсолютно, то есть течёт одинаково в обеих системах: $t' = t$. Скорость точки в системе *K* связана со скоростью в системе *K'* формулой:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}^{\,/} + \vec{u} \qquad (42).$$

Математически принцип относительности Галилея можно сформулировать как требование инвариантности (неизменности) уравнений механики по отношению к преобразованию (42).

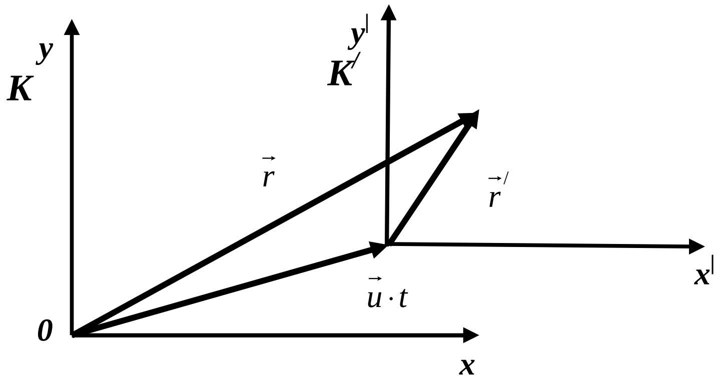


Рис.26. Неподвижная (К) и подвижная (К/) системы отсчёта

Первый закон Ньютона.

Существуют системы отсчёта, относительно которых поступательно движущиеся тело сохраняет свою скорость постоянной, то есть движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела или их действие скомпенсировано (результирующая сила равна нулю).

Свойство тел сохранять свою скорость при отсутствии действия на него других тел называется **инерцией**. Поэтому первый закон Ньютона называют **законом инерции**. Впервые закон инерции был сформулирован Г. Галилеем (1632 г.). Ньютон обобщил выводы Галилея и включил их в число основных законов движения.

Итак, причиной изменения скорости движения тела в инерциальной системе отсчета всегда является его взаимодействие с другими телами. Для количественного описания движения тела под воздействием других тел необходимо ввести две новые физические величины – инертную **массу тела и силу**.

Масса – это свойство тела, характеризующее его инертность. При одинаковом воздействии со стороны окружающих тел одно тело может быстро изменять свою скорость, а другое в тех же условиях – значительно медленнее. Принято говорить, что второе из этих двух тел обладает большей инертностью, или, другими словами, второе тело обладает большей массой.

Если два тела взаимодействуют друг с другом, то в результате изменяется скорость обоих тел, то есть в процессе взаимодействия оба тела приобретают ускорения. Отношение ускорений двух данных тел оказывается постоянным при любых воздействиях. В физике принято, что массы взаимодействующих тел обратно пропорциональны ускорениям:

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{a_2}{a_1} \qquad (43).$$

В этом соотношении величины a_1 и a_2 следует рассматривать как проекции векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ на ось OX (рис. 27). Знак «минус» в правой части формулы означает, что ускорения взаимодействующих тел направлены в противоположные стороны.

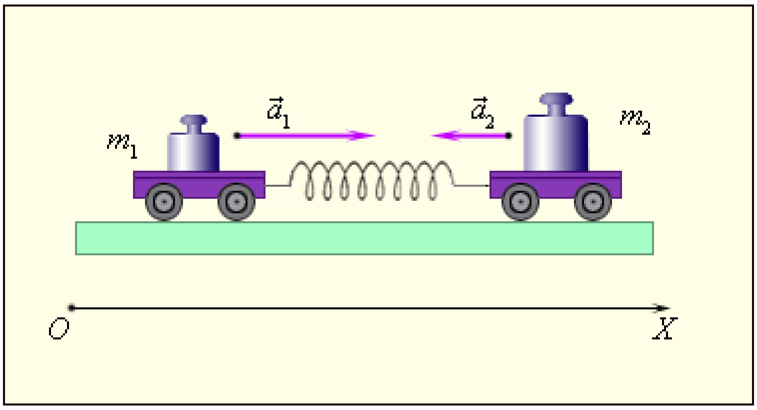


Рис. 27. Сравнение масс двух тел

В Международной системе единиц (СИ) масса тела измеряется в **килограммах (кг)**.

Масса любого тела может быть определена на опыте путем сравнения с **массой эталона** ($m_{эт}$ = 1 кг). Пусть $m_1 = m_{эт}$ = 1 кг. Тогда

$$m_2 = -\frac{a_1}{a_2} m_{\text{эт}} \qquad (44).$$

Масса тела – **скалярная величина**. Опыт показывает, что если два тела с массами m_1 и m_2 соединить в одно, то масса m составного тела оказывается равной сумме масс m_1 и m_2 этих тел:

$$m = m_1 + m_2 \qquad (45).$$

Это свойство масс называют **аддитивностью**.

Масса тела это физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая не только инерционные (инертная масса), но и гравитационные (гравитационная масса) свойства. В настоящее время можно считать доказанным, что инертная и гравитационная массы равны друг другу (с точностью, не меньшей10^{-12}).

Чтобы описывать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, вводится понятие силы.

Сила – векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры. Сила это не причина движения, а причина изменения движения (то есть изменения скорости движения).

В каждый момент времени сила характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения.

Векторная сумма всех сил, действующих на тело, называется **равнодействующей (результирующей) силой**.

Для измерения сил используют откалиброванные пружины, которые называются динамометрами. Такие откалиброванные пружины называются **динамометрами**. Сила измеряется по растяжению динамометра (рис. 28).

Импульсом материальной точки (тела) называется векторная, физическая величина, численно равная произведению массы материальной точки (тела) на её скорость и имеющая направление скорости

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon} \qquad (46).$$

Единица импульса 1 кг·м/с. 1 килограмм-метр в секунду равен импульсу материальной точки (тела) массой 1 кг, движущейся со скоростью 1 м/с.

Общая формулировка второго закона Ньютона: скорость изменения импульса материальной точки (тела) равна действующей на неё (него) силе

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (47).$$

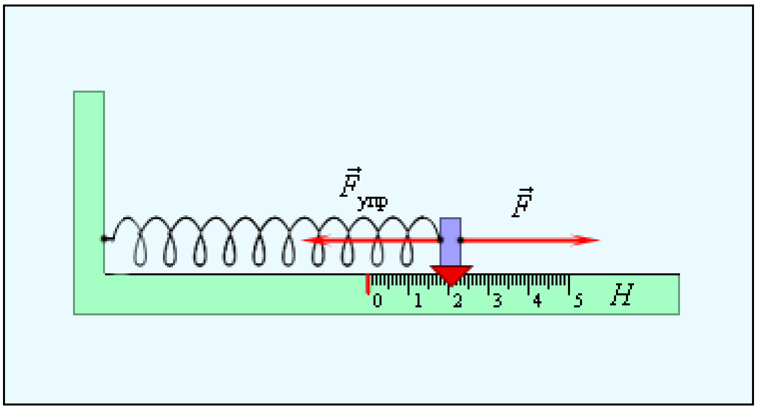


Рис. 28. Измерение силы по растяжению пружины

(47) – уравнение движения материальной точки.

Ещё одна формулировка второго закона Ньютона

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \qquad (48).$$

Действительно: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(m \cdot \vec{\upsilon}) = m \cdot \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m \cdot \vec{a}$.

Из (48) $\Rightarrow$ $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$ (48*).

Ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).

Единица силы 1 Н = 1 кг·м/с^2. 1 ньютон – сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы.

Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из них сообщает материальной точке ускорение, согласно второму закону Ньютона, как будто других сил нет.

Ускорение, приобретаемое точкой под действием нескольких сил

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (49).$$

$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – результирующая сила (векторная сумма всех сил приложенных к телу (рис.29)).

Иногда, целесообразно разложить силу на составляющие. Это позволяет существенно упростить решение многих задач. Например (рис. 30) на тангенциальную силу $\vec{F}_\tau$ (направлена по касательной к траектории) и нормальную силу $\vec{F}_n$ (направлена по нормали к центру кривизны).

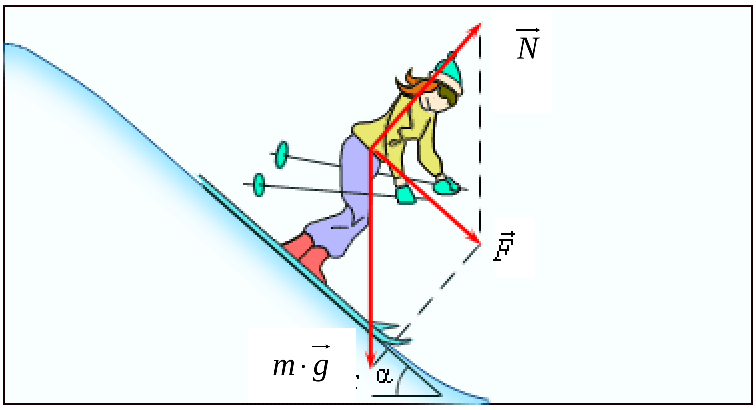


Рис.29. Результирующая сила $\vec{F}$

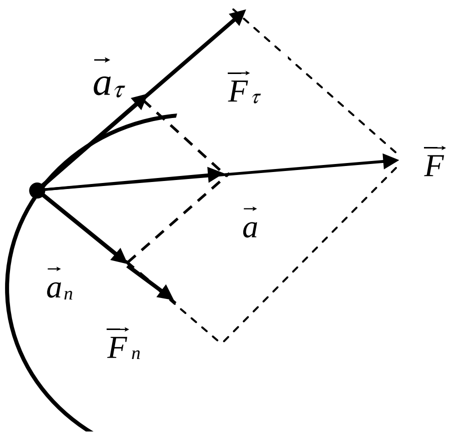


Рис. 30. Сила $\vec{F}$

$$F_\tau = m \cdot a_\tau = m \cdot \frac{d\upsilon}{dt} \quad (50).$$

$$F_n = m \cdot a_n = \frac{m \cdot \upsilon^2}{R} = m \cdot \omega^2 \cdot R \quad (51).$$

Ускорение, с которым движется тело, всегда совпадает по направлению с результирующей силой, а скорость может и не совпадать с её направлением, например – при движении по окружности.

Понятие **массы** тела было введено на основе опытов по измерению ускорений двух взаимодействующих тел: массы взаимодействующих тел обратно пропорциональны численным значениям ускорений (смотрите (43)), то есть

$$m_1 \cdot a_1 = -m_2 \cdot a_2 \quad (52).$$

В векторной форме это соотношение принимает вид

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = -m_2 \cdot \vec{a}_2 \quad (53).$$

Знак «минус» выражает здесь тот опытный факт, что ускорения взаимодействующих тел всегда направлены в противоположные стороны. Согласно второму закону Ньютона, ускорения тел вызваны силами

$\vec{F}_1 = m_1 \cdot \vec{a}_1$ и $\vec{F}_2 = m_2 \cdot \vec{a}_2$ возникающими при взаимодействии тел. Отсюда следует:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (54).$$

Силы, возникающие при взаимодействии тел, всегда имеют одинаковую природу. Они приложены к разным телам и поэтому не могут уравновешивать друг друга. Складывать по правилам векторного сложения можно только силы, приложенные к одному телу.

Проиллюстрируем третий закон Ньютона (рис.31). Человек действует на груз с такой же по модулю силой, с какой груз действует на человека. Эти силы направлены в противоположные стороны. Они имеют одну и ту же физическую природу – это упругие силы каната. Сообщаемые обоим телам ускорения обратно пропорциональны массам тел.

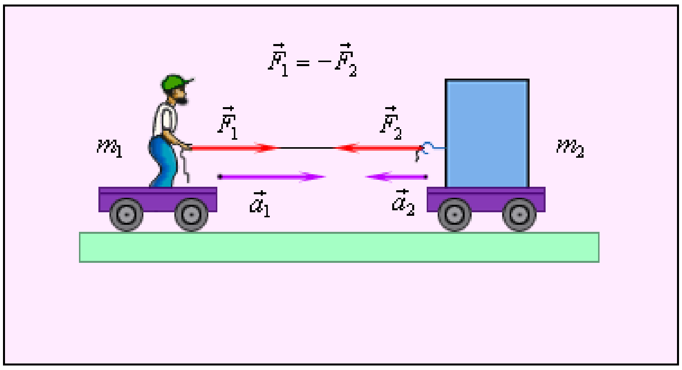


Рис.31. К третьему закону Ньютона

Силы, действующие между частями одного и того же тела, называются **внутренними**. Если тело движется как целое, то его ускорение определяется только внешней силой. Внутренние силы исключаются из второго закона Ньютона, так как их векторная сумма равна нулю. В качестве примера рассмотрим два тела с массами m_1 и m_2, жестко связанные между собой невесомой нерастяжимой нитью и двигающиеся с одинаковым ускорением $\vec{a}$ как единое целое под действием внешней силы $\vec{F}$ (рис.32).

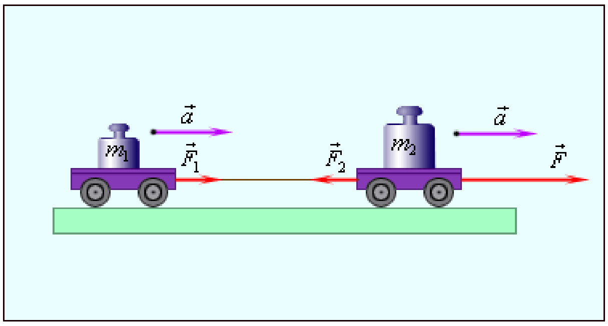


Рис. 32. Исключение внутренних сил.

Между телами действуют внутренние силы, подчиняющиеся третьему закону Ньютона: $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. Движение каждого тела зависит от сил взаимодействия между ними. Второй закон Ньютона, примененный к каждому телу в отдельности, дает:

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_1, \; m_2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F} \qquad (55).$$

Складывая левые и правые части этих уравнений и принимая во внимание, что $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$ и $F_2 = -F_1$ получим:

$$(m_1 + m_2) \cdot \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F} = \vec{F} \qquad (56).$$

Внутренние силы исключились из уравнения движения системы двух связанных тел.

Законы Ньютона справедливы для макротел при $\upsilon \ll c$, где c = $3 \cdot 10^8$ м/с (скорость тела в вакууме) и только для инерциальных систем отсчёта.

Неинерциальные системы отсчёта. Силы инерции

Силы инерции – силы, обусловленные ускоренным движением системы отсчёта относительно измеряемой системы отсчёта. Силы инерции вызываются не взаимодействием тел, а ускоренным движением системы отсчёта. Поэтому они не подчиняются третьему закону Ньютона, так как если на какое-либо тело действует сила инерции, то не существует противодействующей силы, приложенной к данному телу.

В неинерциальных системах отсчёта законы Ньютона, вообще говоря, не справедливы. Если же кроме сил, обусловленных взаимодействием тел друг на друга, рассмотреть и силы инерции, то второй закон Ньютона будет справедлив для любой системы отсчёта.

Второй закон Ньютона для неинерциальных систем отсчёта

$$m \cdot \vec{a}' = m \cdot \vec{a} + \vec{F}_{\text{ин}} \qquad (57).$$

Произведение массы тела на ускорение в рассматриваемой системе отсчёта равно векторной сумме всех сил (включая и силы инерции), действующих на данное тело. Силы инерции $\vec{F}_{\text{ин}}$ должны быть такими, чтобы вместе с силами $\vec{F}$, обусловленными воздействием тел друг на друга, они сообщали телу ускорение $\vec{a}'$, каким оно обладает в неинерциальных системах отсчёта ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, $\vec{a}$ – ускорение тела в инерциальной системе отсчёта).

Силы инерции обусловлены ускоренным движением системы отсчёта относительно измеряемой системы, поэтому в общем случае нужно учитывать следующие случаи проявления этих сил:

- Силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчёта;

- Силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающей системе отсчёта;
- Силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающей системе отсчёта.

Рассмотрим эти случаи.

Если тележку (рис. 33) привести в поступательное движение с ускорением $\vec{a}_0$, то нить начнёт отклоняться от вертикали назад до такого угла α, пока результирующая сила $\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$ не обеспечит ускорение шарика равное a_0. Таким образом, результирующая сила $\vec{F}$ направлена в сторону ускорения тележки $\vec{a}_0$ и для установившегося движения шарика (шарик теперь движется вместе с тележкой с ускорением a_0) равна

$$F = m \cdot g \cdot tg\alpha = m \cdot a_0, \text{ откуда } tg\alpha = \frac{a_0}{g},$$

то есть угол отклонения нити от вертикали тем больше, чем больше ускорение тележки.

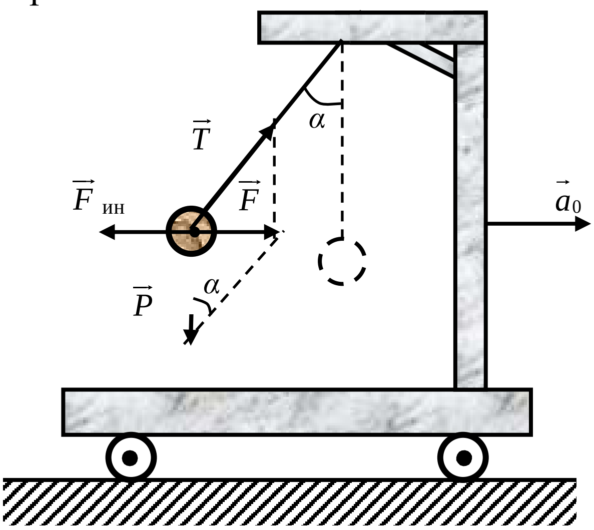


Рис.33. Шарик на нити подвешенный к штативу находящемуся на тележке

Относительно системы отсчёта, связанной с ускоренно движущейся тележкой, шарик покоится, что возможно, если сила $\vec{F}$ уравновешивается силой $\vec{F}_{ин}$, которая является силой инерции, так как на шарик никакие другие силы не действуют. Таким образом,

$$\vec{F}_{ин} = -m \cdot \vec{a}_0 \qquad (58).$$

Проявление сил инерции при поступательном движении наблюдается в повседневных явлениях. Например, когда поезд набирает скорость, то пассажир, сидящий по ходу поезда, под действием силы инерции прижимается к спинке сидения. Наоборот, при торможении поезда сила инерции направлена в противоположную сторону, и пассажир удаляется от спинки сидения. Особенно эти силы заметны при внезапном торможении поезда. Силы инерции проявляются в перегрузках, которые возникают при запуске и торможении космических кораблей.

Рассмотрим **силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчёта**.

На диске, на разных расстояниях от оси вращения установлены маятники (на нитях подвешены шарики массой m). При вращении диска маятники отклоняются от вертикали на некоторый угол α (рис. 34).

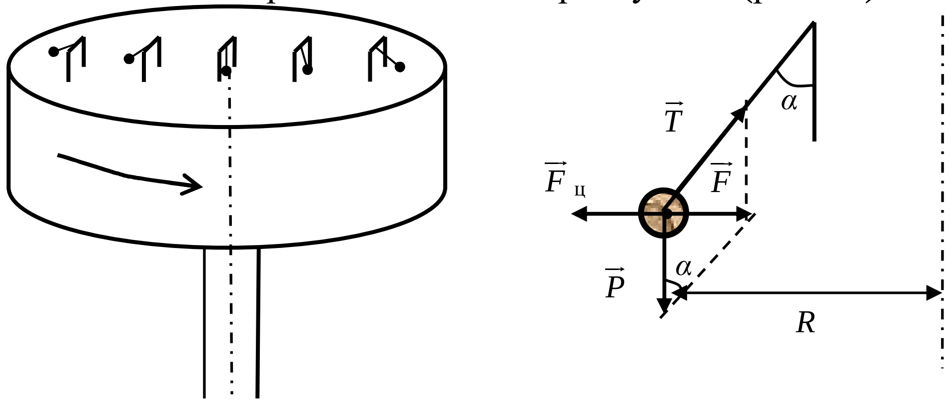


Рис. 34. Отклонение шариков при вращении маятников вместе с диском

В системе отсчёта, связанной, например, с помещением, шарик равномерно вращается по окружности радиусом R (расстояние от центра вращающегося шарика до оси вращения). Следовательно, на него действует сила, равная $F = m \cdot \omega^2 \cdot R$ и направленная перпендикулярно оси вращения диска. Она является равнодействующей силы тяжести и силы натяжения нити:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}\,.$$

Для установившегося движения шарика

$F = m \cdot g \cdot tg\alpha = m \cdot \omega^2 \cdot R \Rightarrow tg\alpha = \omega^2 \cdot R / g$ (α тем больше, чем больше R и ω).

В системе отсчёта связанной с вращающимся диском, шарик покоился, что возможно, если сила $\vec{F}$ уравновешивается равной и противоположно направленной ей силой $\vec{F}_ц$, которая является не чем иным, как силой инерции, так как на шарик никакие другие силы не действуют. Сила $\vec{F}_ц$, называется центробежной силой инерции, направлена по горизонтали от оси вращения диска,

$$\vec{F}_ц = -m \cdot \omega^2 \cdot R \qquad (59).$$

Действию центробежных сил подвергаются, например, пассажиры в движущемся транспортном средстве на поворотах, лётчики при выполнении фигур высшего пилотажа.

Центробежная сила инерции не зависит от скорости тел относительно вращающихся систем отсчёта, то есть действует на все тела, удалённые от оси вращения на конечное расстояние, независимо от того, покоится ли оно в этой системе или движется относительно неё с какой-то скоростью.

Рассмотрим **силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчёта.**

Пусть шарик массой m движется с постоянной скоростью $\upsilon^{/}$ вдоль радиуса равномерно вращающегося диска ($\upsilon^{/} = const, \omega = const, \upsilon^{/} \perp \omega$). Если диск не вращается, то шарик, направленный вдоль радиуса, движется вдоль радиуса по радиальной прямой и попадает в точку *A*, если же диск привести во вращение в направлении указанном стрелкой, то шарик катится по кривой *OB* (рис. 35, а), причём его скорость $\upsilon^{/}$ относительно диска изменяет своё направление. Это возможно лишь тогда, если на шарик действует сила перпендикулярная скорости $\upsilon^{/}$.

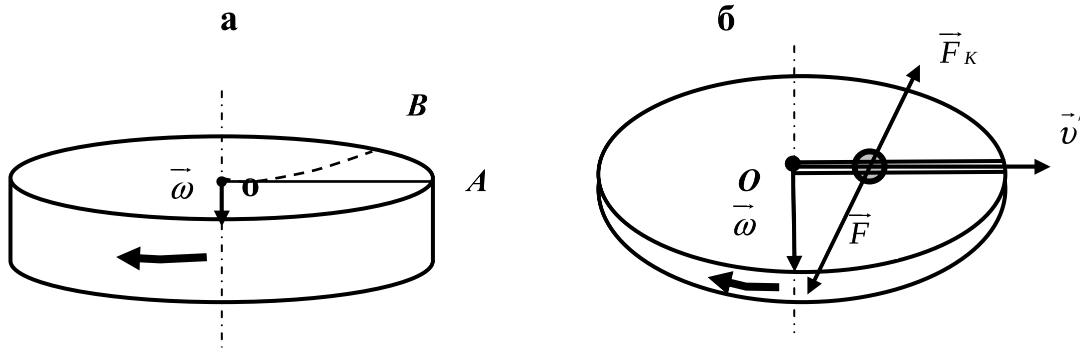


Рис.35. Вращающийся диск

Для того чтобы заставить шарик катиться по вращающемуся диску вдоль радиуса, используем жёстко укреплённый вдоль радиуса диска стержень, на котором шарик движется без трения равномерно и прямолинейно со скоростью $\upsilon^{/}$ (рис.35, б). При отклонении шарика стержень действует на него с силой $\vec{F}$. Относительно диска (вращающейся системы отсчёта) шарик движется равномерно и прямолинейно, что можно объяснить тем, что сила $\vec{F}$ уравновешивается приложенной к шарику силой инерции $\vec{F}_K$, перпендикулярной скорости $\upsilon^{/}$. Эта сила называется силой Кориолиса (в честь французского физика и инженера Г. Кориолиса (1792 - 1843)).

Можно показать, что сила Кориолиса

$$\vec{F}_K = 2 \cdot m \left[\vec{\upsilon}^{/}, \vec{\omega} \right] \qquad (60).$$

Если тело движется в Северном полушарии на север, то действующая на него сила Кориолиса (в следствие вращения Земли) направлена вправо по отношению к направлению движения, то есть несколько отклонится на восток. Поэтому в Северном полушарии наблюдаются более сильное подмывание правых берегов рек; правые рельсы железнодорожных путей по движению изнашиваются быстрее, чем левые, и так далее.

Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчёта

$$m\cdot\vec{a}^{/} = \vec{F} + \vec{F}_и + \vec{F}_ц + \vec{F}_K \qquad (61),$$

где $F = m\cdot a$ – сила, обусловленная воздействием тел друг на друга; $F_и = -m\cdot a_0$ (58) – сила инерции; $F_ц = -m\cdot\omega^2\cdot R$ (59) – центробежная сила инерции; $\vec{F}_K = 2\cdot m\left[\vec{\upsilon}^{/},\vec{\omega}\right]$(60) – сила Кориолиса.

Особенности сил инерции

- ❖ Силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а ускоренным движением системы отсчёта. Поэтому они не подчиняются третьему закону Ньютона.
- ❖ Силы инерции действуют только в неинерциальных системах отсчёта.

При некоторых условиях силы инерции и силы тяготения невозможно различить. Например, движение тел в равноускоренном лифте происходит точно так же, как и в неподвижном лифте, висящем в однородном поля тяжести. Ни какой эксперимент, выполненный внутри лифта, не может отделить однородное поле тяготения от однородного поля сил инерции.

Аналогия между силами тяготения и силами инерции лежит в основе принципа эквивалентности гравитационных сил и сил инерции (**принципа эквивалентности Эйнштейна**): все физические явления в поле тяготения происходят совершенно так же, как и в соответствующем поле сил инерции, если напряжённости обоих полей в соответствующих точках пространства совпадают, а прочие начальные условия для рассматриваемых тел одинаковы. Этот принцип является основой общей теории относительности.

Силы в механике

Вес тела

Силу тяжести $m\cdot\vec{g}$ с которой тела притягиваются к Земле, нужно отличать от веса тела. **Весом тела называют силу, с которой тело вследствие его притяжения к Земле действует на опору или подвес**. При этом предполагается, что тело **неподвижно относительно опоры или подвеса**.

Пусть тело лежит на неподвижном относительно Земли горизонтальном столе (рис. 36).

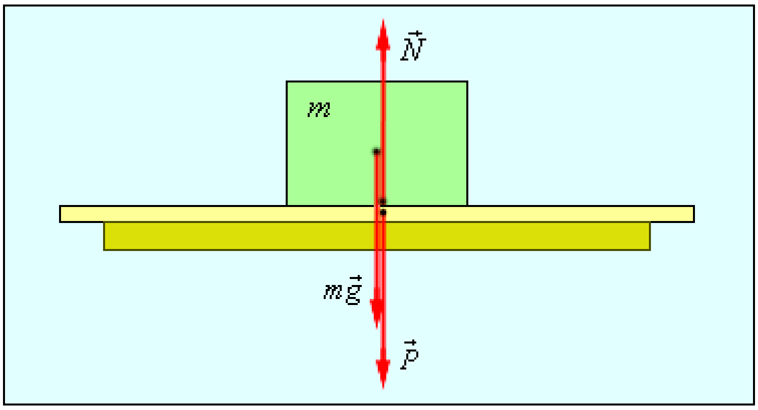


Рис.36. Тело лежащее на неподвижном относительно Земли горизонтальном столе

Систему отсчета, связанную с Землей, будем считать **инерциальной**. На тело действуют сила тяжести $\vec{F}_T = m \cdot \vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила упругости $\vec{N}$ с которой опора действует на тело. Силу $\vec{N}$ называют **силой нормального давления** или **силой реакции опоры**. Силы, действующие на тело, уравновешивают друг друга: $\vec{F}_T = -\vec{N}$. В соответствии с третьим законом Ньютона тело действует на опору с некоторой силой $\vec{P}$, равной по модулю силе реакции опоры и направленной в противоположную сторону: $\vec{P} = -\vec{N}$. По определению, сила $\vec{P}$ и называется весом тела. Из приведенных выше соотношений видно, что $\vec{P} = \vec{F}_T = m \cdot \vec{g}$, то есть вес тела $\vec{P}$ равен силе тяжести $m \cdot \vec{g}$. **Но эти силы приложены к разным телам** (рис. 36, рис. 37)**!** Кроме того сила тяжести – гравитационная сила (Она приблизительно равна силе гравитационного притяжения тела к Земле $F = G\frac{mM}{R^2}$, где m - масса тела, M – масса Земли, R – радиус Земли, G – гравитационная постоянная.), вес тела – сила упругости.

Если тело неподвижно висит на пружине, то роль силы реакции опоры (подвеса) играет упругая силы пружины.

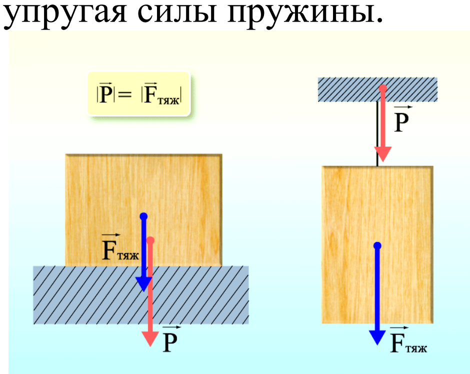


Рис. 37. Сила тяжести и вес тела

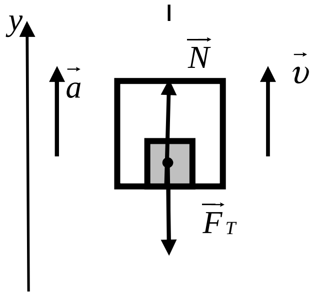
Решим задачу. *На дне шахтной клети лежит груз массой 100 кг. Каков будет вес груза если клеть: а) поднимается вверх с ускорением 0,3 м/с², б) опускается с ускорением 0,4 м/с², в) движется равномерно, г) свободно падает.*

Дано:
m = 100 кг
a_1 = 0,3 м/с^2
a_2 = 0,4 м/с^2
a_3 = 0
a_4 = g

P_1 – ?
P_2 – ?
P_3 – ?
P_4 – ?

Решение:

а)

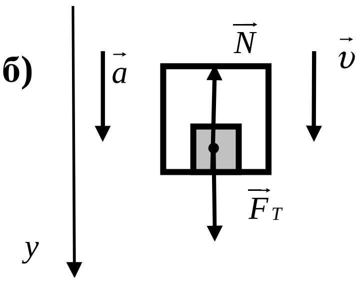


$$\vec{F} = m\cdot\vec{a}$$
$$\vec{N} + m\cdot\vec{g} = m\cdot\vec{a}_1$$
$$N = m\cdot a_1 + m\cdot g$$
$$N = m\cdot(g+a)$$

По 3-ему закону Ньютона $|P| = |N| \Rightarrow$

$P = m\cdot(g+a_1)$ = 1010 Н.

б)



$$\vec{F} = m\cdot\vec{a}$$
$$\vec{N} + m\cdot\vec{g} = m\cdot\vec{a}_2$$
$$-N + m\cdot g = m\cdot a_2$$
$$N = m\cdot(g-a)$$

Т.к. $|P| = |N| \Rightarrow$

$P = m\cdot(g-a_2)$ = 940 Н.

в) $P = m\cdot g$ = 980 Н

г) Тело находится в невесомости P = 0.

Таким образом, вес тела равен силе тяжести, когда тело покоится или движется равномерно и прямолинейно вверх или вниз

$$P = m\cdot g \qquad (62).$$

Вес тела, опускающегося с ускорением или поднимающегося с замедлением, уменьшается и становится меньше силы тяжести. В этом случае

$$P = m\cdot(g-a) \qquad (63).$$

Если тело свободно падает, $a = g$ и $P = 0$. Это явление называется невесомостью.

Вес тела, поднимающегося с ускорением или опускающегося с замедлением, увеличивается и становится больше силы тяжести и его веса в состоянии покоя. Такое состояние называется перегрузкой (рис. 38). В этом случае

$$P = m\cdot(g+a) \qquad (64).$$

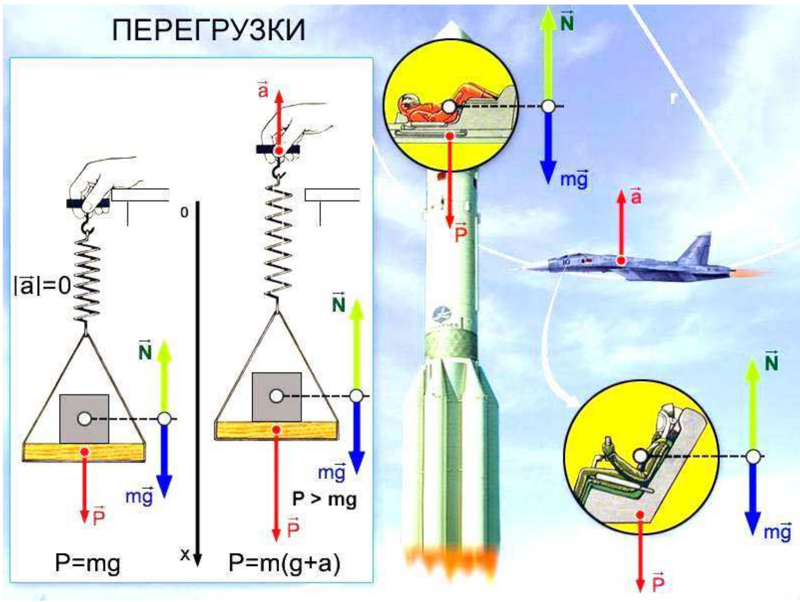


Рис. 38. Перегрузки

Перегрузкой n называют также величину, показывающую, во сколько раз вес тела P, поднимающегося с ускорением или опускающегося с замедлением, больше веса этого же тела в состоянии покоя P_0:

$$n = \frac{P}{P_0} \quad (65).$$

Сила упругости. Закон Гука

При деформации тела возникает сила, которая стремится восстановить прежние размеры и форму тела. Эта сила возникает вследствие электромагнитного взаимодействия между атомами и молекулами вещества. Ее называют силой упругости.

Простейшим видом деформации является деформация растяжения или сжатия (рис. 39).

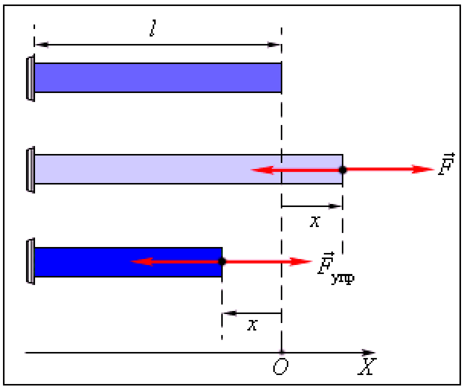


Рис. 39. Деформация растяжения (x > 0) и сжатия (x < 0)

При малых деформациях ($|x| << l$) сила упругости пропорциональна деформации тела и направлена в сторону, противоположную направлению перемещения частиц тела при деформации:

$$F_x = F_{упр} = - k \cdot x \quad (66).$$

Это соотношение выражает экспериментально установленный закон Гука. Коэффициент k называется жесткостью тела. В системе СИ жесткость измеряется в ньютонах на метр (Н/м). Коэффициент жесткости зависит от формы и размеров тела, а также от материала. В физике закон Гука для деформации растяжения или сжатия принято записывать в другой форме. Отношение $\varepsilon = x / l$ называется относительной деформацией, а отношение $\sigma = F / S = - F_{упр} / S$, где S – площадь поперечного сечения деформированного тела, называется напряжением. Тогда закон Гука можно сформулировать так: относительная деформация ε пропорциональна напряжению σ:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma \quad (67).$$

Коэффициент E в этой формуле называется модулем Юнга. Модуль Юнга зависит только от свойств материала и не зависит от размеров и формы тела. Для различных материалов модуль Юнга меняется в широких пределах. Для стали, например, $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, а для резины $E \approx 2 \cdot 10^6$ Н/м^2, то есть на пять порядков меньше.

Закон Гука может быть обобщен и на случай более сложных деформаций. Например, при деформации изгиба упругая сила пропорциональна прогибу стержня, концы которого лежат на двух опорах (рис. 40).

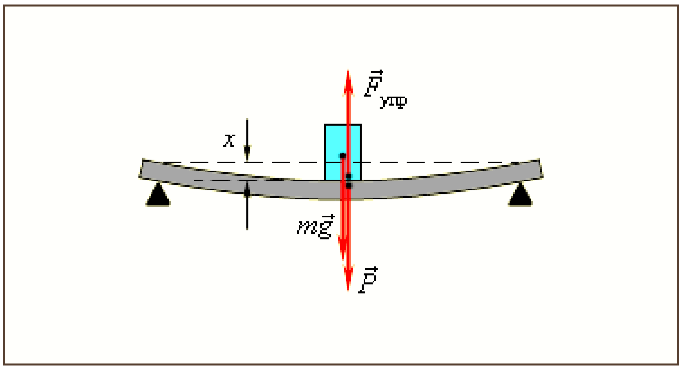


Рис.40. Деформация изгиба

Упругую силу $\vec{N}$, действующую на тело со стороны опоры (или подвеса), называют силой реакции опоры. При соприкосновении тел сила реакции опоры направлена перпендикулярно поверхности соприкосновения. Поэтому ее часто называют силой нормального давления. Если тело лежит на горизонтальном неподвижном столе, сила реакции опоры направлена вертикально вверх и уравновешивает силу тяжести: $\vec{N} = -m \cdot \vec{g}$. Сила $\vec{P}$, с которой тело действует на стол, называется весом тела.

В технике часто применяются спиралеобразные пружины (рис. 41). При растяжении или сжатии пружин возникают упругие силы, которые также подчиняются закону Гука. Коэффициент k называют жесткостью пружины. В пределах применимости закона Гука пружины способны сильно изменять свою длину. Поэтому их часто используют для измерения сил. Пружину, растяжение которой проградуировано в единицах силы, называют динамометром. Следует иметь в виду, что при растяжении или сжатии пружины в её витках возникают сложные деформации кручения и изгиба.

В отличие от пружин и некоторых эластичных материалов (например, резины) деформация растяжения или сжатия упругих стержней (или проволок) подчиняется линейному закону Гука в очень узких пределах. Для металлов относительная деформация $\varepsilon = x / l$ не должна превышать 1 %. При больших деформациях возникают необратимые явления (текучесть) и разрушение материала.

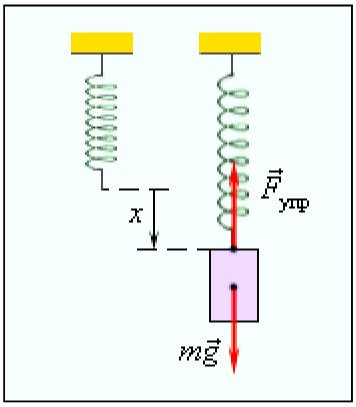


Рис.41. Деформация растяжения пружины

Рассмотрим прямоугольный брусок, закрепленный неподвижно нижней гранью (рис.42). Под действием силы F, приложенной к верхней грани, брусок получает деформацию, называемую сдвигом. Величина γ, равная тангенсу угла сдвига φ, называется относительным сдвигом.

При упругих деформациях угол φ бывает очень мал, поэтому $tg\varphi \approx \varphi$. Таким образом, относительный сдвиг определяется формулой

$$\gamma = tg\varphi \approx \varphi \qquad (68).$$

Деформация сдвига приводит к возникновению в каждой точке бруска тангенциального упругого напряжения τ, которое определяется как модуль силы, приходящейся на единицу площади

$$\tau = \frac{F_{упр,\parallel}}{S} \qquad (69).$$

Здесь S – площадь воображаемой поверхности, параллельной верхней грани бруска (например AB на рис.42). Предполагается, что действие внешней силы F распределено равномерно по верхней грани. Значок || указывает на то, что сила $F_{упр}$, параллельна к площадке, на которую она действует.

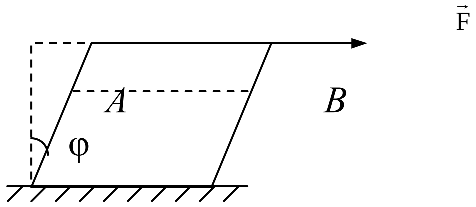


Рис.42. К деформации сдвига

Опыт дает, что относительный сдвиг пропорционален напряжению

$$\gamma = \frac{1}{G}\cdot\tau \qquad (70).$$

Величина G зависит только от свойств материала и называется модулем сдвига. Он равен такому тангенциальному напряжению, при котором $\gamma = tg\varphi$ был бы равен единице (при $\varphi=45^o$), если бы столь огромные упругие деформации были бы возможны. Измеряется G в паскалях.

Упругие свойства реальных тел

Реальные тела можно считать упругими лишь при очень малых деформациях. Если же деформации превышают некоторую предельную величину (она для разных тел разная), то свойства тел оказываются очень отличными от свойств упругих тел. Ниже (рис. 43) приведена диаграмма напряжений (график зависимости σ от относительной деформации ε).

Линейная зависимость $\sigma(\varepsilon)$, установленная Гуком, выполняется лишь в очень узких пределах до **предела пропорциональности** ($\sigma_п$). При дальнейшем увеличении напряжения деформация ещё упругая (хотя зависимость $\sigma(\varepsilon)$ а – уже нелинейная) и до **придела упругости** ($\sigma_у$) остаточные деформации не возникают.

За пределами упругости в теле возникают остаточные деформации и график, описывающий возвращение тела в первоначальное состояние после прекращения действия силы, изобразится не кривой BO, а параллельной ей – CF.

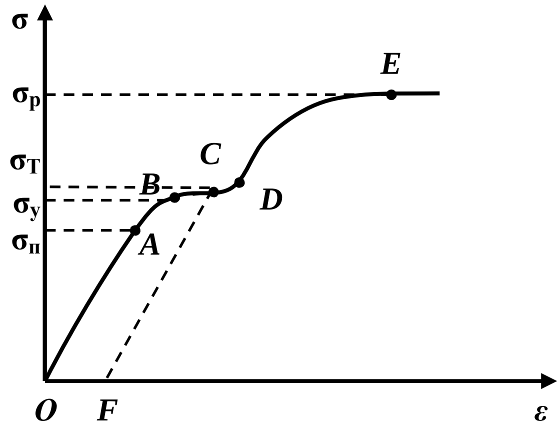


Рис.43. Диаграмма напряжений

Напряжение при котором проявляется заметная остаточная деформация ($\approx$0,2 %), называется **пределом текучести** ($\sigma_Т$) - точка *C* на кривой. В области *CD* деформация возрастает без увеличения напряжения, то есть тело как бы «течёт». Эта область называется **областью текучести** (или областью **пластических деформаций**).

Материалы, для которых область текучести значительна, называются вязкими; для которых же она практически отсутствует, – хрупкими. При дальнейшем растяжении (за точку *D*) происходит разрушение тела. Максимальное напряжение, возникающее в теле до разрушения, называется **пределом прочности** ($\sigma_р$).

Диаграмма напряжений для реальных твёрдых тел зависит от различных факторов. Одно и то же твёрдое тело может при кратковременном действии сил проявлять себя как хрупкое, а при длительных, но слабых – как текучее.

Сила трения

Трение – один из видов взаимодействия тел. Оно возникает при соприкосновении двух тел. Трение, как другие виды взаимодействия, подчиняется третьему закону Ньютона: если на одно из тел действует сила трения, то такая же по модулю, но направленная в противоположную сторону сила действует и на второе тело. Силы трения, как и упругие силы, имеют электромагнитную природу. Они возникают вследствие взаимодействия между атомами и молекулами соприкасающихся тел.

Силами сухого трения называют силы, возникающие при соприкосновении двух твердых тел при отсутствии между ними жидкой или газообразной прослойки. Они всегда направлены по касательной к соприкасающимся поверхностям.

Сухое трение, возникающее при относительном покое тел, называют трением покоя. Сила трения покоя всегда равна по величине внешней силе и направлена в противоположную сторону (рис. 44).

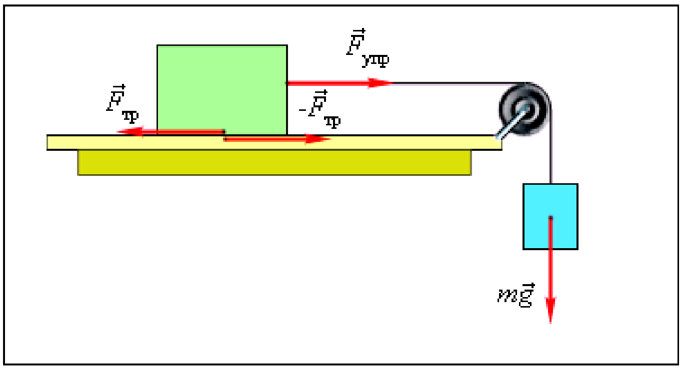


Рис. 44. Сила трения покоя ($\upsilon = 0$; $\vec{F}_{тр} = -\vec{F}_{упр}$).

Сила трения покоя не может превышать некоторого максимального значения $(F_{тр})_{max}$. Если внешняя сила больше $(F_{тр})_{max}$, возникает относительное проскальзывание. Силу трения в этом случае называют силой трения скольжения. Она всегда направлена в сторону, противоположную направлению движения и, вообще говоря, зависит от относительной скорости тел. Однако, во многих случаях приближенно силу трения скольжения можно считать независящей от величины относительной скорости тел и равной максимальной силе трения покоя. Эта модель силы сухого трения применяется при решении многих простых физических задач.

Опыт показывает, что сила трения скольжения пропорциональна силе нормального давления тела на опору, а, следовательно, и силе реакции опоры $\vec{N}$

$$F_{тр} = (F_{тр})_{max} = \mu \cdot N \qquad (71).$$

Коэффициент пропорциональности μ называют коэффициентом трения скольжения. Коэффициент трения μ – величина безразмерная. Обычно коэффициент трения меньше единицы. Он зависит от материалов соприкасающихся тел и от качества обработки поверхностей. При скольжении сила трения направлена по касательной к соприкасающимся поверхностям в сторону, противоположную относительной скорости (рис. 45).

При движении твердого тела в жидкости или газе возникает сила вязкого трения. Сила вязкого трения значительно меньше силы сухого трения. Она также направлена в сторону, противоположную относительной скорости тела. При вязком трении нет трения покоя.

Сила вязкого трения сильно зависит от скорости тела. При достаточно малых скоростях $F_{тр} \sim \upsilon$, при больших скоростях $F_{тр} \sim \upsilon^2$. При этом коэффициенты пропорциональности в этих соотношениях зависят от формы тела.

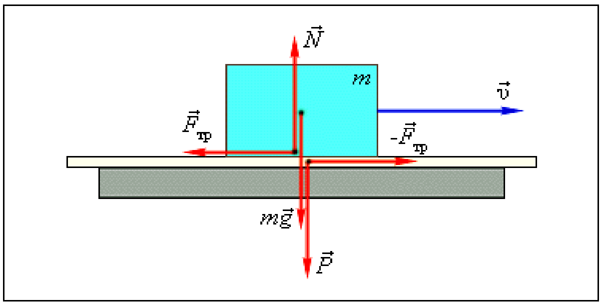


Рис. 45. Силы трения при скольжении ($\upsilon \neq 0$)

Силы трения возникают и при качении тела. Однако силы трения качения обычно достаточно малы. При решении простых задач этими силами пренебрегают.

Законы сохранения импульса и движения центра масс

Тела, входящие в систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими данной системе. В соответствии с этим силы, действующие на тела замкнутой системы можно разделить на внутренние и внешние. Силы, с которыми на данное тело воздействуют остальные тела замкнутой системы, называются внутренними ($\vec{F}_{ik}$). Внешние силы – это силы, обусловленные воздействием тел, не принадлежащих системе ($\vec{f}_i$).

Второй закон Ньютона для такой системы запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i\neq n}\vec{F}_{ik} + \sum_{i=1}^{n}\vec{f}_i, \qquad (72),$$

где $\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_i$ – суммарный импульс тел, входящих в замкнутую систему, $\sum_{i\neq k}\vec{F}_{ik}$ – сумма внутренних сил системы тел, $\sum_{i=1}^{n}\vec{f}_i$ – сумма внешних сил, действующих на тела системы.

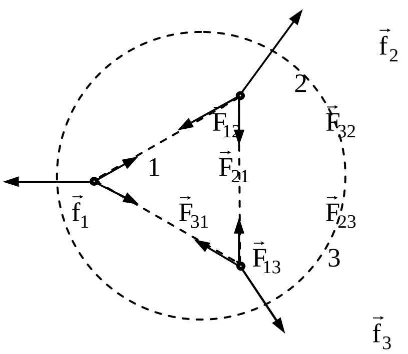


Рис.46. Система из трёх тел

Пусть мы имеем замкнутую систему, состоящую из трех тел (рис. 46). Внешние силы обозначим $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, внутренние $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}, \vec{F}_{13}, \vec{F}_{31}, \vec{F}_{23}, \vec{F}_{32}$.

По третьему закону Ньютона

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

$$\vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31},$$

$$\vec{F}_{32} = -\vec{F}_{23}.$$

Запишем для каждого из трех тел уравнение второго закона Ньютона в следующем виде:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{f}_1\,;$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{f}_2\,;$$

$$\frac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{f}_{31}\,.$$

Сложим все три уравнения вместе. Сумма всех внутренних сил будет равна нулю, согласно третьему закону Ньютона, вследствие чего

$$d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3$$

или

$$d\sum_{i=1}^{3}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{3}\vec{f}_i\,.$$

В случае если система замкнута, то внешние силы отсутствуют (**замкнутой** называется система тел на которую не действуют внешние силы)

$$\sum_{i=1}^{3}\vec{f}_i = 0\,,$$

тогда

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3}\vec{p}_i = 0\,,\ \text{т.е.}\ \ \sum_{i=1}^{3}\vec{p}_i = \text{const}\,.$$

Этот результат легко обобщить на систему, состоящую из произвольного числа тел. Уравнение второго закона Ньютона для *n* тел можно представить следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i\neq k}\vec{F}_{ik} + \sum_{i=1}^{n}\vec{f}_i\,.$$

Складывая эти уравнения с учетом того, что $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, получим

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{f}_i \qquad (73).$$

То есть **производная по времени от полного импульса системы равна векторной сумме всех внешних сил, приложенных к телам системы.** Для замкнутой системы правая часть уравнения равна нулю ($\sum_{i=1}^{n}\vec{f}_i = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = 0$), вследствие чего $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i$ не зависит от времени. В этом и состоит закон сохранения импульса, который формулируется следующим образом: **полный импульс замкнутой системы не изменяется.**

В основе сохранения импульса лежит однородность пространства, то есть одинаковость свойств пространства во всех точках. Одинаковость следует понимать в том смысле, что параллельный перенос замкнутой системы из одного места пространства в другое без изменения взаимного расположения и скоростей частиц не изменяет механические свойства системы (предполагается, что на новом месте замкнутость системы не нарушается).

Импульс – векторная величина, поэтому можно сформулировать закон сохранения импульса так: **в замкнутой системе векторная сумма импульсов всех тел, входящих в систему, остается постоянной при любых взаимодействиях тел этой системы между собой.**

Рассмотрим какие-либо два взаимодействующих тела, входящих в состав замкнутой системы. Силы взаимодействия между этими телами обозначим через $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. По третьему закону Ньютона $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. Если эти тела взаимодействуют в течение времени *t*, то импульсы сил взаимодействия одинаковы по модулю и направлены в противоположные стороны: $\vec{F}_2 \cdot t = -\vec{F}_1 \cdot t$.Применим к этим телам второй закон Ньютона:

$$\vec{F}_1 \cdot t = m_1 \cdot \vec{\upsilon}_1^{\,/} - m_1 \cdot \vec{\upsilon}_1; \quad \vec{F}_2 \cdot t = m_2 \cdot \vec{\upsilon}_2^{\,/} - m_2 \cdot \vec{\upsilon}_2,$$

где $m_1 \cdot \vec{\upsilon}_1$ и $m_2 \cdot \vec{\upsilon}_2$ – импульсы тел в начальный момент времени, $m_1 \cdot \vec{\upsilon}_1^{\,/}$ и $m_1 \cdot \vec{\upsilon}_2^{\,/}$ – импульсы тел в конце взаимодействия. Из этих соотношений следует

$$m_1 \cdot \vec{\upsilon}_1 + m_2 \cdot \vec{\upsilon}_2 = m_1 \cdot \vec{\upsilon}_1^{\,/} + m_2 \cdot \vec{\upsilon}_2^{\,/} \qquad (74).$$

Это равенство означает, что в результате взаимодействия двух тел их суммарный импульс не изменился.

Рис. 47 иллюстрирует закон сохранения импульса на примере нецентрального соударения двух шаров разных масс, один из которых до соударения находился в состоянии покоя.

Изображенные на рис. 47 вектора импульсов шаров до и после соударения можно спроектировать на координатные оси *OX* и *OY*. Закон сохранения импульса выполняется и для проекций векторов на каждую ось. В частности, из диаграммы импульсов (рис. 47) следует, что проекции векторов $\vec{p}_1^{\,/}$ и $\vec{p}_2^{\,/}$ импульсов обоих шаров после соударения на ось *OY* должны быть одинаковы по модулю и, иметь разные знаки, чтобы их сумма равнялась нулю.

Закон сохранения импульса во многих случаях позволяет находить скорости взаимодействующих тел даже тогда, когда значения действующих сил неизвестны. Примером может служить реактивное движение.

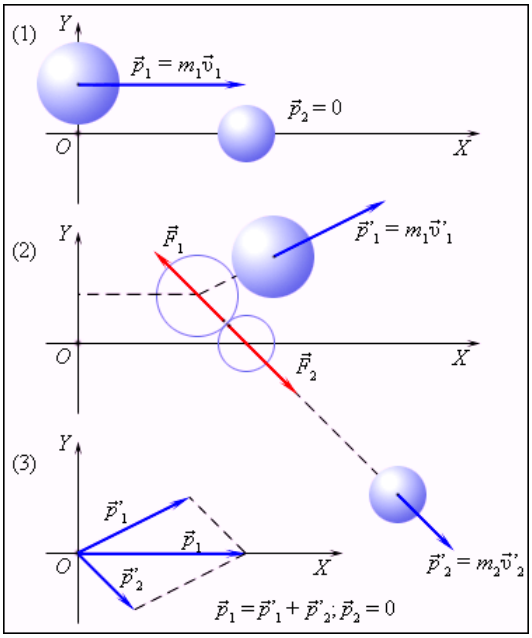


Рис. 47. Нецентральное соударение шаров разных масс: 1 – импульсы до соударения; 2 – импульсы после соударения; 3 – диаграмма импульсов

При стрельбе из орудия возникает отдача – снаряд движется вперед, а орудие – откатывается назад. Снаряд и орудие – два взаимодействующих тела. Скорость, которую приобретает орудие при отдаче, зависит только от скорости снаряда и отношения масс (рис. 48). Если скорости орудия и снаряда обозначить через $\vec{V}$ и $\vec{\upsilon}$, а их массы через M и m, то на основании закона сохранения импульса можно записать в проекциях на ось OX

$$M \cdot V + m \cdot \upsilon = 0; \; V = -\frac{m}{M} \cdot \upsilon \qquad (75).$$

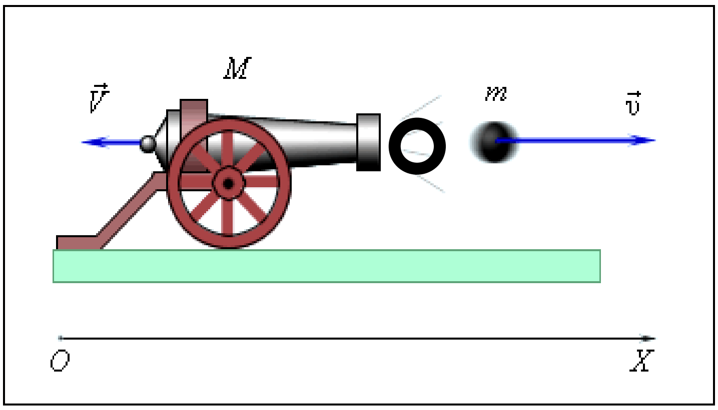


Рис 48. Отдача при выстреле из орудия

На принципе отдачи основано реактивное движение. В ракете при сгорании топлива газы, нагретые до высокой температуры, выбрасываются из сопла с большой скоростью $\vec{u}$ относительно ракеты. Обозначим массу выброшенных газов через m, а массу ракеты после истечения газов через M. Тогда для замкнутой системы «ракета + газы» можно записать на основании закона сохранения импульса (по аналогии с задачей о выстреле из орудия):

$$V = -\frac{m}{M} \cdot u \qquad (76),$$

где V – скорость ракеты после истечения газов.

Здесь предполагалось, что начальная скорость ракеты равнялась нулю.

Закон движения центра масс

Воображаемая точка C, положение которой характеризует распределение массы этой системы (тела) называется центром масс системы материальных точек (тела). Для определения положения центра масс достаточно поочерёдно подвесить тело за две различные точки на его поверхности и провести через точки подвеса вертикали, пересечение которых даст положение центра масс (центр масс может располагаться вне тела).

Радиус-вектор центра масс

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i}{m} \qquad (77),$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – соответственно масса и радиус-вектор i-ой материальной точки; n – число материальных точек в системе; $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – масса системы.

Скорость центра масс

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{\upsilon}_i}{m} \qquad (78).$$

Учли, что $\vec{\upsilon}_c = \dfrac{d\vec{r}_c}{dt} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dfrac{dr_i}{dt}}{m} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{\upsilon}_i}{m}$.

Импульс системы материальных точек равен произведению массы системы на скорость её центра масс

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}_c \qquad (79).$$

Закон движения центра масс: центр масс движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к системе

$$m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n \qquad (80).$$

Уравнение движения тела переменной массы

Полученная формула для скорости ракеты (76) справедлива лишь при условии, что вся масса сгоревшего топлива выбрасывается из ракеты одновременно. На самом деле истечение происходит постепенно в течение всего времени ускоренного движения ракеты. Каждая последующая порция газа выбрасывается из ракеты, которая уже приобрела некоторую скорость.

Для получения точной формулы процесс истечения газа из сопла ракеты нужно рассмотреть более детально. Пусть ракета в момент времени t имеет массу M и движется со скоростью $\vec{\upsilon}$ (рис. 49 (1)). В течение малого промежутка времени Δt из ракеты будет выброшена некоторая порция газа с относительной скоростью $\vec{u}$. Ракета в момент $t + \Delta t$ будет иметь скорость $\vec{\upsilon} + \Delta\vec{\upsilon}$, а её масса станет равной $M + \Delta M$, где $\Delta M < 0$ (рис. 49 (2)). Масса выброшенных газов будет, очевидно, равна $-\Delta M > 0$. Скорость газов в инерциальной системе OX будет равна $\vec{\upsilon} + \vec{u}$.

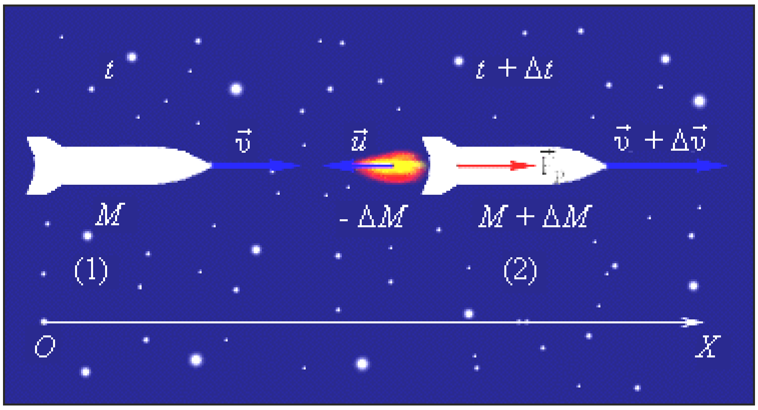


Рис. 49. Ракета, движущаяся в свободном пространстве (без гравитации)

Применим закон сохранения импульса. В момент времени $t + \Delta t$ импульс ракеты равен $(M + \Delta M)\cdot(\vec{\upsilon} + \Delta\vec{\upsilon})$, а импульс испущенных газов равен $(-\Delta M)\cdot(\vec{\upsilon} + \vec{u})$.В момент времени t импульс всей системы был равен $M \cdot \vec{\upsilon}$. Предполагая систему «ракета + газы» замкнутой, можно записать:

$$M\cdot\vec{\upsilon}=(M+\Delta M)\cdot(\vec{\upsilon}+\Delta\vec{\upsilon})-\Delta M\cdot(\vec{\upsilon}+\vec{u})\ \text{ или }\ M\cdot\Delta\vec{\upsilon}=\Delta M\cdot\vec{u}-\Delta M\cdot\Delta\vec{\upsilon} \quad (81).$$

Величиной $\Delta M\cdot\Delta\vec{\upsilon}$ можно пренебречь, так как $|\Delta M| << M$. Разделив обе части последнего соотношения на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим

$$M\cdot\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}=\frac{\Delta M}{\Delta t}\cdot\vec{u}\ \ (\Delta t\to 0)\ \text{ или }\ M\cdot\vec{a}=-\mu\cdot\vec{u} \quad (82).$$

Величина $\mu=-\dfrac{\Delta M}{\Delta t}$ $(\Delta t\to 0)$ есть расход топлива в единицу времени. Величина $-\mu\cdot\vec{u}$ называется реактивной силой тяги $\vec{F}_P$. **Реактивная сила тяги** действует на ракету со стороны истекающих газов, она направлена в сторону, противоположную относительной скорости. Соотношение

$$M\cdot\vec{a}=\vec{F}_P=-\mu\cdot\vec{u} \quad (83)$$

выражает второй закон Ньютона для тела переменной массы. Если газы выбрасываются из сопла ракеты строго назад (рис. 49), то в скалярной форме это соотношение принимает вид:

$$M\cdot a=\mu\cdot u \quad (84),$$

где u – модуль относительной скорости. С помощью математической операции интегрирования ($M\dfrac{d\upsilon}{dt}=-u\dfrac{dM}{dt}\ \Rightarrow\ \upsilon=-u\displaystyle\int\frac{dM}{M}=-u\ln M+C$; C определяется из начальных условий; если стартовая масса M_0, то $C=u\ln\dfrac{M_0}{M}$) из этого соотношения можно получить формулу для конечной скорости υ ракеты:

$$\upsilon=u\ln\left(\frac{M_0}{M}\right) \quad (85),$$

где M_0/M – отношение начальной и конечной масс ракеты. Эта формула называется **формулой Циолковского**. Из нее следует, что <u>конечная скорость ракеты может превышать относительную скорость истечения газов. Следовательно, ракета может быть разогнана до больших скоростей, необходимых для космических полетов.</u> Но это может быть достигнуто только путем расхода значительной массы топлива, составляющей большую долю первоначальной массы ракеты. Например, для достижения первой космической скорости $\upsilon=\upsilon_1=7{,}9\cdot10^3$ м/с при $u=3\cdot10^3$ м/с (скорости истечения газов при сгорании топлива бывают порядка 2 – 4 км/с) стартовая масса одноступенчатой ракеты должна примерно в 14 раз превышать конечную массу. Для достижения конечной скорости $\upsilon=4\cdot u$ отношение $\dfrac{M_0}{M}$ должно быть равно 50. Значительное снижение стартовой массы ракеты может быть достигнуто при использовании многоступенчатых ракет, когда ступени ракеты отделяются по мере выгорания топлива. Из процесса последующего разгона ракеты исключаются массы контейнеров, в которых находилось топливо, отработавшие двигатели, системы управления и т. д. Именно по пути создания экономичных многоступенчатых ракет развивается современное ракетостроение.

Механическая работа и мощность

Энергия – универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. Энергетические характеристики движения вводятся на основе понятия механической работы или работы силы.

Работой *A*, совершаемой постоянной силой $\vec{F}$, называется физическая величина, равная произведению модулей силы и перемещения, умноженному на косинус угла α между векторами силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{S}$ (рис. 50):

$$A = F \cdot S\cos\alpha \qquad (86).$$

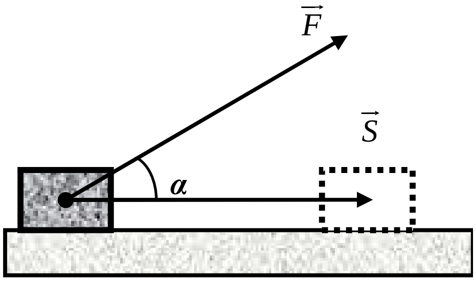


Рис.50. К определению Работы постоянной силы

Работа является скалярной величиной. Она может быть как положительна ($0° \le \alpha < 90°$), так и отрицательна ($90° < \alpha \le 180°$). При $\alpha = 90°$ работа, совершаемая силой, равна нулю. В системе СИ работа измеряется в джоулях (Дж).

1 Дж равен работе, совершаемой силой в 1 Н на перемещении 1 м в направлении действия силы.

Если проекция $\vec{F}_s$ силы $\vec{F}$ на направление перемещения $\vec{S}$ не остается постоянной, работу следует вычислять для малых перемещений ΔS_i и суммировать результаты

$$A = \sum \Delta A_i = \sum F_{Si} \cdot \Delta S_i \qquad (87).$$

Элементарная работа силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$

$$dA = Fdr = F\cos\alpha dS = F_S dS \qquad (88).$$

Сумма (87) в пределе ($\Delta Si \to 0$) переходит в интеграл. Работа силы на участке 1 – 2

$$A = \int_1^2 FdS\cos\alpha = \int_1^2 F_S dS \qquad (89).$$

Искомая работа определяется на графике (рис. 51) площадью заштрихованной фигуры, в этом состоит геометрический смысл выражения для A.

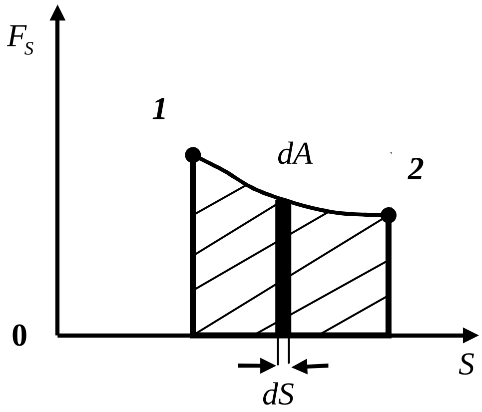


Рис. 51. Геометрический смысл выражения для работы

Примером силы, модуль которой зависит от координаты, может служить упругая сила пружины, подчиняющаяся закону Гука. Для того, чтобы растянуть пружину, к ней нужно приложить внешнюю силу $\vec{F}$, модуль которой пропорционален удлинению пружины (рис. 52).

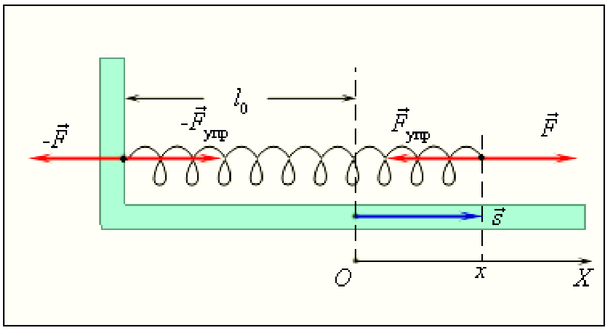


Рис. 52. Растянутая пружина

Зависимость модуля внешней силы от координаты x изображается на графике прямой линией (рис. 53).

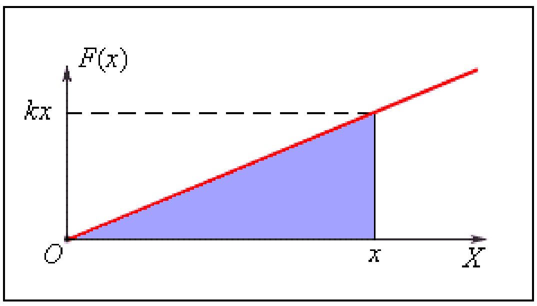


Рис. 53. Зависимость модуля внешней силы от координаты при растяжении пружины.

По площади треугольника на рис. 53 можно определить работу, совершенную внешней силой, приложенной к правому свободному концу пружины:

$$A = \frac{k \cdot x^2}{2} \qquad (90).$$

Этой же формулой выражается работа, совершенная внешней силой при сжатии пружины. В обоих случаях работа упругой силы $\vec{F}_{\text{упр}}$ равна по модулю работе внешней силы $\vec{F}$ и противоположна ей по знаку.

Если к телу приложено несколько сил, то общая работа всех сил равна алгебраической сумме работ, совершаемых отдельными силами, и равна работе равнодействующей приложенных сил.

Работа силы, совершаемая в единицу времени, называется мощностью. **Мощность N – физическая (скалярная) величина, равная отношению работы A к промежутку времени t, в течение которого совершена эта работа:**

$$N = \frac{A}{t} \qquad (91).$$

Мощность, развиваемая силой $\vec{F}$ равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы

$$N = F \cdot \upsilon$$

(92).

В Международной системе (СИ) единица мощности называется ватт (Вт). 1 Вт равен мощности силы, совершающей работу в 1 Дж за время 1 с (1 Вт = 1 Дж/с).

Кинетическая и потенциальная энергии

Энергия ($[E]$ 1 Дж) – скалярная физическая величина, характеризующая способность тела совершать работу. Если тело способно совершать работу, значит, оно обладает энергией.

При равноускоренном движении, перемещение S выражается формулой

$$S = \frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2 \cdot a} \qquad (93).$$

Отсюда следует, что

$$A = F \cdot S = m \cdot a \cdot \frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2 \cdot a} = \frac{m \cdot \upsilon_2^2}{2} - \frac{m \cdot \upsilon_1^2}{2} \qquad (94).$$

Это выражение показывает, что работа, совершенная силой (или равнодействующей всех сил), связана с изменением квадрата скорости (а не самой скорости).

Физическая величина, равная половине произведения массы тела на квадрат его скорости, называется кинетической энергией тела:

$$E_K = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2} \quad (95).$$

Кинетическая энергия механической системы – энергия механического движения этой системы. Кинетическая энергия:

- всегда положительна;
- не одинакова в разных системах отсчёта;
- является функцией состояния системы.

Работа, совершённая некоторой силой, равна изменению его кинетической энергии тела, на которое эта сила действовала. Работа сил при перемещении тела из точки 1 в точку 2:

$$A = \int_1^2 F dr = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m \cdot \upsilon d\upsilon = m \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \upsilon d\upsilon = \frac{m \cdot \upsilon_2^2}{2} - \frac{m \cdot \upsilon_1^2}{2} \quad (96),$$

или

$$A = E_{K2} - E_{K1} \quad (97).$$

Это утверждение называют **теоремой о кинетической энергии**. Теорема о кинетической энергии справедлива и в общем случае, когда тело движется под действием изменяющейся силы, направление которой не совпадает с направлением перемещения.

Кинетическая энергия – это энергия движения. Кинетическая энергия тела массой m, движущегося со скоростью $\vec{\upsilon}$, равна работе, которую должна совершить сила, приложенная к покоящемуся телу, чтобы сообщить ему эту скорость

$$A = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2} = E_K \quad (98).$$

Если тело движется со скоростью $\vec{\upsilon}$, то для его полной остановки необходимо совершить работу

$$A = -\frac{m \cdot \upsilon^2}{2} = -E_K \quad (99).$$

Наряду с кинетической энергией или энергией движения в физике важную роль играет понятие потенциальной энергии или энергии взаимодействия тел.

Потенциальная энергия определяется взаимным положением тел (например, положением тела относительно поверхности Земли).

Потенциальное поле – поле, в котором работа, совершаемая силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положения.

Консервативная сила – сила, работа которой при перемещении тела из одного положения в другое не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положения тела.

Понятие потенциальной энергии можно ввести только для сил, работа которых не зависит от траектории движения тела и определяется только начальным и конечным положениями.

Работа консервативных сил на замкнутой траектории равна нулю. Это утверждение поясняет рис. 54 (работа на замкнутой траектории $A = A_{1a2} + A_{2b1} = A_{1a2} - A_{1b2} = 0$).

Свойством консервативности обладают сила тяжести и сила упругости. Для этих сил можно ввести понятие потенциальной энергии.

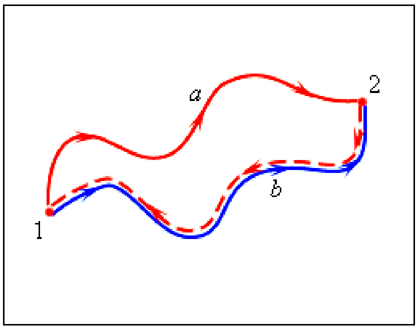


Рис. 54.Работа консервативной силы $A_{1a2} = A_{1b2}$

Связь между консервативной силой и потенциальной энергией

$$\vec{F} = -grad\ E_{П} \qquad (100),$$

где $F_x = -\dfrac{\partial E_П}{\partial x}$, $F_y = -\dfrac{\partial E_П}{\partial y}$, $F_z = -\dfrac{\partial E_П}{\partial z}$; $grad\ E_П = \dfrac{\partial E_П}{\partial x}\cdot\vec{i} + \dfrac{\partial E_П}{\partial y}\cdot\vec{j} + \dfrac{\partial E_П}{\partial z}\cdot\vec{k}$ – градиент скаляра $E_П$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы координатных осей.

Если тело перемещается вблизи поверхности Земли, то на него действует постоянная по величине и направлению сила тяжести $\vec{F} = m\cdot\vec{g}$. Работа этой силы зависит только от вертикального перемещения тела. На любом участке пути работу силы тяжести можно записать в проекциях вектора перемещения $\Delta\vec{S}$ на ось OY, направленную вертикально вверх:

$$\Delta A = F_T\cdot\Delta S\cos\alpha = -m\cdot g\cdot\Delta S_y \qquad (101).$$

где $F_m = F_{my} = - m\cdot g$ – проекция силы тяжести, ΔS_y – проекция вектора перемещения. При подъеме тела вверх сила тяжести совершает отрицательную работу, так как $\Delta Sy > 0$. Если тело переместилось из точки, расположенной на высоте h_1, в точку, расположенную на высоте h_2 от начала координатной оси OY (рис. 55), то F_m совершила работу

$$A = -m \cdot g \cdot (h_2 - h_1) = -(m \cdot g \cdot h_2 - m \cdot g \cdot h_1) \quad (102).$$

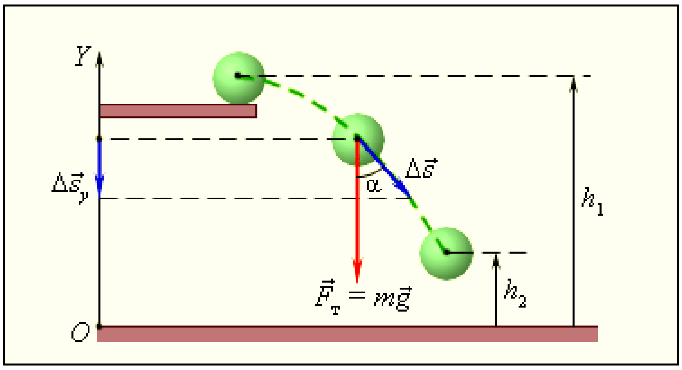


Рис.55. К работе силы тяжести

Эта работа равна изменению некоторой физической величины $m \cdot g \cdot h$, взятому с противоположным знаком. Эту физическую величину называют потенциальной энергией тела в поле силы тяжести

$$E_p = m \cdot g \cdot h \quad (103).$$

Она равна работе, которую совершает сила тяжести при опускании тела на нулевой уровень.

Работа силы тяжести равна изменению потенциальной энергии тела, взятому с противоположным знаком

$$A = -(E_{p2} - E_{p1}) \quad (104).$$

Выражение (104) – теорема о потенциальной энергии.

Потенциальная энергия E_p зависит от выбора нулевого уровня, то есть от выбора начала координат оси OY. Физический смысл имеет не сама потенциальная энергия, а ее изменение $\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}$ при перемещении тела из одного положения в другое. Это изменение не зависит от выбора нулевого уровня.

Если рассматривать движение тел в поле тяготения Земли на значительных расстояниях от нее, то при определении потенциальной энергии необходимо принимать во внимание зависимость силы тяготения от расстояния до центра Земли (закон всемирного тяготения). Для сил всемирного тяготения потенциальную энергию удобно отсчитывать от бесконечно удаленной точки, то есть полагать потенциальную энергию тела в бесконечно удаленной точке равной нулю. Формула, выражающая потенциальную энергию тела массой m на расстоянии r от центра Земли, имеет вид:

$$E_p = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r} \quad (105).$$

где M – масса Земли, G – гравитационная постоянная.

Понятие потенциальной энергии можно ввести и для упругой силы. Эта сила также обладает свойством консервативности. Растягивая (или сжимая) пружину, мы можем делать это различными способами.

Можно просто удлинить пружину на величину x, или сначала удлинить ее на $2{\cdot}x$, а затем уменьшить удлинение до значения x и т. д. Во всех этих случаях упругая сила совершает одну и ту же работу, которая зависит только от удлинения пружины x в конечном состоянии, если первоначально пружина была не деформирована. Эта работа равна работе внешней силы A, взятой с противоположным знаком:

$$A_{\text{упр}} = -A = -\frac{k \cdot x^2}{2} \qquad (106),$$

где k – жесткость пружины. Растянутая (или сжатая) пружина способна привести в движение прикрепленное к ней тело, то есть сообщить этому телу кинетическую энергию. Следовательно, такая пружина обладает запасом энергии. Потенциальной энергией пружины (или любого упруго деформированного тела) называют величину

$$E_p = \frac{k \cdot x^2}{2} \qquad (107).$$

Потенциальная энергия упруго деформированного тела равна работе силы упругости при переходе из данного состояния в состояние с нулевой деформацией.

Если в начальном состоянии пружина уже была деформирована, а её удлинение было равно x_1, тогда при переходе в новое состояние с удлинением x_2 сила упругости совершит работу, равную изменению потенциальной энергии, взятому с противоположным знаком:

$$A_{\text{упр}} = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\left(\frac{k \cdot x_2^2}{2} - \frac{k \cdot x_1^2}{2}\right) \qquad (108).$$

Потенциальная энергия при упругой деформации – это энергия взаимодействия отдельных частей тела между собой силами упругости.

Свойством консервативности обладают наряду с силой тяжести и силой упругости некоторые другие виды сил, например, сила электростатического взаимодействия между заряженными телами. Сила трения не обладает этим свойством. Работа силы трения зависит от пройденного пути. Понятие E_p для силы трения вводить нельзя.

Закон сохранения энергии

Если тела, составляющие замкнутую механическую систему, взаимодействуют между собой только силами тяготения и упругости, то работа этих сил равна изменению потенциальной энергии тел, взятому с противоположным знаком:

$$A = -(E_{p2} - E_{p1}).$$

По теореме о кинетической энергии эта работа равна изменению кинетической энергии тел:

$$A = E_{K2} - E_{K1}.$$

Следовательно

$$E_{K2} - E_{K1} = -(E_{p1} - E_{p2})$$

или

$$E_{K1} + E_{p1} = E_{K2} + E_{p2} \qquad (109).$$

Сумма кинетической и потенциальной энергии тел, составляющих замкнутую систему и взаимодействующих между собой силами тяготения и силами упругости, остается неизменной.

Это утверждение выражает закон сохранения энергии в механических процессах. Он является следствием законов Ньютона. Сумму $E = E_K + E_p$ называют полной механической энергией. Закон сохранения механической энергии выполняется только тогда, когда тела в замкнутой системе взаимодействуют между собой консервативными силами, то есть силами, для которых можно ввести понятие потенциальной энергии.

Ещё одна формулировка закона сохранения энергии: **в консервативных системах (системах в которых действуют только консервативные силы) механическая энергия сохраняется, то есть не изменяется с течением времени.**

Закон сохранения энергии – следствие однородности времени. Однородность времени проявляется в том, что физические законы инвариантны относительно выбора начала отсчёта времени. Например, при свободном падении тела в поле сил тяжести его скорость и пройденный путь зависят лишь от начальной скорости и продолжительности свободного падения тела и не зависят от того, когда тело начало падать.

Пример применения закона сохранения энергии – нахождение минимальной прочности легкой нерастяжимой нити, удерживающей тело массой m при его вращении в вертикальной плоскости (задача Х. Гюйгенса). Рис. 56 поясняет решение этой задачи.

Закон сохранения энергии для тела в верхней и нижней точках траектории записывается в виде:

$$\frac{m \cdot \upsilon_1^2}{2} = \frac{m \cdot \upsilon_2^2}{2} + m \cdot g \cdot 2 \cdot l \qquad (110).$$

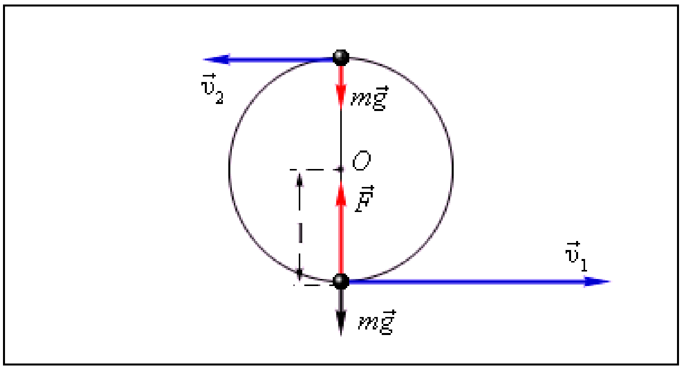


Рис. 56. К задаче Христиана Гюйгенса.

Обратим внимание на то, что сила $\vec{F}$ натяжения нити всегда перпендикулярна скорости тела, поэтому она не совершает работы.

При минимальной скорости вращения натяжение нити в верхней точке равно нулю и, следовательно, центростремительное ускорение тела в верхней точке сообщается только силой тяжести:

$$\frac{m\cdot\upsilon_2^2}{l}=m\cdot g \qquad (111).$$

Из этих соотношений (110), (111) следует

$$\upsilon_{1\min}^2=5\cdot g\cdot l \qquad (112).$$

Центростремительное ускорение в нижней точке создается силами $\vec{F}$ и $m\cdot\vec{g}$, направленными в противоположные стороны:

$$\frac{m\cdot\upsilon_1^2}{l}=F-m\cdot g \qquad (113).$$

Отсюда следует, что при минимальной скорости тела в верхней точке натяжение нити в нижней точке будет по модулю равно

$$F = 6\cdot m\cdot g \qquad (114).$$

Очевидно, что прочность нити должна превышать это значение.

Важно отметить, что закон сохранения механической энергии позволил получить связь между координатами и скоростями тела в двух разных точках траектории без анализа закона движения тела во всех промежуточных точках. Применение этого закона может в значительной степени упростить решение многих задач.

В реальных условиях практически всегда на движущиеся тела наряду с силами тяготения, силами упругости и другими консервативными силами действуют силы трения или силы сопротивления среды. Сила трения не является консервативной. Работа силы трения зависит от длины пути.

Если между телами, составляющими замкнутую систему, действуют силы трения, то механическая энергия не сохраняется. Часть механической энергии превращается во внутреннюю энергию тел (нагревание).

При любых физических взаимодействиях энергия не возникает и не исчезает. Она лишь превращается из одной формы в другую.

Этот экспериментально установленный факт выражает фундаментальный закон природы – **закон сохранения и превращения энергии**.

Сущность закона сохранения и превращения энергии состоит в неуничтожимости материи и её движения. Этот закон – фундаментальный закон природы, он справедлив для систем как макроскопических, так и микроскопических тел.

Одним из следствий закона сохранения и превращения энергии является утверждение о невозможности создания «вечного двигателя» (*perpetuum mobile*) – машины, которая могла бы неопределенно долго совершать работу, не расходуя при этом энергии.

Графическое представление энергии

1). Анализ потенциальной кривой для тела в однородном поле тяжести.

Потенциальная кривая $E_p(h) = E_p = m\cdot g\cdot h$ – прямая линия, проходящая через начало координат, угол наклона которой к оси h тем больше, чем больше масса m тела ($tg\alpha = m\cdot g$). График заданной полной энергии тела E (рис. 57) – прямая EE, параллельная оси h.

- Потенциальная энергия E_p тела на высоте h определяется отрезком вертикали, заключённым между точкой h на оси абсцисс и потенциальной кривой.
- Кинетическая энергия E_K на высоте h задаётся ординатой между потенциальной кривой и горизонтальной прямой EE.
- Если $h = h_{\max}$, то $E_K = 0$ и $E_p = m\cdot g\cdot h_{\max}$, то есть потенциальная энергия становится равной полной энергии.
- Скорость тела на высоте h:

$$\upsilon = \sqrt{2\cdot g\cdot (h_{\max} - h)}$$

$$(E_K = E - E_p;\ \frac{m\cdot \upsilon^2}{2} = m\cdot g\cdot h_{\max} - m\cdot g\cdot h).$$

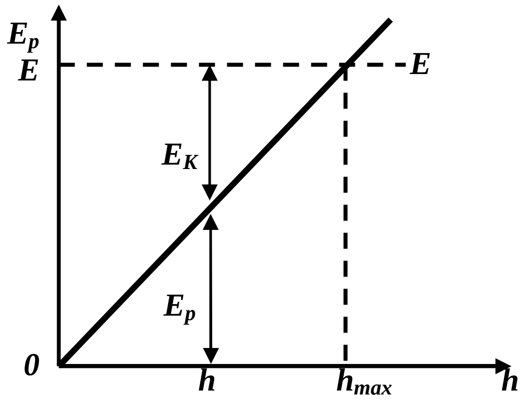


Рис.57. Зависимость $E_p(h)$

2). Анализ потенциальной кривой для упругодеформированного тела.

Зависимость потенциальной энергии упругой деформации $E_p = \dfrac{k \cdot x^2}{2}$ от деформации – потенциальная кривая – имеет вид параболы. График заданной полной энергии *E* – прямая *EE*, параллельная оси *x* (рис.58).

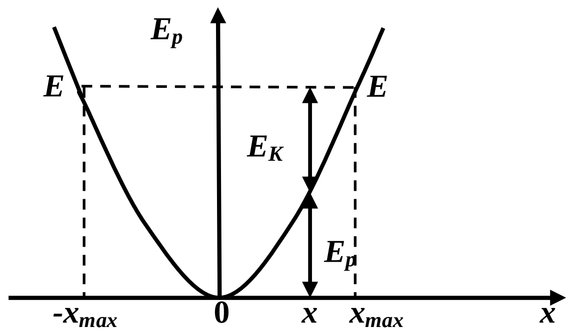


Рис.58. Зависимость E_p для упругодеформированного тела

- ❖ Потенциальная энергия E_p при деформации x определяется отрезком вертикали, заключённым между точкой x на оси абсцисс и потенциальной кривой.
- ❖ Кинетическая энергия E_K при деформации x задаётся ординатой между потенциальной кривой и горизонтальной прямой *EE*.
- ❖ С возрастанием деформации x потенциальная энергия возрастает, а кинетическая – уменьшается.
- ❖ Абсцисса x_{max} определяет максимально возможную деформацию растяжения тела, а – x_{max} – максимально возможную деформацию сжатия тела.

❖ Если $x = \pm x_{\max}$, то E_K = 0 и E_p = E = $\frac{k \cdot x_{\max}^2}{2}$, то есть потенциальная энергия становится максимальной и равной полной энергии.

❖ При полной энергии тела, равной E, тело не может сместиться правее $x_{\max}$, так как кинетическая энергия не может быть отрицательной и, следовательно, потенциальная энергия не может быть больше полной энергии. В таком случае говорят, что тело находится в **потенциальной яме** с координатами $-x_{\max} \le x \le x_{\max}$.

3). Анализ потенциальной кривой (общий случай).

Так же как и в первом случае будем рассматривать

- одномерное движение тела (потенциальная энергия – функция лишь одной переменной (например, координаты x));
- только консервативные системы (в них механическая энергия превращается только в механическую).

В общем случае потенциальная кривая может иметь достаточно сложный вид, например с несколькими чередующимися максимумами и минимумами (рис. 59).

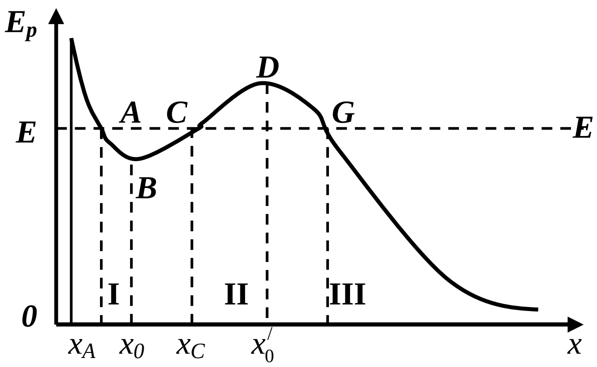


График заданной полной энергии частицы – прямая EE, параллельная оси x.

Рис. 59. Потенциальная кривая

❖ Частица может находиться только там, где $E_p(x) \le E$, то есть в областях *I* и *III*.

❖ Переходить из области *I* в *III* и обратно частица не может, так как ей препятствует потенциальный барьер *CDG*, ширина которого равна интервалу значений *x*, при которых $E < E_p$, а его высота определяется разностью $E_{p\max} - E$. Для того, чтобы частица смогла преодолеть потенциальный барьер, ей необходимо сообщить дополнительную энергию, равную высоте барьера или превышающую её.

❖ В области *I* частица с полной энергией *E* оказывается «запертой» в потенциальной яме *ABC* и совершает колебания между точками с координатами x_A и x_C.

При смещении частицы из положения x_0 (и влево и вправо) она испытывает действие возвращающей силы, поэтому положение x_0 является **положением устойчивого равновесия**. Указанные условия выполняются и для точки x_0' (для E_p). Однако эта точка соответствует **положению неустойчивого равновесия**, так как при смещении частицы из положения x_0' появляется сила, стремящаяся удалить её от этого положения.

Удар абсолютно упругих и неупругих тел

При соударении тел друг с другом они претерпевают деформации. При этом кинетическая энергия, которой обладали тела перед ударом, частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации или в так называемую внутреннюю энергию тел. Увеличение внутренней энергии тел сопровождается повышением температуры.

Существуют два предельных вида удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий. **Абсолютно упругим ударом называется такой удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие немеханические виды энергии.** При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга. Потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию, и тела разлетаются со скоростями, величина и направление которых определяются сохранением полной энергии и сохранением полного импульса системы.

Абсолютно неупругий удар характеризуется тем, что потенциальная энергия деформации не возникает, кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию. После удара столкнувшиеся тела либо движутся с одинаковой скоростью, либо покоятся.

При абсолютно неупругом ударе выполняется лишь закон сохранения импульса. Закон сохранения механической энергии не соблюдается – имеет место закон сохранения суммарной энергии различных видов – механической и внутренней.

Рассмотрим абсолютно неупругий удар двух частиц, образующих замкнутую систему, движущихся вдоль оси х (рис. 60)

Пусть m_1 и m_2 - массы частиц, $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ – скорости частиц до удара, $\vec{u}$ – скорость частиц после удара.

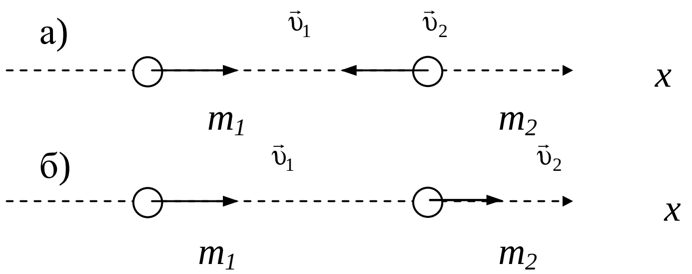


Рис.60. К абсолютно неупругому удару

Запишем закон сохранения импульса:

$$m_1 \cdot \vec{\upsilon}_1 + m_2 \cdot \vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{u}\,;$$

$$\vec{u} = \frac{m_1 \cdot \vec{\upsilon}_1 + m_2 \cdot \vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}. \quad (115).$$

Модуль скорости частиц после удара для первого случая (рис. 60,а) равен

$$u = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1 - m_2 \cdot \upsilon_2}{m_1 + m_2},$$

для второго (рис. 60,б)

$$u = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

Выясним, как изменится полная энергия шаров при абсолютно неупругом ударе. Кинетическая энергия до удара:

$$E_{\kappa_1} = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot \upsilon_2^2}{2},$$

после удара:

$$E_{\kappa_2} = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot u^2.$$

Подставим в это выражение общую скорость движения частиц (115) для случая, изображенного на рис. 3.5,б

$$E_{\kappa_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2)^2}{m_1 + m_2}.$$

Найдем изменение кинетической энергии:

$$\Delta E = E_{\kappa_1} - E_{\kappa_2}\,;$$

$$\Delta E = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot \upsilon_2^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2)^2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (\upsilon_1 - \upsilon_2)^2 \quad (116).$$

Уменьшение кинетической энергии при неупругом ударе означает, что механическая энергия системы при этом ударе не остается постоянной, она частично или полностью превращается в тепловую энергию движущихся молекул.

Рассмотрим абсолютно упругий центральный удар двух однородных шаров (рис.61).

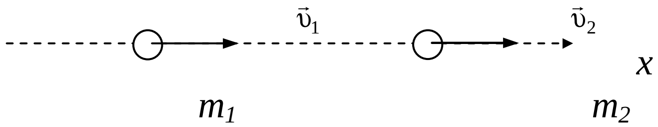


Рис.61. К абсолютно упругому удару

Удар называется центральным, если шары до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центр. Предполагается, что шары образуют замкнутую систему тел, что внешние силы, приложенные к шарам, уравновешивают друг друга. Кроме того, вращение шаров отсутствует.

Обозначим m_1 и m_2 – массы шаров, $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ – скорости шаров до удара, $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ – скорости шаров после удара. Положим, что скорости шаров как до удара, так и после удара направлены вдоль положительного направления оси x.

Запишем уравнение закона сохранения импульса и энергии:

$$m_1 \cdot \vec{\upsilon}_1 + m_2 \cdot \vec{\upsilon}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2 \qquad (117),$$

$$\frac{m_1 \cdot \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot \upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1 \cdot u_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot u_2^2}{2} \qquad (118).$$

Спроектируем уравнение закона сохранения импульса (117) на ось x:

$$m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$$

и преобразуем его к виду

$$m_2 \cdot (\upsilon_2 - u_2) = m_1 \cdot (u_1 - \upsilon_1) \qquad (119).$$

Из закона сохранения энергии (118) следует:

$$m_2 \cdot (\upsilon_2^2 - u_2^2) = m_1 \cdot (u_1^2 - \upsilon_1^2) \qquad (120).$$

Разделим уравнение (119) на (118), получим

$$\upsilon_2 + u_2 = u_1 + \upsilon_1 \qquad (121).$$

Для нахождения скорости u_1 умножим (121) на m_2 и полученное соотношение сложим с уравнением (119):

$$+\begin{cases} m_2 \cdot \upsilon_2 + m_2 \cdot u_2 = m_2 \cdot u_1 + m_2 \cdot \upsilon_1 \\ m_2 \cdot \upsilon_2 - m_2 \cdot u_2 = m_1 \cdot u_1 - m_1 \cdot \upsilon_1 \end{cases},$$

получим

$$2 \cdot m_2 \cdot \upsilon_2 = u_1 \cdot (m_2 + m_1) + \upsilon_1 \cdot (m_2 - m_1),$$

откуда

$$u_1 = \frac{\upsilon_1 \cdot (m_1 - m_2) + 2 \cdot m_2 \cdot \upsilon_2}{m_1 + m_2} \qquad (122).$$

Для определения скорости u_2 умножим (121) на m_1 и полученное соотношение вычтем из уравнения (119):

$$-\begin{cases} m_2 \cdot \upsilon_2 - m_2 \cdot u_2 = m_1 \cdot u_1 - m_1 \cdot \upsilon_1 \\ m_2 \cdot \upsilon_2 + m_2 \cdot u_2 = m_1 \cdot u_1 + m_1 \cdot \upsilon_1 \end{cases},$$

получим

$$\upsilon_2 \cdot (m_2 - m_1) - u_2 \cdot (m_1 + m_2) = -2 \cdot m_1 \cdot \upsilon_1,$$

откуда

$$u_2 = \frac{\upsilon_2 \cdot (m_2 - m_1) + 2 \cdot m_1 \cdot \upsilon_1}{m_1 + m_2} \qquad (123).$$

При $m_1 = m_2$ из (122) и (123) следует, что $u_1 = \upsilon_2$, а $u_2 = \upsilon_1$.

Условия равновесия тел

Статикой называется раздел механики, изучающий условия равновесия тел.

Из второго закона Ньютона следует, что если геометрическая сумма всех внешних сил, приложенных к невращающемуся телу, равна нулю, то тело находится в состоянии покоя или совершает равномерное прямолинейное движение. В этом случае принято говорить, что силы, приложенные к телу, уравновешивают друг друга. При вычислении равнодействующей все силы, действующие на тело, можно прикладывать к центру масс. Чтобы невращающееся тело находилось в равновесии, необходимо, чтобы равнодействующая всех сил, приложенных к телу, была равна нулю

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots = 0 \qquad (124).$$

На рис. 62 дан пример равновесия твердого тела под действием трех сил. Точка пересечения *O* линий действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ не совпадает с точкой приложения силы тяжести (центр масс *C*), но при равновесии эти точки обязательно находятся на одной вертикали. При вычислении равнодействующей все силы приводятся к одной точке.

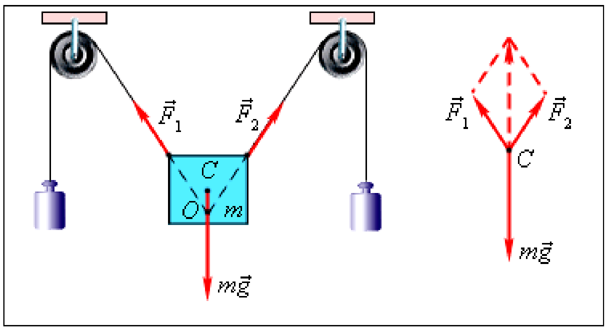


Рис. 62. Равновесие твердого тела под действием трех сил

Если тело может вращаться относительно некоторой оси, то для его равновесия недостаточно равенства нулю равнодействующей всех сил.

Вращающее действие силы зависит не только от её величины, но и от расстояния между линией действия силы и осью вращения.

Момент силы относительно неподвижной точки O – физическая величина, определяемая произведением радиуса-вектора $\vec{r}$, проведённого из точки O в точку A приложения силы, на силу $\vec{F}$

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] \qquad (125).$$

$\vec{M}$ – псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта (правило буравчика) при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ (рис. 63).

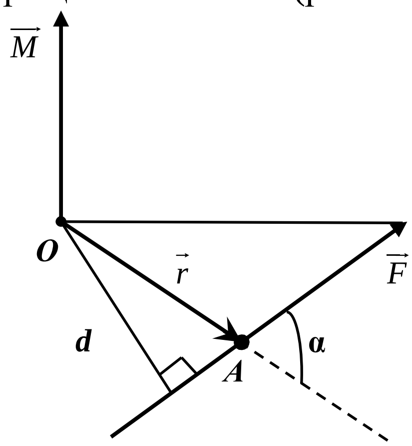


Рис. 63. К определению направления $\vec{M}$

Модуль вектора момента силы

$$M = F \cdot r\sin\alpha = F \cdot d \qquad (126).$$

Кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой О – плечо силы

$$r\sin\alpha = d .$$

Момент силы относительно неподвижной оси z – скалярная величина M_z, равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$ момента силы, определённого произвольной точкой O данной оси z (рис. 64).

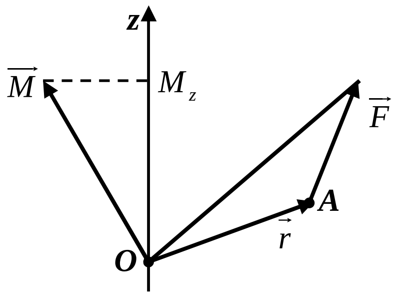


Рис. 64. Вектор $\vec{M}$

Если ось z совпадает с направлением вектора $\vec{M}$, то момент силы представляется в виде вектора, совпадающего с осью.

$[M]$ 1 н·м.

Положительными считаются моменты тех сил, которые стремятся повернуть тело против часовой стрелки (рис. 65).

Правило моментов: тело, имеющее неподвижную ось вращения, находится в равновесии, если алгебраическая сумма моментов всех приложенных к телу сил относительно этой оси равна нулю:

$$M_1 + M_2 + \ldots = 0 \qquad (127).$$

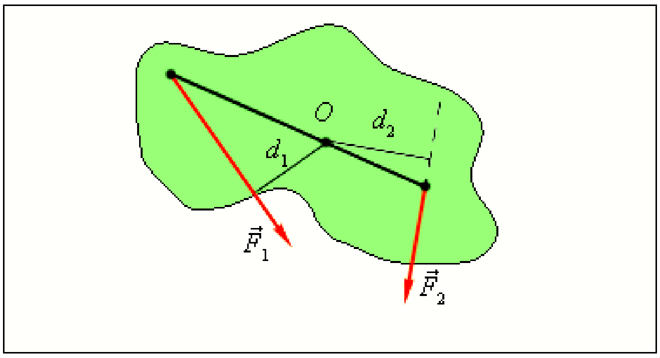


Рис. 64. Силы, действующие на рычаг, и их моменты.

На рис. 64: $M_1 = F_1 \cdot d_1 > 0$; $M_2 = -F_2 \cdot d_2 < 0$. При равновесии $M_1 + M_2 = 0$.

В общем случае, когда тело может двигаться поступательно и вращаться, для равновесия необходимо выполнение обоих условий: равенство нулю равнодействующей силы и равенство нулю суммы всех моментов. Оба эти условия не являются достаточными для покоя.

Катящееся по горизонтальной поверхности колесо – пример безразличного равновесия (рис. 65). Если колесо остановить в любой точке, оно окажется в равновесном состоянии. Равнодействующая сила и момент сил равны нулю.

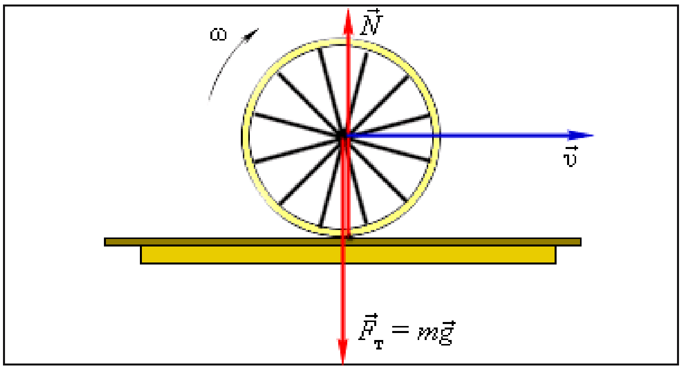


Рис. 65. Качение колеса по горизонтальной поверхности

Наряду с безразличным равновесием в механике различают устойчивые и неустойчивые состояния равновесия.

Состояние равновесия называется **устойчивым**, если при малых отклонениях тела от этого состояния возникают силы или моменты сил, стремящиеся возвратить тело в равновесное состояние.

При малом отклонении тела из **состояния неустойчивого равновесия** возникают силы или моменты сил, стремящиеся удалить тело от положения равновесия.

Шар, лежащий на плоской горизонтальной поверхности, находится в **безразличном состоянии равновесия**. Шар, находящийся в верхней точке сферического выступа, – пример неустойчивого равновесия. Наконец, шар на дне сферического углубления находится в состоянии устойчивого равновесия (рис. 66).

На рис.66: (1) – безразличное равновесие, (2) – неустойчивое равновесие, (3) – устойчивое равновесие.

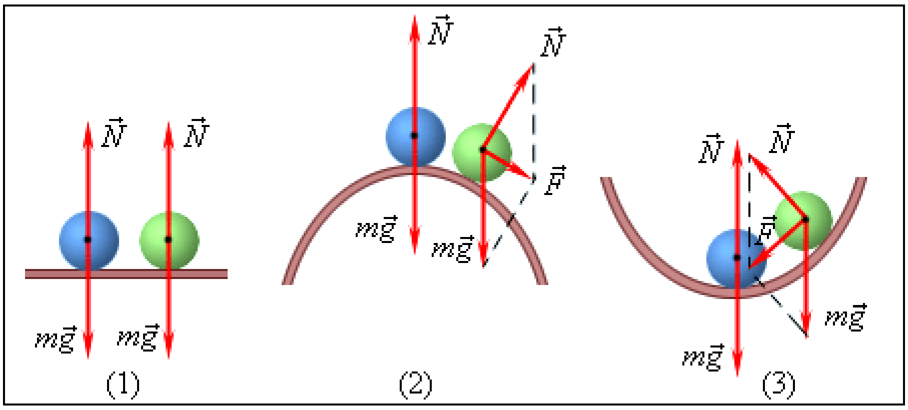


Рис.66. Различные типы равновесия шара на опоре

Для тела, имеющего неподвижную ось вращения, возможны все три вида равновесия. Безразличное равновесие возникает, когда ось вращения проходит через центр масс. При устойчивом и неустойчивом равновесии центр масс находится на вертикальной прямой, проходящей через ось вращения. При этом если центр масс находится ниже оси вращения, состояние равновесия оказывается устойчивым. Если же центр масс расположен выше оси – состояние равновесия неустойчиво (рис. 67). На рис.67: ось *O*, точка *C* – центр массы диска, *d* – плечо.

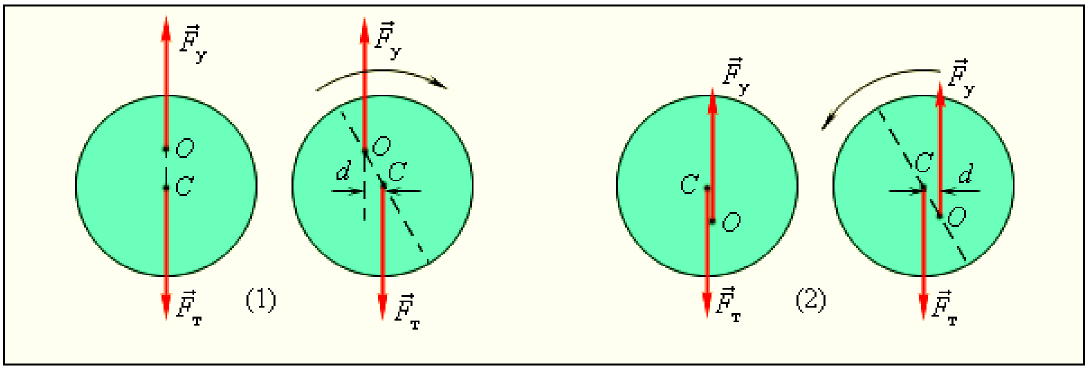
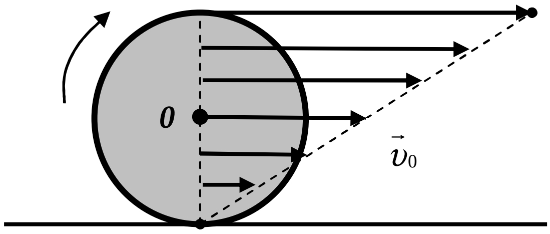


Рис. 67. Устойчивое (1) и неустойчивое (2) равновесие однородного круглого диска, закрепленного на оси O

Вращательное движение твердого тела

Твердое тело – это система материальных точек, расстояние между которыми остается неизменным при взаимодействии системы с другими телами. Движение твердого тела бывает поступательным и вращательным. Всякое движение твердого тела можно представить как сумму движения названных двух типов. Покажем это для случая **плоского движения**, то есть такого, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях. В качестве примера плоского движения возьмем качение цилиндра по плоскости (рис. 68).



Стрелками обозначены линейные скорости различных точек цилиндра.

Рис.68. Качение цилиндра по плоскости

Скорость каждой точки цилиндра может быть представлена в виде

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}^{/} \qquad (128),$$

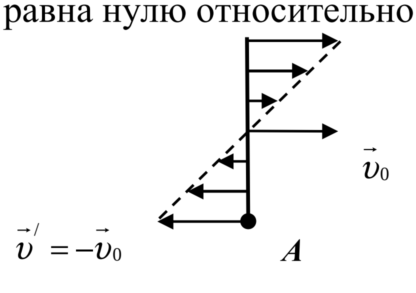
где υ_0 – скорость поступательного движения, одинаковая для всех точек тела, а $\upsilon^{/}$ – линейная скорость точки, обусловленная вращением тела и разная для разных точек тела. Линейная скорость точки с радиус-вектором *r*

$$\vec{\upsilon}^{/} = \vec{\omega} \cdot \vec{r} \qquad (129).$$

Таким образом, скорость точки при сложном движении тела имеет вид:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\omega} \cdot \vec{r} \qquad (130).$$

Отсюда следует, что существуют точки, суммарная скорость которых равна нулю относительно неподвижной системы отсчета (рис. 69).



Скорость точки А цилиндра равна нулю относительно неподвижной системы отсчета.

Рис.69. Скорости точек цилиндра

Геометрическое место точек, неподвижных в каждый рассматриваемый момент времени, образует прямую, которая является мгновенной осью вращения (рис. 70).

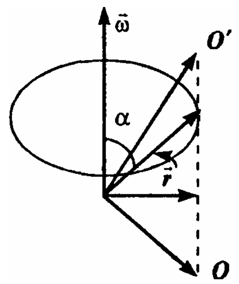


Рис. 70. Мгновенная ось вращения

Проекции всех векторов *r*, лежащих на прямой *00'*, одинаковы. Прямая *00'* образует мгновенную ось вращения цилиндра.

В случае цилиндра, перемещающегося по плоскости, мгновенная ось совпадает с линией касания цилиндра плоскости. Видно, что мгновенная ось вращения не остается постоянной, а перемещается по мере движения тела. Скорости всех точек тела в каждый момент времени можно считать обусловленными вращением вокруг соответствующей мгновенной оси. Таким образом, **плоское движение твердого тела можно рассматривать как ряд последовательных вращений вокруг мгновенных осей. В общем случае движение тела можно представлять как вращение вокруг мгновенной оси и одновременно поступательное движение вдоль этой же оси.**

Момент инерции тела относительно оси вращения

Моментом инерции тела относительно оси вращения называется сумма произведений элементарных масс на квадрат расстояния от оси вращения

$$J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot r_i^2 \qquad (131).$$

Для тела с неравномерно распределенной массой элементарная масса

$$\Delta m_i = \rho_i \cdot \Delta V_i \qquad (132),$$

где ρ_i - плотность в данной точке, ΔV_i – элементарный объем. Поэтому момент инерции тела будет равен

$$J = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \cdot r_i^2 \cdot \Delta V_i \qquad (133).$$

Если ρ = const, то

$$J = \rho \cdot \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \cdot \Delta V_i \qquad (134).$$

Переходя к пределу получим, что

$$J = \int \rho \cdot r^2 dV \qquad (135).$$

Интегралы берутся по всему объёму тела, причём величины ρ и r являются функциями точки (например, декартовых координат x, y и z).

Найдем момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр (рис. 71). Разобьем диск на кольцевые слои толщиной dr. Объем такого слоя равен $V = b \cdot 2 \cdot \pi r dr$, где b – толщина диска, r – радиус кольцевого слоя.

Поскольку диск однороден, то ρ=const и

$$J = \rho \cdot \int r^2 dV = \rho \cdot \int_0^R r^2 \cdot b \cdot 2 \cdot \pi \cdot r dr;$$

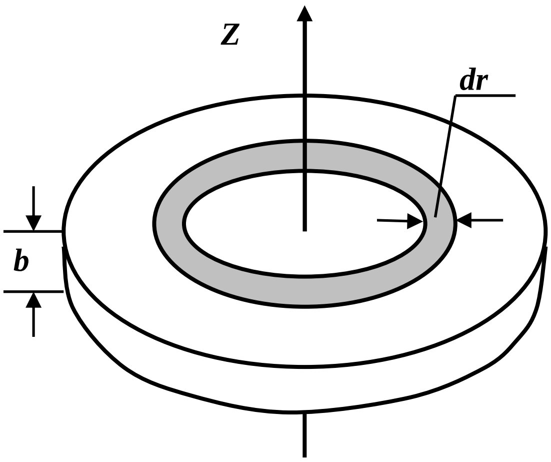


Рис. 71. Однородный диск

$$J = 2 \cdot \pi \cdot b \cdot \rho \cdot \int_0^R r^3 dr = \frac{2 \cdot \pi \cdot b \cdot \rho \cdot R^4}{4};$$

$$J = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot b \cdot \frac{R^2}{2},$$

Произведение $\rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot b = \rho \cdot V = m$, поэтому момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости и проходящий через его центр будет равен

$$J = \frac{m \cdot R^2}{2} \qquad (136).$$

Для нахождения момента инерции диска относительно оси, не проходящей через его центр (рис.72) нужно воспользоваться теоремой Штейнера.

Теорема Штейнера

Момент инерции тела *J* относительно любой оси вращения равен моменту инерции J_C относительно параллельной оси, проходящей через центр масс *C* тела, сложенному с произведением массы m тела на квадрат расстояния *a* между осями.

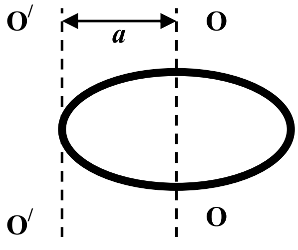


Рис. 72. К определению момента инерции диска относительно оси

$$J = J_C + m \cdot a^2 \qquad (137).$$

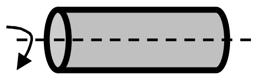
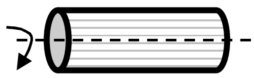
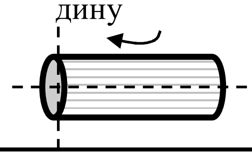
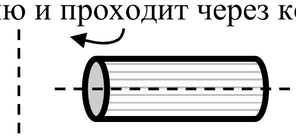
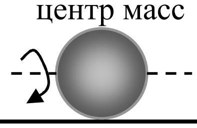
В соответствии с этой теоремой, момент инерции диска относительно оси O′O′ равен

$$J = \frac{m \cdot R^2}{2} + m \cdot R^2 = \frac{3}{2} \cdot m \cdot R^2 \qquad (137^*).$$

Приведём моменты инерции некоторых однородных тел (таблица 6)

Таблица 6

Моменты инерции однородных тел

Тело	Положение оси вращения	Значение момента инерции
Обруч, кольцо, тонкостенный цилиндр	Ось симметрии перпендикулярна плоскости торца 	$J = m{\cdot}R^2$
Сплошной цилиндр, диск	Ось симметрии перпендикулярна торцу 	$J = \frac{1}{2}\cdot m{\cdot}R^2$
Стержень	Ось перпендикулярна стержню и проходит через середину 	$J = \frac{1}{12}\cdot m{\cdot}l^2$
Стержень	Ось перпендикулярна стержню и проходит через конец 	$J = \frac{1}{3}\cdot m{\cdot}l^2$
Твердый сплошной шар	Ось, проходящая через центр масс 	$J = \frac{2}{5}\cdot m{\cdot}R^2$

Кинетическая энергия твердого тела при вращении

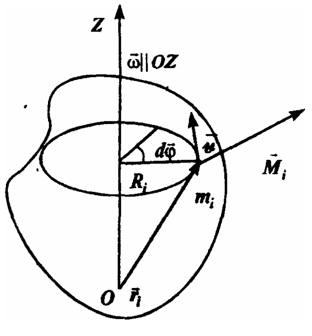


Рис.73. Вращающееся тело

Рассмотрим вращение тела вокруг неподвижной оси Z (рис. 73). Линейная скорость точки с массой m_i, равна $\upsilon_{\text{i}} = \omega{\cdot}R$, где R, – расстояние точки до оси Z. Для кинетической энергии i-й материальной точки тела получаем выражение:

$$E_{Ki} = \frac{m\cdot\upsilon_i^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot m_i\cdot\omega^2\cdot R_i^2 \qquad (138).$$

Полная кинетическая энергия тела

$$E_K = \sum E_{Ki} = \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum m_i \cdot R_i^2 \qquad (139).$$

Поскольку входящая сюда сумма представляет собой момент инерции относительно оси *Z*, получаем:

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 \qquad (140).$$

Вычислим работу, совершаемую внешней силой при вращении твердого тела. Элемент работы

$$dA = \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \vec{f}\left[d\vec{\varphi}, \vec{r}\right] = d\varphi\left[\vec{r},\, \vec{f}\,\right] \qquad (141).$$

Последнее выражение есть момент внешней силы *M*, таким образом,

$$dA = \overrightarrow{M} d\vec{\varphi} = \overrightarrow{M} \cdot \vec{\omega} dt \qquad (142).$$

Полная работа может быть вычислена с помощью следующих формул:

$$A = \int dA = \int_0^{\varphi} \overrightarrow{M} \cdot d\vec{\varphi} = \int_0^{t} \overrightarrow{M} \cdot \vec{\omega} dt \qquad (143).$$

Кинетическая энергия при плоском движении слагается из энергии поступательного движения со скоростью центра инерции тела и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр инерции

$$E_{пл} = \frac{m \cdot \upsilon_C^2}{2} + \frac{J \cdot \omega^2}{2}$$

(144).

Уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела

Момент сил твёрдого тела относительно оси равен произведению момента инерции относительно той же оси на угловое ускорение. Работа вращения тела идёт на увеличение его кинетической энергии:

$dA = dE_K,\ dA = M_z d\varphi,\ dE_K = d(\frac{J_z \cdot \omega^2}{2}) = J_z \cdot \omega d\omega$. Тогда $M_z d\varphi = J_z \cdot \omega d\omega$, или $M_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = J_z \cdot \omega \cdot \frac{d\omega}{dt}$. Так как $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, то

$$M_z = J_z \cdot \varepsilon \qquad (145).$$

Момент импульса и закон его сохранения

Момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки *O* – физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора $\vec{r}_i$ материальной точки, проведённого из точки *O*, на импульс $\vec{p}_i = m_i \cdot \vec{\upsilon}_i$ этой материальной точки

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right] = \left[\vec{r}_i, m_i\vec{\upsilon}_i\right] \qquad (146).$$

$\vec{L}_i$ – псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}_i$ к $\vec{p}_i$ (рис. 74).

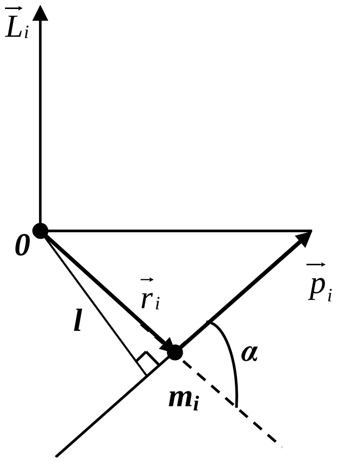


Рис. 74. К определению направления $\vec{L}_i$

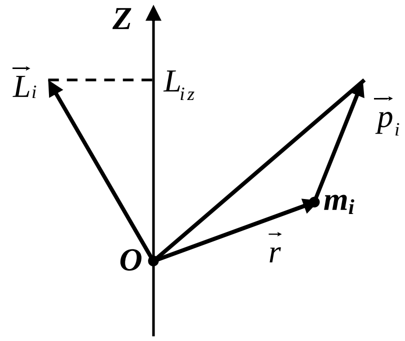


Рис. 75. К определению направления $\vec{L}_i$

Модуль вектора момента импульса

$$L_i = r_i \cdot p_i \sin\alpha = m_i \cdot \upsilon_i \cdot r_i \sin\alpha = p_i \cdot l \qquad (147),$$

где α – угол между векторами r_i и p_i; $l = r\sin\alpha$ – плечо импульса. Перпендикуляр опущен из точки *O* на прямую, вдоль которой направлен импульс частицы.

Момент импульса материальной точки относительно неподвижной оси *Z* – скалярная физическая величина L_{iz}, равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определённого относительно произвольной точки *O* данной оси *Z*.

Значение момента импульса L_{iz} не зависит от положения точки *O* на оси *Z*.

Момент импульса отдельной точки вращающегося абсолютно твёрдого тела

$$L_{iz} = m_i \cdot \upsilon_i \cdot r_i \qquad (148).$$

При вращении абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной оси *Z* каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса r_i с некоторой скоростью $\vec{\upsilon}_i$. Скорость $\vec{\upsilon}_i$ и импульс $m_i \cdot \vec{\upsilon}_i$ перпендикулярны этому радиусу, то есть радиус – плечо вектора $m_i \cdot \vec{\upsilon}_i$. Тогда момент импульса отдельной частицы $L_{iz} = m_i \cdot \upsilon_i \cdot r_i$ и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта (рис. 75).

Момент импульса абсолютно твёрдого тела относительно неподвижной оси Z

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \upsilon_i \cdot r_i \qquad (149).$$

Сумма моментов импульса отдельных частиц относительно той же оси

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \upsilon_i \cdot r_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega = \omega \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2 = J_z \cdot \omega,$$ то есть

$$L_z = J_z \cdot \omega \qquad (150),$$

учли, что $\upsilon_i = \omega \cdot r_i$; J_z – момент инерции тела относительно оси Z, ω – угловая скорость.

Ещё одна форма записи уравнения динамики вращательного движения твёрдого тела

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \qquad (151).$$

Производная момента импульса твёрдого тела относительно оси равна моменту силы относительно той же оси. Продифференцировав $L_z = J_z \cdot \omega$ по времени, получим записанное выражение:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = J_z \cdot \varepsilon = M_z.$$

Производная вектора момента импульса твёрдого тела равна моменту (сумме моментов) внешних сил

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad (152).$$

<u>Закон сохранения момента импульса</u>: **момент импульса замкнутой системы сохраняется, то есть не изменяется с течением времени**

$$\vec{L} = const \qquad (153).$$

Действительно, в замкнутой системе момент внешних сил

$$\vec{M} = 0; \frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const.$$

Закон сохранения момента импульса – фундаментальный закон природы, является следствием изотропности пространства. Изотропность пространства – инвариантность физических законов относительно выбора направления осей координат системы отчёта (относительно поворота замкнутой системы в пространстве на любой угол).

Иллюстрацией этого закона может служить неупругое вращательное столкновение двух дисков, насаженных на общую ось (рис. 76).

Закон сохранения момента импульса в этом случае

$$J_1 \cdot \omega_1 = (J_1 + J_2) \cdot \omega.$$

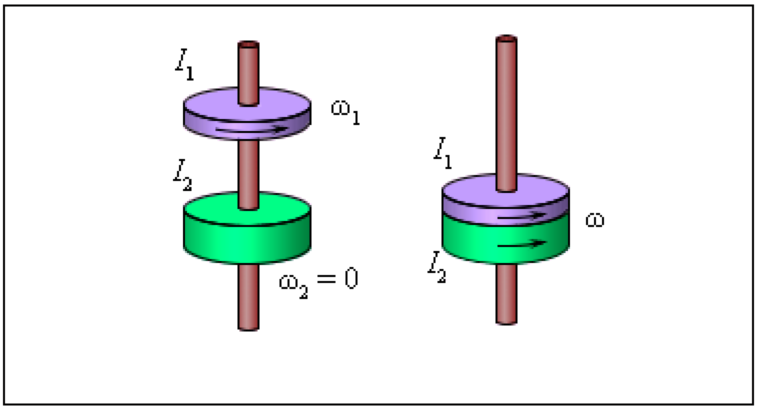
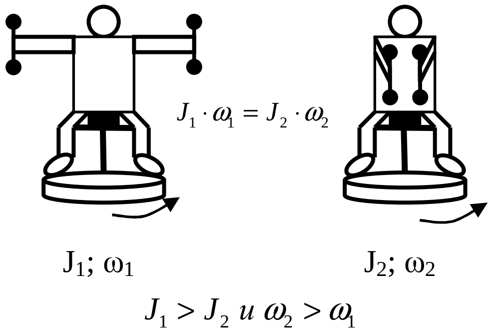


Рис. 76. Неупругое вращательное столкновение двух дисков

Ещё одним наглядным примером является человек сидящий на скамье Жуковского (рис. 77). Если человек прижмёт гантели к себе, то момент инерции уменьшится. Поскольку момент внешних сил равен нулю, то момент импульса системы сохраняется ($J_1 \cdot \omega_1 = J_2 \cdot \omega_2$) и угловая скорость вращения ω_2 возрастает.

Гимнаст во время прыжка через голову поджимает к туловищу руки и ноги, чтобы уменьшить момент инерции и увеличить тем самым угловую скорость вращения.



Закон сохранения момента импульса справедлив для любой замкнутой системы тел. Он выполняется, например, при движении планет по эллиптическим орбитам вокруг Солнца.

Рис. 77. Человек на скамье Жуковского

Уравнение вращательного движения тела можно записывать не только относительно неподвижной или равномерно движущейся оси, но и относительно оси, движущейся с ускорением.

Основное уравнение динамики вращательного движения не изменяет своего вида и в случае ускоренно движущихся осей при условии, что ось вращения проходит через центр массы тела и что её направление в пространстве остается неизменным. Примером может служить качение тела (обруч, цилиндр, шар) по наклонной плоскости с трением (рис. 78).

Ось вращения *O* проходит через центр масс тела. Моменты силы тяжести $m \cdot \vec{g}$ и силы реакции $\vec{N}$ относительно оси *O* равны нулю. Момент *M* создает только сила трения:

$$M = F_{mp} \cdot R.$$

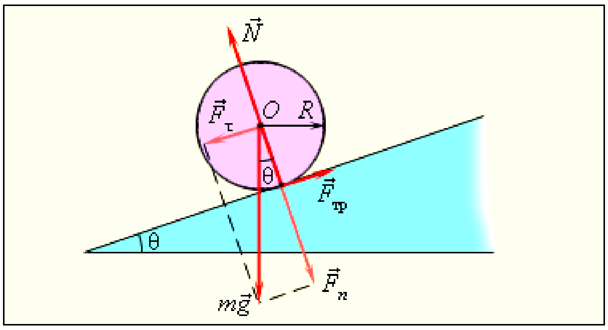


Рис. 78. Качение симметричного тела по наклонной плоскости

Уравнение вращательного движения:

$$J_C \cdot \varepsilon = J_C \cdot \frac{a}{R} = M = F \cdot R \qquad (154),$$

где ε – угловое ускорение катящегося тела, *a* – линейное ускорение его центра масс, J_C – момент инерции относительно оси *O*, проходящей через центр масс.

Второй закон Ньютона для поступательного движения центра масс записывается в виде:

$$m \cdot a = m \cdot g \sin\theta - F_{mp} \qquad (155).$$

Исключая из этих уравнений F_{mp}, получим окончательно:

$$a = \frac{m \cdot g \sin\theta}{(\frac{J_C}{R^2} + m)} \qquad (156).$$

Из этого выражения видно, что быстрее будет скатываться с наклонной плоскости тело, обладающее меньшим моментом инерции. Например, у шара

$$J_C = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2,$$

а у сплошного однородного цилиндра

$$J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2.$$

Следовательно, шар будет скатываться быстрее цилиндра.

Между параметрами и уравнениями поступательного и вращательного движения существует аналогия. Ниже (таблица 7) приведена аналогия в описании поступательного и вращательного движений.

Таблица 7

Аналогия в описании поступательного и вращательного движений

Поступательное движение	**Вращательное движение**
Масса m	Момент инерции J
Скорость $\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость $\vec{\omega}=\frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение $\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила $\vec{F}$	Момент силы M_z или $\vec{M}$
Импульс $\vec{p}=m\cdot\vec{\upsilon}$	Момент импульса $L_z=J_z\cdot\omega$
Основное уравнение динамики $\vec{F}=m\cdot\vec{a}$ $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$	Основное уравнение динамики $M_z=J_z\cdot\varepsilon$ $\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$
Работа $dA=F_s dS$	Работа $dA=M_z d\varphi$
Кинетическая энергия $\frac{m\cdot\upsilon^2}{2}$	Кинетическая энергия $\frac{J_z\cdot\omega^2}{2}$

Тяготение. Элементы теории поля

Законы Кеплера

В мире атомов и элементарных частиц гравитационные силы пренебрежимо малы по сравнению с другими видами силового взаимодействия между частицами. Очень непросто наблюдать гравитационное взаимодействие и между различными окружающими нас телами, даже если их массы составляют многие тысячи килограмм. Однако именно гравитация определяет поведение «больших» объектов, таких, как планеты, кометы и звезды, именно гравитация удерживает всех нас на Земле. Гравитация управляет движением планет Солнечной системы. Без неё планеты, составляющие Солнечную систему, разбежались бы в разные стороны и потерялись в безбрежных просторах мирового пространства.

Закономерности движения планет с давних пор привлекали внимание людей. Изучение движения планет и строения Солнечной системы и привело к созданию теории гравитации – открытию закона всемирного тяготения.

С точки зрения земного наблюдателя планеты движутся по весьма сложным траекториям (рис. 79). Первая попытка создания модели Вселенной была предпринята Птолемеем (~ 140 г.). В центре мироздания Птолемей поместил Землю, вокруг которой по большим и малым кругам, как в хороводе, двигались планеты и звезды.

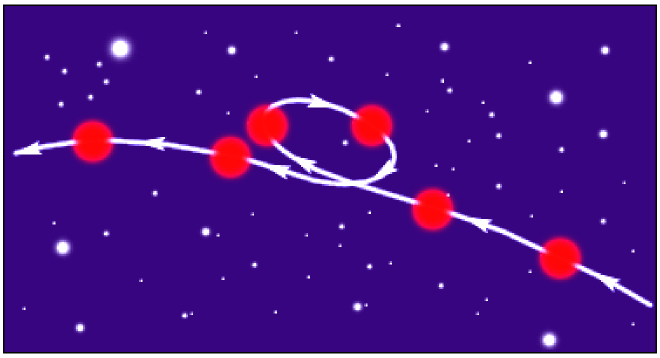


Рис.79. Условное изображение наблюдаемого движения Марса на фоне неподвижных звезд

Геоцентрическая система Птолемея продержалась более 14 столетий и только в середине XVI века была заменена гелиоцентрической системой Коперника. В системе Коперника траектории планет оказались более простыми. Немецкий астроном И. Кеплер в начале XVII века на основе системы Коперника сформулировал три эмпирических закона движения планет Солнечной системы. Кеплер использовал результаты наблюдений за движением планет датского астронома Т. Браге.

Первый закон Кеплера (1609 г.):

все планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

На рис. 80 показана эллиптическая орбита планеты, масса которой много меньше массы Солнца. Солнце находится в одном из фокусов эллипса. Ближайшая к Солнцу точка P траектории называется перигелием, точка A, наиболее удаленная от Солнца, называется афелием или апогелием. Расстояние между афелием и перигелием – большая ось эллипса.

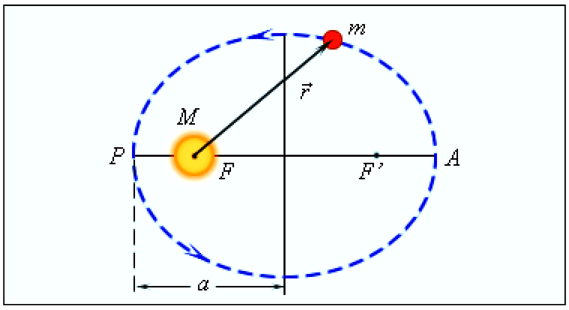


Рис. 80. Эллиптическая орбита планеты массой m << M.
a – длина большой полуоси, F и F' – фокусы орбиты

<u>Второй закон Кеплера</u> (1609 г.):

радиус-вектор планеты описывает в равные промежутки времени равные площади. Рис. 81 иллюстрирует второй закон Кеплера.

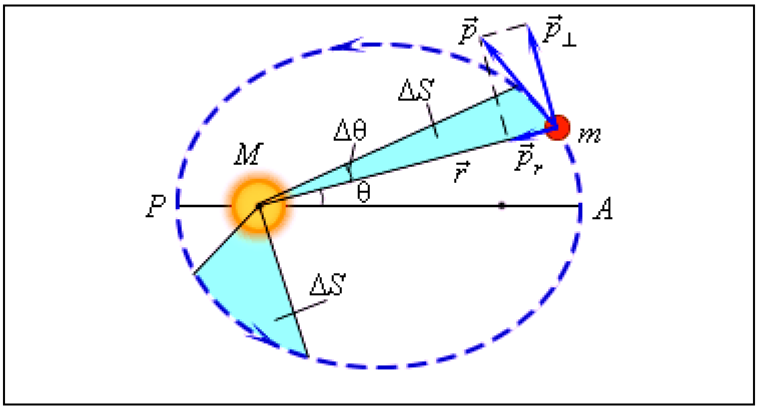


Рис. 81. Закон площадей – второй закон Кеплера

Второй закон Кеплера эквивалентен закону сохранения момента импульса. На рис. 81 изображен вектор импульса тела $\vec{p}$ и его составляющие $\vec{p}_r$ и $\vec{p}_\perp$. Площадь, заметенная радиус-вектором за малое время Δt, приближенно равна площади треугольника с основанием $r\Delta\theta$ и высотой r:

$$\Delta S = \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\Delta\theta \text{ или } \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\omega;\ (\Delta t\to 0) \qquad (157),$$

здесь $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t};\ (\Delta t\to 0)$ – угловая скорость.

Момент импульса L по абсолютной величине равен произведению модулей векторов $\vec{p}_\perp$ и $\vec{r}$

$$L = r\cdot p_\perp = r\cdot(m\cdot\upsilon_\perp) = m\cdot r^2\cdot\omega \qquad (158),$$

так как $\upsilon_\perp = r\cdot\omega$.

Из этих отношений следует:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{L}{2 \cdot m}; \ (\Delta t \to 0) \qquad (159).$$

Поэтому, если по второму закону Кеплера $\frac{\Delta S}{\Delta t} = const$ то и момент импульса L при движении остается неизменным.

В частности, поскольку скорости планеты в перигелии $\vec{\upsilon}_P$ и афелии $\vec{\upsilon}_A$ направлены перпендикулярно радиус-векторам $\vec{r}_P$ и $\vec{r}_A$ из закона сохранения момента импульса следует:

$$r_P \cdot \upsilon_P = r_A \cdot \upsilon_A \qquad (160).$$

<u>Третий закон Кеплера</u> <u>(1619 г.):</u>

квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит:

$$\frac{T^2}{a^3} = const \quad \text{или} \quad \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \qquad (161).$$

Третий закон Кеплера выполняется для всех планет Солнечной системы с точностью выше 1 %.

На рис. 82 изображены две орбиты, одна из которых круговая с радиусом R, а другая – эллиптическая с большой полуосью a. Третий закон утверждает, что если $R = a$, то периоды обращения тел по этим орбитам одинаковы.

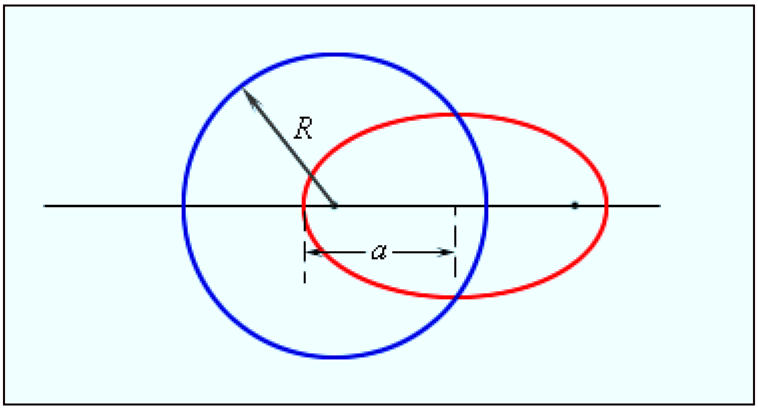


Рис. 82. Круговая и эллиптическая орбиты

Закон всемирного тяготения

Несмотря на то, что законы Кеплера явились важнейшим этапом в понимании движения планет, они все же оставались только эмпирическими правилами, полученными из астрономических наблюдений. Законы Кеплера нуждались в теоретическом обосновании. Решающий шаг в этом направлении был сделан Исааком Ньютоном, открывшим в 1682 году **закон всемирного тяготения**.

Между любыми двумя телами (материальными точками) действует сила взаимного притяжения, пропорциональная произведению масс этих тел (m_1 и m_2) и обратно пропорциональная квадрату расстояния (r) между ними:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (162),$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² – гравитационная постоянная.

Гравитационные силы это силы притяжения, они направлены по линии, соединяющей центры масс (рис. 83). У тела в виде однородного шара центр масс совпадает с центром шара.

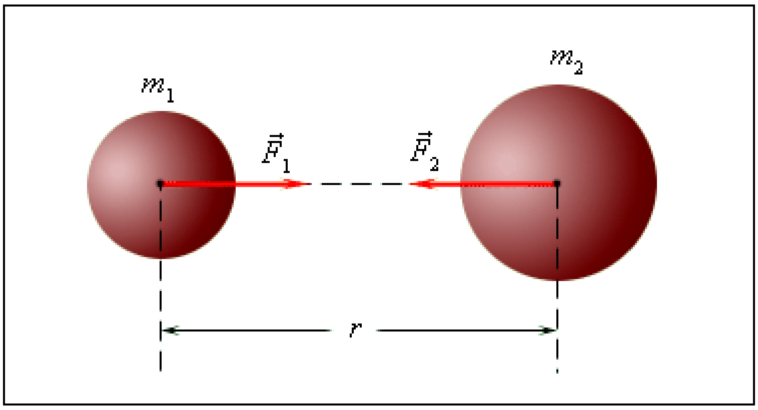
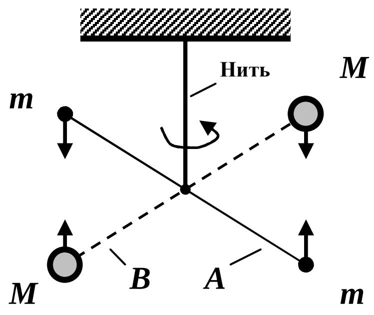


Рис.83. Гравитационные силы притяжения между телами

На законе всемирного тяготения основывается один из центральных разделов астрономии — небесная механика. Мы ощущаем силу притяжения к Земле, однако притяжение малых тел друг к другу неощутимо. Требовалось экспериментально доказать справедливость закона всемирного тяготения и для обычных тел. **Генри Кавендиш показал, что не только небесные тела, но и обычные, окружающие нас малые тела притягиваются друг к другу по тому же закону**. Принципиальная схема **опыта Кавендиша** с применением крутильных весов приведена на рис. 84.

Лёгкое коромысло A с двумя одинаковыми шариками m = 729 г подвешено на упругой нити. На коромысле B укреплены на той же высоте массивные шары массой M = 158 кг. Поворачивая коромысло В вокруг вертикальной оси, можно измерять расстояние между шарами с массами m и M. Под действием пары сил, приложенных к шарам m со стороны шаров M, коромысло A поворачивается в горизонтальной



плоскости, – закручивая нить до тех пор, пока момент сил упругости не уравновесит момент сил тяготения. Зная упругие свойства нити, по измеренному углу попорота можно найти возникающие силы притяжения, а так как массы шаров известны, то и вычислить значение G.

Рис.84. Крутильные весы

Согласно закону всемирного тяготения и вычисленному значению G ($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2), два точечных тела массой по 1 кг, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, притягиваются с силой $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н. Это означает, что сила гравитационного взаимодействия значительна только в случае больших масс.

Ньютон первый высказал мысль о том, что гравитационные силы определяют не только движение планет Солнечной системы, они действуют между любыми телами Вселенной. В частности, сила тяжести, действующая на тела вблизи поверхности Земли, имеет гравитационную природу. Действием сил всемирного тяготения объясняются движение планет в Солнечной системе, движение искусственных спутников Земли, траектории полета баллистических ракет и т.д.

Для круговых орбит первый и второй закон Кеплера выполняются автоматически, а третий закон утверждает, что $T^2 \sim R^3$, где T – период обращения, R – радиус орбиты. Отсюда можно получить зависимость гравитационной силы от расстояния. При движении планеты по круговой траектории на неё действует центростремительная сила, которая возникает за счет гравитационного взаимодействия планеты и Солнца:

$$F \sim \omega^2 \cdot R = \frac{(2 \cdot \pi)^2 \cdot R}{T^2} \qquad (163).$$

Если $T^2 \sim R^3$, то $F \sim \dfrac{1}{R^2}$.

Гравитационное поле. Ускорение свободного падения

Гравитационное поле (поле тяготения) – поле, посредством которого осуществляется гравитационное взаимодействие между телами. Это поле порождается телами и является формой существования материи.

Тяготение принадлежит к особой группе взаимодействий. Сила тяготения, например, не зависит от того, в какой среде взаимодействующие тела находятся. Тяготение существует в вакууме.

Обобщённый закон Галилея: все тела в одном и том же поле тяготения падают с одинаковым ускорением (ускорением свободного падения).

Согласно обобщённому закону Галилея, в данном месте Земли ускорение свободного падения одинаково для всех тел. Оно изменяется вблизи поверхности Земли с широтой в пределах от 9,780 м/с^2 на экваторе до 9,832 м/с^2 на полюсах.

Это обусловлено суточным вращением Земли вокруг своей оси, с одной стороны, и сплюснутостью Земли – с другой (экваториальный и полярный радиусы Земли равны соответственно 6378 км и 6357 км). При решении практических задач применяется, что g = 9,81 м/с^2.

Если пренебречь суточным вращением Земли и высотой расположения тела над Землёй ($h << R_З$) то можно воспользоваться связью между силой тяжести и силой тяготения

$$m \cdot g = \frac{G \cdot m \cdot M}{R_З^2} \qquad (164).$$

Из (164) $\Rightarrow$ $g = G \cdot \dfrac{M}{R_З^2}$ (165).

Сила тяжести направлена к центру Земли. В отсутствие других сил тело свободно падает на Землю с ускорением свободного падения. Среднее значение ускорения свободного падения для различных точек поверхности Земли равно 9,81 м/с^2. Зная ускорение свободного падения и радиус Земли ($R_З$ = 6,38·10^6 м), можно вычислить массу Земли M:

$$M = \frac{g \cdot R_З^2}{G} = 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ кг}.$$

При удалении от поверхности Земли сила земного тяготения и ускорение свободного падения изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния r до центра Земли. Рис. 85 иллюстрирует изменение силы тяготения, действующей на космонавта в космическом корабле при его удалении от Земли. Сила, с которой космонавт притягивается к Земле вблизи ее поверхности, принята равной 700 Н.

Примером системы двух взаимодействующих тел может служить система Земля – Луна. Луна находится от Земли на расстоянии $r_Л$ = 3,84·10^6 м. Это расстояние приблизительно в 60 раз превышает радиус Земли $R_З$.

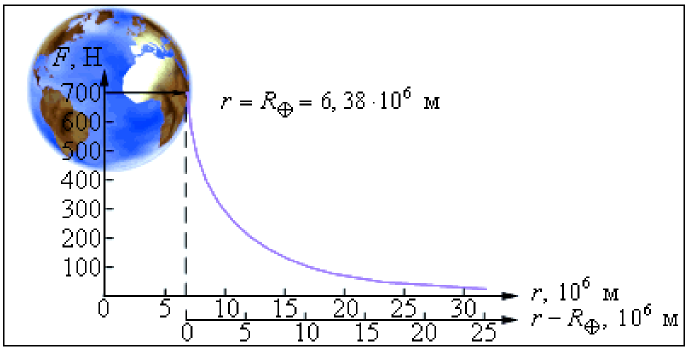


Рис. 85. Изменение силы тяготения, действующей на космонавта при удалении от Земли

Следовательно, ускорение свободного падения $a_Л$, обусловленное земным притяжением, на орбите Луны составляет

$$a_Л = g \cdot (\frac{R_З}{r_Л})^2 = \frac{9{,}81\, м/с^2}{60^2} = 0{,}0027\ м/с^2.$$

С таким ускорением, направленным к центру Земли, Луна движется по орбите. Следовательно, это ускорение является центростремительным ускорением. Его можно рассчитать по кинематической формуле для центростремительного ускорения:

$$a_Л = \frac{\upsilon^2}{r_Л} = \frac{(2 \cdot \pi \cdot r_Л)^2}{r_Л \cdot r_Л \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_Л}{T^2} = 0{,}0027\ м/с^2,$$

где T = 27,3 сут – период обращения Луны вокруг Земли. Совпадение результатов расчетов, выполненных разными способами, подтверждает предположение Ньютона о единой природе силы, удерживающей Луну на орбите, и силы тяжести.

Собственное гравитационное поле Луны определяет ускорение свободного падения $g_Л$ на ее поверхности. Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а ее радиус приблизительно в 3,7 раза меньше радиуса Земли. Поэтому ускорение $g_Л$ определится выражением:

$$g_Л = G \cdot \frac{M_Л}{R_Л^2} = G \cdot \frac{M_З}{T_З^2} \cdot \frac{3{,}7^2}{81} = 0{,}17 \cdot g = 1{,}66\ \text{м/с}^2.$$

Человек в таких условиях может совершать гигантские прыжки. Например, если человек в земных условиях подпрыгивает на высоту 1 м, то на Луне он мог бы подпрыгнуть на высоту более 6 м.

Характеристики гравитационного поля. Космические скорости

Напряжённость гравитационного поля (силовая, векторная характеристика поля) – физическая величина, определяемая силой, действующей со стороны поля на материальную точку единичной массы; совпадает по направлению с действующей силой

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (166).$$

$[g]$ 1 Н/кг = 1 м/с^2. 1 ньютон на килограмм – напряжённость гравитационного поля, которое на тело массой 1 кг действует с силой 1 Н. Размерность $\vec{g}$ совпадает с размерностью ускорения.

Центральное поле тяготения – поле, во всех точках которого векторы напряжённости направлены вдоль прямых, пересекающихся в одной точке (A), неподвижной по отношению к какой-либо инерциальной системе отчёта (рис. 86).

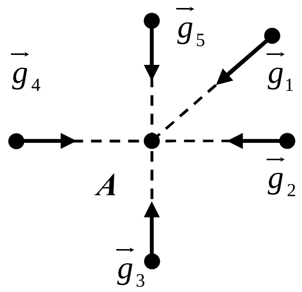


Рис. 86. Центральное поле тяготения

Линии напряжённости поля тяготения (силовые линии) – линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряжённости $\vec{g}$. Линиям напряжённости приписывается направление, совпадающее с вектором $\vec{g}$.

Работа в гравитационном поле

Работа по перемещению тела массой m в поле тяготения на расстоянии dR (рис. 87)

$$dA = -G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} dR \quad (167).$$

Знак минус появляется потому, что сила ($F = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}$) и перемещение противоположны по направлению.

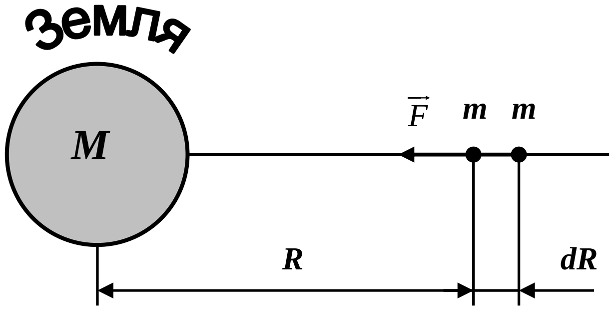


Рис. 87. Перемещение тела массой m в поле тяготения

Работа при перемещении тела с расстояния R_1 до расстояния R_2

$$A = \int_{R_1}^{R_2} dA = -\int_{R_1}^{R_2} G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} dR = m \cdot \left(\frac{G \cdot M}{R_2} - \frac{G \cdot M}{R_1}\right) \qquad (168),$$

где M – масса Земли.

Затраченная работа в гравитационном поле не зависит от траектории перемещения, а определяется лишь начальным и конечным положениями тела, то есть **силы тяготения консервативны, а поле тяготения является потенциальным.**

Потенциал гравитационного поля

Потенциальная энергия тела массой m в гравитационном поле

$$E_p = -G \cdot \frac{m \cdot M}{R} \qquad (169).$$

Работа, совершаемая гравитационными силами, равна изменению потенциальной энергии системы, взятому со знаком минус ($A = -\Delta E_p = -(E_{p2} - E_{p1}) = E_{p1} - E_{p2}$). Тогда, учитывая выражение для A (168) имеем

$$E_{p1} - E_{p2} = -m \cdot \left(\frac{G \cdot M}{R_1} - \frac{G \cdot M}{R_2}\right) \qquad (170).$$

При $R_2 \to \infty$ потенциальная энергия $E_{p2} \to 0$. Первая точка выбрана произвольно, получаем записанное выражение.

Потенциал гравитационного поля – физическая величина, определяемая потенциальной энергией тела единичной массы в данной точке поля или работой по перемещению единичной массы из данной точки в бесконечность

$$\varphi = \frac{E_p}{m} \qquad (171).$$

Потенциал гравитационного поля – энергетическая скалярная характеристика.

$[\varphi]$ 1 Дж/кг. 1 джоуль на килограмм – потенциал такой точки гравитационного поля, в которой тело массой 1 кг обладает потенциальной энергией 1 Дж.

Потенциал поля тяготения, создаваемого телом массой M

$$\varphi = -\frac{G \cdot M}{R} \qquad (172),$$

где G – гравитационная постоянная; R – расстояние от этого тела до рассматриваемой точки.

Потенциальная энергия тела на высоте $h << R_0$ (R_0 – радиус Земли)

$$E_p = m \cdot g \cdot h \qquad (173).$$

Действительно, исходя из представлений теории тяготения:

$$E_p = \frac{G \cdot m \cdot M}{R_0 + h} - (-\frac{G \cdot m \cdot M}{R_0}) = \frac{G \cdot m \cdot M \cdot h}{R_0 \cdot (R_0 + h)},$$

так как $P = \dfrac{G \cdot m \cdot M}{R_0^2}$ и $g = \dfrac{P}{m} = \dfrac{G \cdot M}{R_0^2}$, то с учётом $h \ll R_0$, получаем

$$E_p = \frac{m \cdot G \cdot M \cdot h}{R_0^2} = m \cdot g \cdot h .$$

Напряжённость как градиент потенциала

При перемещении тела массой m на расстоянии dR совершается работа $dA = G \cdot \dfrac{m \cdot M}{R^2} dR$ и $\varphi = \dfrac{G \cdot M}{R}$. Тогда $dA = -md\varphi$. Учитывая что $dA = Fdl = m \cdot gdl$, получаем $m \cdot gdl = -md\varphi$ или $g = -\dfrac{d\varphi}{dl}$. Величина $\dfrac{d\varphi}{dl}$ характеризует изменение потенциала на единицу длины в направлении перемещения в поле тяготения.

$$\vec{g} = -grad\varphi \qquad (174).$$

Знак минус указывает на то, что вектор напряжённости $\vec{g}$ направлен в сторону убывания потенциала ($grad\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \vec{k}$ – градиент скаляра φ).

Для графического изображения распределения потенциала используют эквипотенциальные поверхности. **Эквипотенциальные поверхности** – поверхности, во всех точках которых потенциал φ гравитационного поля имеет одно и то же значение.

Космические скорости

Космические скорости – скорости для достижения определённых космических орбит (рис. 88).

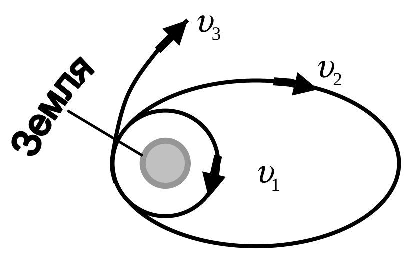


Рис. 88. Космические скорости

Первая космическая скорость – минимальная скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться по круговой орбите, то есть превратиться в искусственный спутник Земли.

На спутник, движущийся по круговой орбите радиусом r, действует сила тяготения Земли, сообщающая ему нормальное ускорение $\frac{\upsilon_1^2}{r}$.

По второму закону Ньютона $\frac{G\cdot m\cdot M}{r^2}=\frac{m\cdot\upsilon_1^2}{r}$ $(*)$. Если спутник движется вблизи поверхности Земли $r\approx R_0$ (R_0 – радиус Земли). $m\cdot g=G\cdot\frac{m\cdot M}{R_0^2}\Rightarrow g=G\cdot\frac{M}{R_0^2}$ $(**)$. Тогда у поверхности земли из $(*)$ и $(**)$

$$\upsilon_1=\sqrt{g\cdot R_0} \qquad (175).$$

$\upsilon_1=7{,}9$ км/с.

Вторая космическая скорость – наименьшая скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли и стать искусственным спутником Солнца, то есть, чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала параболической.

Чтобы тело (при отсутствии сопротивления среды) могло преодолеть земное притяжение и уйти в космическое пространство, его кинетическая энергия должна быть равна работе, совершаемой против сил тяготения: $\frac{m\cdot\upsilon_2^2}{2}=\int_{R_0}^{\infty}G\cdot\frac{m\cdot M}{r^2}dr=G\cdot\frac{m\cdot M}{R_0}$, откуда

$$\upsilon_2=\sqrt{2\cdot g\cdot R_0} \qquad (176).$$

$\upsilon_2=11{,}2$ км/с.

Третья космическая скорость – скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца.

$\upsilon_3=16{,}7$ км/с.

16,7 км/с – это минимальное значение третьей космической скорости. Величина третьей космической скорости зависит от выбора направления запуска тела и лежит в пределах $(16{,}7-73)$ км/с.

Элементы гидро- и аэродинамики

Движение жидкостей или газов представляет собой сложное явление. Для его описания используются различные упрощающие предположения (модели). В простейшей модели жидкость (или газ) предполагаются несжимаемыми и идеальными (то есть без внутреннего трения между движущимися слоями).

Молекулы газа, совершая беспорядочное, хаотическое движение, не связаны или слабо связаны силами взаимодействия, поэтому они движутся свободно и в результате соударений стремятся разлететься во все стороны, заполняя весь предоставленный им объём, то есть объём газа определяется объёмом того сосуда, который газ занимает.

Жидкость же, имея определённый объём, принимает форму того сосуда, в который она заключена. Но и в жидкостях в отличие от газов среднее расстояние между молекулами остаётся постоянным, поэтому жидкость обладает практически неизменным объёмом.

В ряде механических явлений поведение жидкостей и газов определяется одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями. Поэтому пользуются единым термином «жидкость». Жидкость или газ, зависимостью плотностей которых от давления в данной задаче можно пренебречь называют **несжимаемой жидкостью**.

Давление в жидкости – физическая величина, определяемая силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади поверхности в перпендикулярном к поверхности направлении (рис.89)

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S} \qquad (177).$$

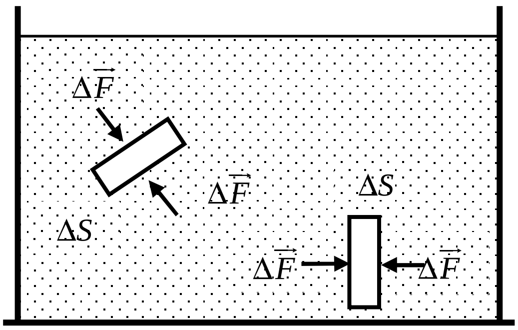


Рис.89. Давление в жидкости

$[p]$ 1 Па. 1 Па = 1 Н/м^2.

1 паскаль равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределённой по нормали к ней поверхности площадью 1 м^2.

Закон Паскаля: давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причём давление одинаково передаётся по всему объёму, занятому покоящейся жидкостью (рис. 90).

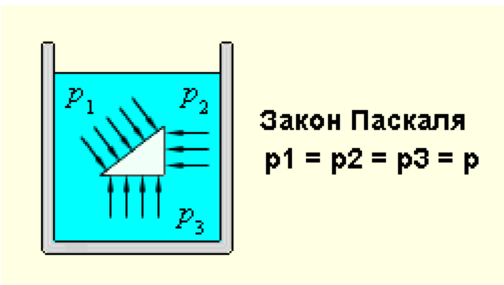


Рис.90. К закону Паскаля

Применение закона Паскаля (гидравлический подъёмник)

В данном случае небольшая сила $\vec{F}_1$ преобразуется в значительную силу $\vec{F}_2$ благодаря тому, что площадь второго поршня S_2 больше первого поршня S_1 (рис.91), то есть $p_1 = p_2$; $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow$

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} \cdot F_1 \qquad (178).$$

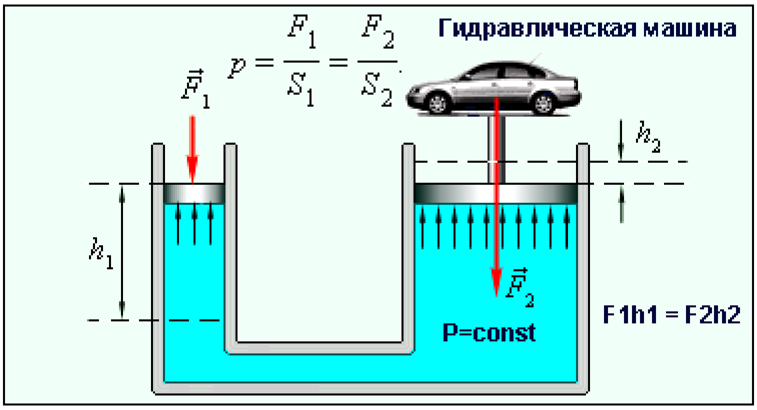


Рис. 91. Гидравлический подъёмник

Закон Архимеда: на тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа)

$$F_A = \rho \cdot g \cdot V \qquad (179),$$

где ρ – плотность жидкости, V – объём погруженной в жидкость части тела (рис. 92).

Гидростатическое давление

При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, иначе не было бы равновесия. Поэтому свободная поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда. Если жидкость несжимаема, то её плотность не зависит от давления.

Рис.92. К закону Архимеда

Тогда при поперечном сечении S столба жидкости, его высота h и плотности ρ вес $P = \rho \cdot g \cdot S \cdot h$, а давление на нижнее основание $p = \dfrac{P}{S} = \dfrac{\rho \cdot g \cdot S \cdot h}{S}$, то есть, давление изменяется линейно с высотой (рис. 93)

$$p = \rho \cdot g \cdot h \qquad (180).$$

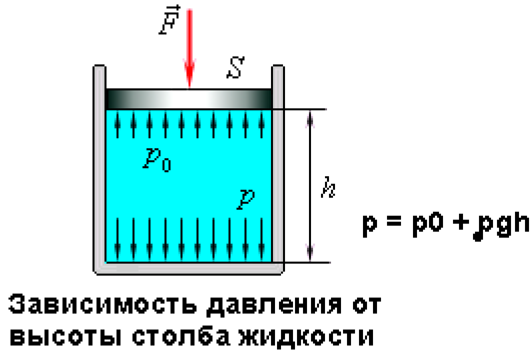


Рис. 93. Зависимость давления от высоты столба жидкости

Уравнение неразрывности

Течение – движение жидкости.

Поток – совокупность частиц в движущейся жидкости.

Линия тока – линия, в каждой точке которой касательная к ней совпадает по направлению с вектором скорости в данный момент времени. Линии тока используются для графического изображения движения жидкости (рис. 94).

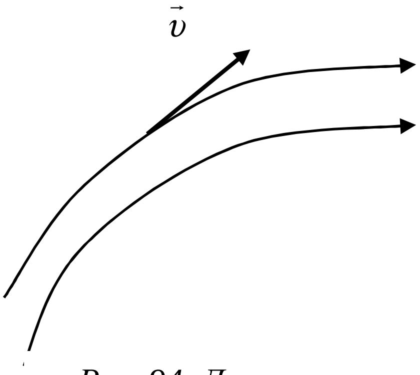


Рис. 94. Линии тока

Линии тока проводятся так, чтобы густота их, характеризуемая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, была бы больше там, где больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость течёт медленнее. По картине линий тока можно судить о направлении и модуле скорости в разных точках пространства, то есть можно определить состояние движения жидкости.

Трубка тока – часть жидкости, ограниченная линиями тока. **Установившееся, стационарное течение** – течение жидкости, при котором форма и расположение линий тока, а также значение скоростей в каждой её точке со временем не изменяются.

<u>Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости</u>

$$S_1 \cdot \upsilon_1 = S_2 \cdot \upsilon_2 \qquad (181),$$

или

$$S \cdot \upsilon = const \qquad (181^*).$$

Произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока.

Уравнение Бернулли

При движении идеальной жидкости не происходит превращения механической энергии во внутреннюю энергию, поэтому выполняется закон сохранения механической энергии. Следствием этого закона для стационарного потока идеальной и несжимаемой жидкости является уравнение Бернулли, сформулированное в 1738 г. Стационарным принято называть такой поток жидкости, в котором не образуются вихри. В стационарном потоке частицы жидкости перемещаются по неизменным во времени траекториям, которые называются линиями тока. Опыт показывает, что стационарные потоки возникают только при достаточно малых скоростях движения жидкости.

Рассмотрим стационарное движение идеальной несжимаемой жидкости по трубе переменного сечения (рис. 95). Различные части трубы могут находиться на разных высотах.

За промежуток времени Δt жидкость в трубе сечением S_1 переместится на $l_1 = \upsilon_1 \cdot \Delta t$, а в трубе сечением S_2 – на $l_2 = \upsilon_2 \cdot \Delta t$, где υ_1 и υ_2 – скорости частиц жидкости в трубах. Условие несжимаемости записывается в виде:

$$\Delta V = l_1 \cdot S_1 = l_2 \cdot S_2 \qquad (182)$$

или

$$\upsilon_1 \cdot S_1 = \upsilon_1 \cdot S_1 \qquad (182^*).$$

Здесь ΔV – объем жидкости, протекшей через сечения S_1 и S_2.

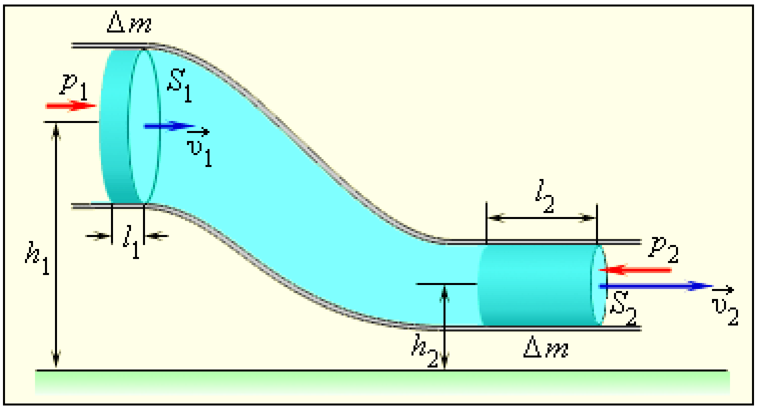


Рис. 95. Течение идеальной жидкости по трубе переменного сечения

Таким образом, при переходе жидкости с участка трубы с большим сечением на участок с меньшим сечением скорость течения возрастает, то есть жидкость движется с ускорением. Следовательно, на жидкость действует сила. В горизонтальной трубе эта сила может возникнуть только из-за разности давлений в широком и узком участках трубы. Давление в широком участке трубы должно быть больше чем в узком участке. Если участки трубы расположены на разной высоте, то ускорение жидкости вызывается совместным действием силы тяжести и силы давления. Сила давления – это упругая сила сжатия жидкости. Несжимаемость жидкости означает лишь то, что появление упругих сил происходит при пренебрежимо малом изменении объема любой части жидкости.

Так как жидкость предполагается идеальной, то она течет по трубе без трения. Поэтому к её течению можно применить закон сохранения механической энергии.

При перемещении жидкости силы давления совершают работу

$$\Delta A = p_1 \cdot S_1 \cdot l_1 - p_2 \cdot S_2 \cdot l_2 = p_1 \cdot S_1 \cdot \upsilon_1 \cdot \Delta t - p_2 \cdot S_2 \cdot \upsilon_2 \cdot \Delta t = (p_1 - p_2) \cdot \Delta V \qquad (183).$$

Работа ΔA сил давления равна изменению потенциальной энергии упругой деформации жидкости, взятому с обратным знаком.

Изменения, произошедшие за время Δt в выделенной части жидкости, заключенной между сечениями S_1 и S_2 в начальный момент времени, при стационарном течении сводятся к перемещению массы жидкости $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$ (ρ – плотность жидкости) из одной части трубы сечением S_1 в другую часть сечением S_2 (заштрихованные объемы на рис. 95). Закон сохранения механической энергии для этой массы имеет вид

$$E_2 - E_1 = \Delta A = (p_1 - p_2) \cdot \Delta V \qquad (184),$$

где E_1 и E_2 – полные механические энергии массы Δm в поле тяготения.

$$E_1 = \frac{\Delta m \cdot \upsilon_1^2}{2} + \Delta m \cdot g \cdot h_1; \quad E_2 = \frac{\Delta m \cdot \upsilon_2^2}{2} + \Delta m \cdot g \cdot h_2 \qquad (185).$$

Отсюда следует:

$$\frac{\rho \cdot \upsilon_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_1 + p_1 = \frac{\rho \cdot \upsilon_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_2 + p_2 \qquad (186).$$

Это и есть уравнение Бернулли. Из него следует, что сумма $\frac{\rho \cdot \upsilon^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h + p = const$ остается неизменной вдоль всей трубы.

В частности, для горизонтально расположенной трубы ($h_1 = h_2$) уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{\rho \cdot \upsilon^2}{2} + p = const \qquad (187).$$

Величина р – статическое давление в жидкости. Оно может быть измерено с помощью манометра, перемещающегося вместе с жидкостью. Практически давление в разных сечениях трубы измеряется с помощью манометрических трубок, вставленных через боковые стенки в поток жидкости, так чтобы нижние концы трубок были параллельны скоростям частиц жидкости (рис. 96). Из уравнения Бернулли следует:

давление в жидкости, текущей по горизонтальной трубе переменного сечения, больше в тех сечениях потока, в которых скорость ее движения меньше, и наоборот, давление меньше в тех сечениях, в которых скорость больше.

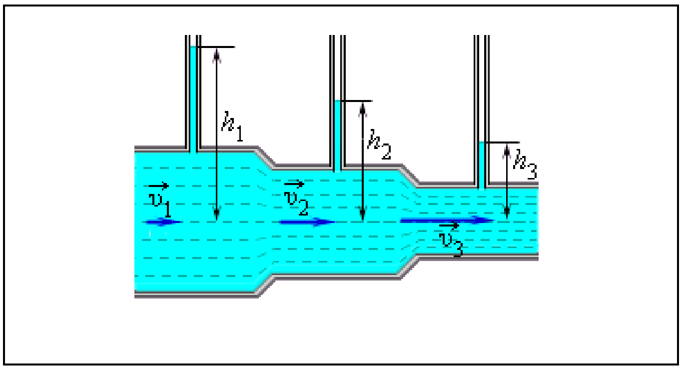


Рис. 96. Измерение давления в потоке жидкости с помощью манометров: $\upsilon_1 < \upsilon_2 < \upsilon_3$; $h_1 > h_2 > h_3$

Если сечение потока жидкости достаточно велико, то уравнение Бернулли следует применять к линиям тока, то есть линиям, вдоль которых перемещаются частицы жидкости при стационарном течении. Например, при истечении идеальной несжимаемой жидкости из отверстия в боковой стенке или дне широкого сосуда линии тока начинаются вблизи свободной поверхности жидкости и проходят через отверстие (рис. 97).

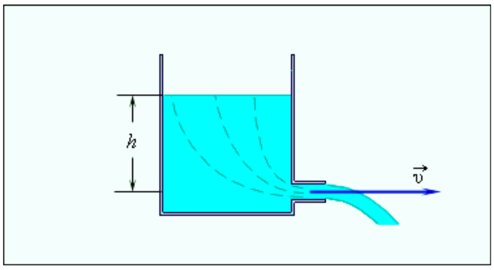


Рис. 97. Истечение жидкости из широкого сосуда

Поскольку скорость жидкости вблизи поверхности в широком сосуде пренебрежимо мала, то уравнение Бернулли принимает вид

$$\rho \cdot g \cdot h + p_0 = \frac{\rho \cdot \upsilon^2}{2} + p_0 \qquad (188),$$

где p_0 – атмосферное давление, h – перепад высоты вдоль линии тока. Таким образом,

$$\upsilon = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \qquad (189).$$

Это выражение для скорости истечения называют **формулой Торричелли. Скорость истечения идеальной жидкости из отверстия в сосуде такая же, как и при свободном падении тела с высоты h без начальной скорости.**

Самостоятельно: Измерение давлений: трубка Пито, трубка Прандтля, трубка Вентури. Применение уравнения Бернулли: водоструйный насос.

Вязкость

Вязкость (внутреннее трение) – свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой.

При перемещении одних слоёв реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоёв. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. Со стороны же слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

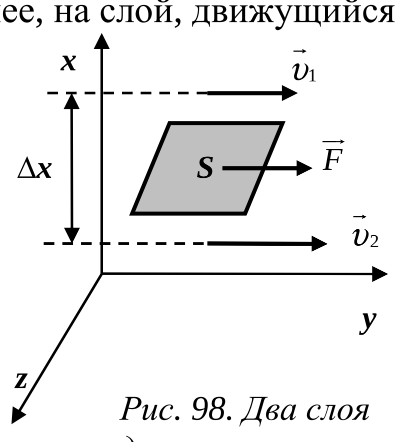


Рис. 98. Два слоя жидкости, отстоящие друг от друга на Δx

Направление, в котором отсчитывается расстояние между слоями, перпендикулярно скорости течения слоёв (рис. 98). Градиент скорости $\frac{\Delta \upsilon}{\Delta x}$ – величина, показывающая, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении x, перпендикулярном направлению движения слоёв.

Сила внутреннего трения

$$F = \eta \cdot \left| \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} \right| \cdot S \qquad (190).$$

Сила внутреннего трения тем больше, чем больше рассматриваемая площадь поверхности слоя S (рис. 98), и зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слоя к слою.

Динамическая вязкость

$$\eta = \frac{F}{\left|\frac{\Delta \upsilon}{\Delta x}\right| \cdot S} \qquad (191),$$

определяется силой внутреннего трения, действующей на единицу поверхности слоя жидкости при наличии градиента скорости, равного единице.

$[\eta]$ 1 Па·с = 1 Н·с/м^2. 1 паскаль-секунда равен динамической вязкости среды, в которой при ламинарном течении и градиенте скорости с модулем, равным 1 м/с на 1 м, возникает сила внутреннего трения 1 Н на 1 м^2 поверхности касания слоёв.

Характер зависимости вязкости η от температуры для газов и жидкостей различен (для жидкостей η с увеличением температуры уменьшается, у газов, наоборот увеличивается), что указывает на различие в них механизмов внутреннего трения. Сильно от температуры зависит вязкость масел (вязкость касторового масла в интервале температур от 18 – 40 ^{o}С уменьшается в 4 раза). Например, жидкий гелий при T = 2,17 К переходит в сверхтекучее состояние, в котором его вязкость равна нулю (открытие П.Л. Капицы).

Ламинарное и турбулентное течения

Ламинарное (слоистое) течение – течение, при котором вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними.

Турбулентное (вихревое) течение – течение, при котором вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание слоёв движущейся жидкости (газа).

При таком течении скорость частиц жидкости быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно. Поэтому профиль скорости при турбулентном течении в трубах (рис. 99) отличается от параболического профиля при ламинарном течении более быстрым возрастанием скорости у стенок трубы и меньшей кривизной в центральной части течения.

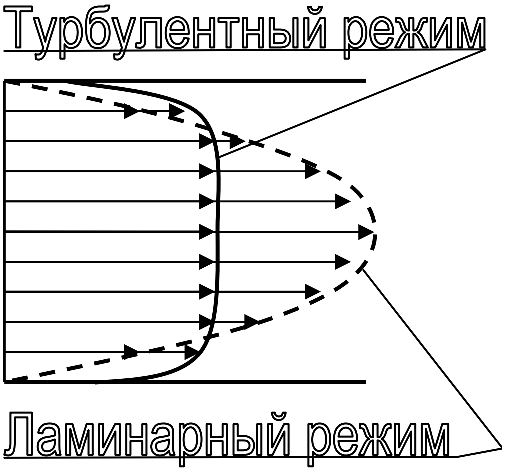


Рис. 99. Профили скорости при течении в трубе

Число Рейнольдса – безразмерная величина, определяющая характер течения жидкости

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \cdot \langle v \rangle \cdot d}{\eta} = \frac{\langle v \rangle \cdot d}{\nu} \qquad (192),$$

где $\nu = \eta / \rho$ – кинематическая вязкость; ρ – плотность жидкости; $\langle v \rangle$ – средняя по сечению трубы скорость жидкости; d – характерный линейный размер, например диаметр трубы.

При малых значениях числа Рейнольдса ($\mathrm{Re} \le 1000$) наблюдается ламинарное течение; при $1000 \le \mathrm{Re} \le 2000$ происходит переход к турбулентному течению; при $\mathrm{Re} = 2300$ (для гладких труб) течение – турбулентное. При одинаковых Re режим течения различных жидкостей (газов) в трубах разных сечений одинаков.

Методы определения вязкости
Метод Стокса

Метод Стокса – метод, основанный на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.

На шарик, падающий в жидкости вертикально вниз, действуют: сила тяжести, сила Архимеда и сила сопротивления (рис. 100).

Сила тяжести

$$m \cdot g = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot g \qquad (193).$$

Сила Архимеда

$$F_A = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho' \cdot g \qquad (194).$$

Сила сопротивления (установлена опытным путём)

$$F = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \qquad (195).$$

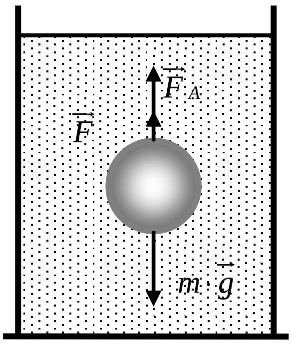


Рис. 100. Шарик, падающий в жидкости

В формулах (193 – 195):
ρ – плотность шарика;
r – радиус шарика;
$\rho^/$ – плотность жидкости;
g – ускорение свободного падения;
υ – скорость шарика.

При равномерном движении шарика $m\cdot g = F + F_A$ или

$$\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3\cdot\rho\cdot g = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3\cdot\rho^/\cdot g + 6\cdot\pi\cdot\eta\cdot r\cdot\upsilon,$$ откуда

$$\upsilon = \frac{2(\rho-\rho^/)\cdot g\cdot r^2}{9\cdot\eta} \qquad (196).$$

Измерив, скорость равномерного движения шарика, можно определить вязкость. Самостоятельно рассмотреть: метод Пуазейля.

Подъёмная сила крыла самолёта

Уравнение Бернулли можно применять к достаточно широкому классу задач аэродинамики. Одной из таких задач является изучение сил, действующих на крыло самолета. Строгое теоретическое решение этой задачи чрезвычайно сложно (обычно для исследования сил применяются экспериментальные методы). Уравнение Бернулли позволяет дать лишь качественное объяснение возникновению подъемной силы крыла. На рис. 101 изображены линии тока воздуха при обтекании крыла самолета. Из-за специального профиля крыла и наличия угла атаки, то есть угла наклона крыла по отношению к набегающему потоку воздуха, скорость воздушного потока над крылом оказывается больше, чем под крылом. Поэтому на рис. 101 линии тока над крылом располагаются ближе друг к другу, чем под крылом. Из уравнения Бернулли следует, что **давление в нижней части крыла будет больше, чем в верхней**. В результате появляется сила $\vec{F}$, действующая на крыло. **Вертикальная составляющая $\vec{F}_y$ этой силы называется подъемной силой**. Подъемная сила позволяет скомпенсировать силу тяжести, действующую на самолет, и тем самым она обеспечивает возможность полета тяжелых летательных аппаратов в воздухе. Горизонтальная составляющая $\vec{F}_x$ представляет собой силу сопротивления среды.

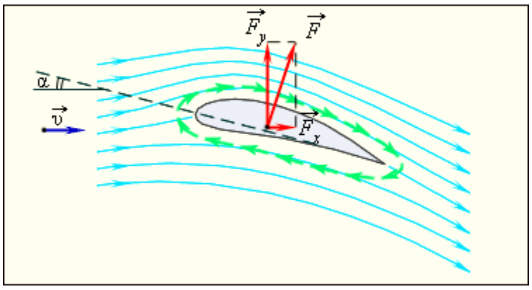


Рис. 101. Линии тока при обтекании крыла самолета и возникновение подъемной силы; α – угол атаки

Теория подъемной силы крыла самолета была создана Н.Е. Жуковским. Он показал, что при обтекании крыла существенную роль играют силы вязкого трения в поверхностном слое. В результате их действия возникает круговое движение (циркуляция) воздуха вокруг крыла (зеленые стрелки на рис. 102). В верхней части крыла, скорость циркулирующего воздуха складывается со скоростью набегающего потока, в нижней части эти скорости направлены в противоположные стороны. Поэтому возникает разность давлений и появляется подъемная силы.

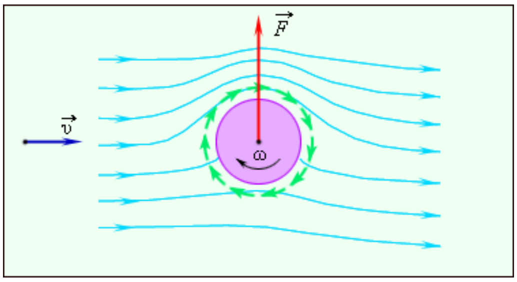


Рис. 102. Обтекание вращающегося цилиндра набегающим потоком воздуха

Циркуляция воздуха, обусловленная силами вязкого трения, возникает и вокруг вращающегося тела (например, цилиндра). При вращении цилиндр увлекает прилегающие слои воздуха, вызывая его циркуляцию. Если такой цилиндр установить в набегающем потоке воздуха, то возникнет сила бокового давления, аналогичная подъемной силе крыла самолета. Это явление называется эффектом Магнуса. Рис. 102 иллюстрирует обтекание вращающегося цилиндра набегающим потоком. Эффект Магнуса проявляется, например, при полете закрученного мяча при игре в теннис или футбол.

Элементы релятивисткой механики

Преобразования Галилея. Механический принцип относительности

Рассмотрим две системы отсчёта, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью υ. Одну из этих систем обозначим буквой K и будем считать условно неподвижной. Тогда вторая система K' будет двигаться прямолинейно и равномерно со скоростью υ. Выберем координатные оси x', y', z' системы K' так, чтобы оси x и x' совпадали, а оси y и y', а также z и z' были параллельны друг другу (рис. 103).

Найдем связь между координатами x, y, z некоторой точки M в системе K и координатами той же точки в системе K'.

За начало отсчета времени выберем момент, когда начало координат обеих систем совпадали.

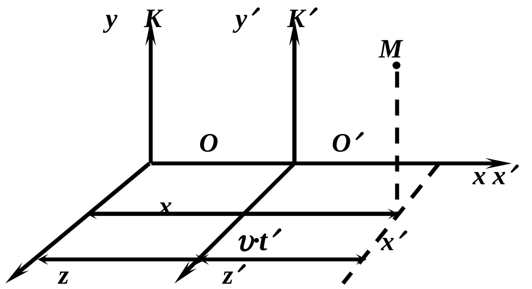


Рис. 103. Системы отсчёта К и К′

Из рис.103 видно, что

$$x = x' + \upsilon t';$$
$$y = y';$$
$$z = z'.$$

Добавим к этим соотношениям принятое в классической механике предположение, что время в обеих системах течет одинаковым образом, то есть $t = t'$, и получим совокупность четырех уравнений, называемых преобразованиями Галилея

$$x = x' + \upsilon t'; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t'. \qquad (197).$$

Продифференцировав соотношения (197) по времени, найдем связь между скоростями точки M по отношению к системам отсчета K и K'

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + \upsilon; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt'} \qquad (198).$$

Обозначим проекции скоростей точки M в системе K на оси x, y, z:

$$\frac{dx}{dt} = u_x, \quad \frac{dy}{dt} = u_y, \quad \frac{dz}{dt} = u_z,$$

в системе K' на оси x',y',z':

$$\frac{dx'}{dt'} = u'_x, \quad \frac{dy'}{dt'} = u'_y, \quad \frac{dz'}{dt'} = u'_z$$

и перепишем соотношения (198) в виде

$$u_x = u'_x + \upsilon; \quad u_y = u'_y; \quad u_z = u'_z. \qquad (199).$$

Три скалярных уравнения (199) эквивалентны векторному соотношению

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{\upsilon}. \qquad (200).$$

Соотношения (199) и (200) выражают классический закон сложения скоростей.

Докажем, что любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы с постоянной скоростью, будет также инерциальной.

Система отсчета, относительно которой тело при компенсации внешних воздействий движется равномерно и прямолинейно (υ = const) называется инерциальной системой отсчета.

Продифференцируем по времени соотношение (200), учитывая, что $\vec{\upsilon} = const$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}'}{dt},$$

получим

$$\vec{a} = \vec{a}' \qquad (201).$$

Отсюда следует, что ускорение какого-либо тела во всех системах отсчета, движущихся относительно друг друга с постоянной скоростью, оказывается одним и тем же.

Если система отсчета *K* инерциальная, то есть ускорение тела a = 0, то и остальные системы *K′* будут инерциальными, то есть a' = 0.

В классической механике считается, что масса материальной точки (тела) не зависит от скорости её движения, то есть, одинакова во всех инерциальных системах отсчета m = m′.

Из второго закона Ньютона имеем

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \vec{a}' = \frac{\vec{F}'}{m}.$$

Так как $\vec{a} = \vec{a}'$, то $\frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}'}{m}$ и

$$\vec{F} = \vec{F}' \qquad (202).$$

Силы, действующие на тело в системе *K* и *K′* так же будут одинаковы, то есть уравнение динамики не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Это означает, что с механической точки зрения все инерциальные системы отсчета совершенно эквивалентны.

Все это позволяет сформулировать **принцип относительности Галилея** или механический принцип относительности в следующем виде: **все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом при одинаковых начальных условиях.**

Неизменность вида уравнения при замене в нём координат и времени одной системы отсчета координатами и временем другой системы называется инвариантностью уравнения.

Так как системы K и K' выбраны произвольно, то можно утверждать, что согласно (201), **ускорение одинаково во всех инерциальных системах отсчета**, то есть является инвариантным относительно преобразований Галилея.

Силы, с которыми взаимодействуют материальные точки (или тела) согласно (202), **также являются инвариантными относительно преобразований Галилея**. Это следует из того, что, во-первых, силы взаимодействия зависят от расстояния между точками, которые в классической механике принимаются одинаковыми во всех системах отсчета, во-вторых, они зависят от относительных скоростей точек, которые одинаковы во всех системах отсчета.

Второй и третий законы Ньютона (при m = const) запишутся следующим образом:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{(для системы } K\text{)};$$

$$\vec{F}' = m \cdot \vec{a}', \quad \vec{F}'_{12} = -\vec{F}'_{21} \quad \text{(для системы } K'\text{)}.$$

Учитывая инвариантность ускорений и сил, можно утверждать, что **уравнения, выражающие второй и третий законы Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея**.

Принцип относительности Галилея можно записать в иной формулировке: никакими механическими опытами, проводимыми в инерциальной системе отсчета, нельзя обнаружить движение этой системы относительно других инерциальных систем.

Механический принцип относительности свидетельствует о том, что в рамках классической механики все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны. Среди них нет какой-то главной, раз и навсегда выделенной абсолютной системы отсчета, движение всех тел относительно которой можно было бы назвать абсолютным движением.

Постулаты специальной теории относительности. Преобразования Лоренца

Для описания движения тел со скоростями υ сравнимыми со скоростью света c используется релятивистская механика, учитывающая требования специальной теории относительности.

Основоположником теории относительности Эйнштейном (1905 г.) был предложен принципиально новый подход к электродинамике движущихся тел. Проанализировав огромный экспериментальный материал, Эйнштейн выбрал два наиболее бесспорных положения и построил на их основе свою теорию.

Эти положения называются **постулатами специальной теории относительности**. Они формулируются следующим образом.

1. В любых инерциальных системах отсчета все физические явления (механические, электромагнитные и другие) при одних и тех же условиях протекают одинаково; иначе говоря, с помощью любых опытов, проведенных в замкнутой системе тел, нельзя обнаружить, покоится эта система или движется равномерно и прямолинейно.

2. Скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источников света; она одинакова во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета, т.е. представляет собой универсальную постоянную.

Первый постулат Эйнштейна выражает **принцип относительности**, являющийся обобщением механического принципа относительности Галилея на любые физические процессы. Его справедливость, как и второго постулата, подтверждают разнообразные опыты.

Принцип относительности можно сформулировать, исходя из понятия инвариантности: **уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы отсчета к другой**.

Эйнштейн показал, что в соответствии с двумя постулатами теории относительности между координатами и временем в двух инерциальных системах отсчета K и K', изображенных на рис. 103 выражаются не преобразованием Галилея (197), а более сложным образом.

Рассмотрим распространение светового сигнала в системе K'. Скорость светового сигнала в этой системе $u'_x = c$. Тогда согласно выражения (199) скорость светового сигнала в системе К окажется равной

$$u = c + \upsilon,$$

то есть превзойдет c, что согласно второго постулата Эйнштейна невозможно. Отсюда вытекает, что преобразования Галилея должны быть заменены другими формулами.

Предположим, что правильное преобразование координат отличает от Галилеевского множителями γ

$$x' = \gamma \cdot (x - \upsilon t);$$
$$x = \gamma \cdot (x' + \upsilon t'). \qquad (203).$$

Для отыскания множителя γ рассмотрим распространение фронта светового сигнала.

Пусть световой сигнал начал свое движение вдоль оси x и x' из начала координат систем K и K' в тот момент времени, когда они совпадали. Тогда соответственно второму постулату Эйнштейна

$$x = c \cdot t, \text{ а } x' = c \cdot t' \qquad (204).$$

Подставив (204) в (203) получим два уравнения:

$$c \cdot t' = \gamma \cdot (c \cdot t - \upsilon t) = \gamma \cdot (c - \upsilon) \cdot t \qquad (205),$$

$$c \cdot t = \gamma \cdot (c \cdot t' + \upsilon t') = \gamma (c + \upsilon) \cdot t'. \qquad (206).$$

Выразим из уравнения (206) время t

$$t = \frac{\gamma \cdot (c + \upsilon) \cdot t'}{c}$$

и подставим в уравнение (205)

$$c \cdot t' = \gamma^2 \cdot \frac{(c^2 - \upsilon^2)}{c} \cdot t',$$

откуда
$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - \upsilon^2},$$

а
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (207).$$

С учетом (207) выражения (203) перепишутся в следующем виде:

$$x' = \frac{x - \upsilon \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}};$$
$$x = \frac{x' + \upsilon \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \qquad (208).$$

В направлении осей y и y' смещение не происходит. Соотношения между y и y' от времени не зависят, так как оси перпендикулярны к вектору относительной скорости.

Следовательно, в направлениях, перпендикулярных к вектору скорости координаты преобразуются тождественно, то есть

$$\begin{matrix} y' = y; & y = y'; \\ z' = z; & z = z'. \end{matrix} \qquad (209).$$

Для нахождения замены преобразования времени решим совместно два уравнения (203):

$$x = \gamma\cdot[\ \gamma(x-\upsilon t+\upsilon t'];\quad \frac{x}{\gamma} = \gamma(x-\upsilon t)+\upsilon t';\quad \frac{x}{\gamma\cdot\upsilon} = \frac{\gamma\cdot x}{\upsilon} - t + t';$$

$$t' = \gamma\cdot\left[t - \frac{x}{\upsilon}\cdot\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)\right],$$

откуда, учитывая, что $\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right) = \frac{\upsilon^2}{c^2}$, получим

$$t' = \gamma\left(t - x\frac{\upsilon}{c^2}\right)$$

или

$$t' = \frac{t - x\cdot\frac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \qquad (210).$$

Объединяя (208), (209), (210), найдем, что преобразования координат и времени при переходе от систем $K \to K'$ и $K' \to K$ будут иметь следующий вид:

$$\text{К} \to \text{К}' \qquad\qquad\qquad \text{К}' \to \text{К}$$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x-\upsilon\cdot t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - x\cdot\frac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (211),\qquad \begin{aligned} x &= \frac{x'+\upsilon\cdot t'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + x'\cdot\frac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (212).$$

Эти преобразования носят название преобразований Лоренца. Они устраняют противоречие преобразований Галилея постоянству скорости света.

Однако это не означает, что преобразования Галилея всегда неверны.

Преобразования Лоренца верны при любых скоростях, как при малых, так и при сколь угодно больших, возможных в природе скоростях.

Но при малых скоростях, где $\frac{\upsilon}{c} \ll 1$, членами, содержащими $\frac{\upsilon^2}{c^2}$ и

$\frac{\upsilon}{c^2}$, можно пренебречь и преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Следовательно, преобразования Галилея являются частным случаем общих преобразований Лоренца.

Особенно важным являются следующие отличия преобразований Лоренца от преобразований Галилея.

В рамках преобразований Галилея расстояния между двумя событиями есть абсолютная величина. Это расстояние не меняется при переходе от одной системы отсчета к другой. То же относится и к промежутку времени между этими событиями. Преобразования Лоренца показывают, что как расстояния, так и промежуток времени меняется при переходе от одной системы отсчета к другой. При этом оказывается, что пространственные и временные отношения не независимы.

Из преобразований Лоренца вытекает ряд необычных с точки зрения классической механики следствий.

Следствия из преобразований Лоренца

1. Одновременность событий в разных системах отсчета

Пусть в системе K (рис. 103) с координатами x_1 и x_2 происходят одновременно два события в момент времени $t_1 = t_2 = b$.

Согласно преобразованиям Лоренца (211), в системе K' этим событиям будут соответствовать координаты

$$x_1' = \frac{x_1 - \upsilon \cdot b}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad x_2' = \frac{x_2 - \upsilon \cdot b}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (213)$$

и моменты времени

$$t_1' = \frac{b - \frac{\upsilon}{c^2} \cdot x_1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad t_2' = \frac{b - \frac{\upsilon}{c^2} \cdot x_2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \qquad (214).$$

Если рассматривать два события, происходящие в системе K в разных точках, например ($x_2 > x_1$), то из преобразований Лоренца (214) следует, что в системе K' $t_1' > t_2'$.

Таким образом, **события одновременные в одной системе отсчета, будут неодновременными в другой системе, движущейся относительно первой**, то есть имеет место относительность одновременности двух событий, происходящих в разных точках пространства.

Если одновременные события в системе K происходят в одном и том же месте пространства $x_1 = x_2$, то и в системе K', согласно (213), $x_1' = x_2'$ и, согласно (214), $t_1' = t_2'$.

Следует отметить, что сказанное относится лишь к событиям, между которыми отсутствует причинно-следственная связь.

Например, выстрел и попадание пули в мишень ни в одной из систем отсчета не будут одновременными. И во всех системах события, являющиеся причиной будут предшествовать следствию.

2. Длина тел в разных системах отсчета

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x и покоящийся относительно подвижной системы отсчета К′ (рис. 104).

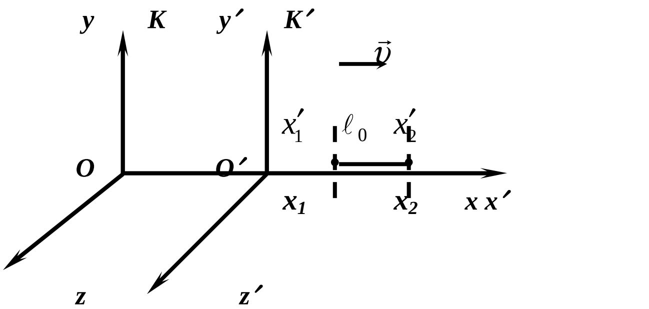


Рис.104. Стержень в системах К и К′

Длина стержня в системе К′ равна $\ell_0 = x_2' - x_1'$, где x_1' и x_2' - не изменяющиеся со временем координаты концов стержня. Эта величина называется собственной длиной или собственными размерами тела.

Относительно системы *К* стержень движется со скоростью υ. Для определения длины стержня в неподвижной системе *К* нужно отметить координаты концов стержня x_1 и x_2 в один и тот же момент времени $t_1 = t_2 = b$. Их разность $x_2(t) - x_1(t) = \ell$ и дает длину стержня, измеренную в системе К. Выразим ℓ через ℓ_0. Для этого запишем соотношения (211) из преобразований Лоренца:

$$x_1' = \frac{x_1 - \upsilon \cdot b}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad x_2' = \frac{x_2 - \upsilon \cdot b}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \text{ откуда } x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

то есть $\ell_0 = \dfrac{\ell}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$ или

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \qquad (215).$$

Из полученного соотношения следует, что **длина стержня, измеренная в системе относительно которой движется, оказывается меньше длины ℓ_0, измеренной в системе относительно которой стержень покоится**.

Это явление называется лоренцевым сокращением.

Из второго и третьего соотношений (211), не содержащих времени, следует, что

$$y_2' - y_1' = y_2 - y_1; \; z_2' - z_1' = z_2 - z_1,$$

то есть **поперечные размеры тела не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.** Обобщая все сказанное можно утверждать, что **линейные размеры тела максимальны в той инерциальной системе отсчета, относительно которой тело находится в покое.**

3. Длительность событий в разных системах отсчета

Пусть в точке, неподвижной относительно системы *K′* происходит событие, длящееся время $\tau_0 = t_2' - t_1'$.

Началу события в этой системе соответст-вует координата $x_1' = a$ и момент времени t_1', концу события – координата $x_2' = a$ и момент времени t_2' (рис.105).

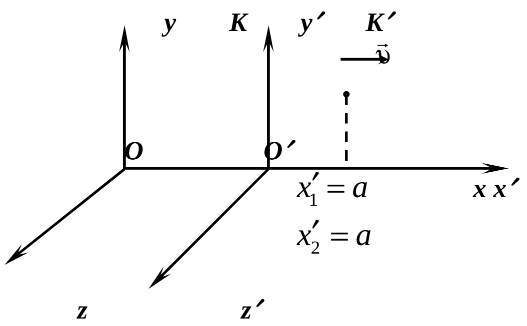


Рис. 105. Системы отсчёта ***K и K′***

Относительно системы *K* точка, в которой происходит событие, перемещается со скоростью υ. Согласно преобразованиям Лоренца (5.16), началу и концу события соответствует в системе *K*

$t_1 = \dfrac{t_1' + \dfrac{\upsilon}{c^2}\cdot a}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$; $t_2 = \dfrac{t_2' + \dfrac{\upsilon}{c^2}\cdot a}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$, откуда $t_2 - t_1 = \dfrac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$. Обозначим $t_2 - t_1 = \tau$,

полученная формула примет вид

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (216).$$

Рассматривая протекание события в системе К можно определить τ как длительность события, измеренную по неподвижным часам. Тогда τ_0 – это длительность события, измеренная по часам, движущимся вместе с телом. Оно называется собственным временем тела.

Из соотношения (216) следует, что длительность события, происходящее в некоторой точке *a*, минимальна в той инерциальной системе отсчета, относительно которой точка *a* неподвижна.

Этот результат можно также сформулировать следующим образом: **часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета идут медленнее покоящихся часов**, как видно из (216). Замедление хода часов становится существенным при скоростях υ, близких к скорости c – скорости света в вакууме.

Релятивистский эффект замедления хода времени был подтвержден в опытах с мюонами – нестабильными, самопроизвольно распадающимися элементарными частицами.

Среднее время жизни покоящегося мюона τ_0, то есть время, измеренное по часам, движущимся вместе с ним, как показали измерения, равно $2{,}2\cdot10^{-6}$ с. Если бы релятивистского эффекта не было, то мюоны, рождающиеся в верхних слоях атмосферы под действием первичных космических лучей и движущихся к Земле со скоростью υ, близкой к c, должны были бы проходить в атмосфере сравнительно небольшие расстояния порядка $c\cdot\tau_0$ = 660 м, поэтому они не могли бы достигать поверхности Земли, где они в действительности наблюдаются. Формула (216) легко объясняет этот парадокс. Для земного наблюдателя срок жизни мюона:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

а путь мюона в атмосфере равен

$$\upsilon\tau = \frac{c\tau_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \text{ то есть } \upsilon\cdot\tau >> c\cdot\tau_0.$$

Время, отсчитанное по часам экспериментатора, связанного с Землей оказывается гораздо большим $\tau >> \tau_0$, и экспериментатор наблюдает пробег мюона гораздо больше 600 м. Наблюдения показывают, что мюоны образуются в космических лучах на высоте 20 – 30 км и успевают в значительном количестве достигнуть земной поверхности.

4. Пространственно-временной интервал

Какое либо событие можно охарактеризовать местом, где оно произошло (координатами x, y, z) и временем t, когда оно произошло.

Таким образом, событию можно сопоставить четыре числа: x, y, z, t. Введем воображаемое четырехмерное пространство, на координатных осях которого будем откладывать пространственные координаты и время. В этом пространстве событие изобразится точкой, которую принято называть мировой точкой. Всякой частице (даже неподвижной) соответствует в четырехмерном пространстве некоторая линия, называемая мировой линией (для покоящейся частицы она имеет вид прямой линии, параллельной оси t).

Пусть одно событие имеет координаты x_1, y_1, z_1, t_1, другое событие – координаты x_2, y_2, z_2, t_2. Величину

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \qquad (217)$$

называют интервалом между соответствующими событиями.

Введя расстояние

$$\ell_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

между точками обычного трехмерного пространства, в которых произошли оба события, и, обозначив разность ($t_2 - t_1$) через t_{12}, выражение для интервала можно записать в следующем виде:

$$s_{12} = \sqrt{c^2 \cdot t_{12}^2 - \ell_{12}^2} \qquad (218).$$

Легко убедиться в том, что **величина интервала между двумя данными событиями оказывается во всех инерциальных системах одной и той же**. Чтобы упростить выкладки, запишем квадрат интервала в системе K в виде

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2,$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$.

Интервал между теми же событиями в системе K' равен

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \qquad (219).$$

Согласно формулам (211),

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon \cdot \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad \Delta y' = \Delta y; \quad \Delta z' = \Delta z; \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2} \cdot \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

подставив эти значения в формулу (219) получим, что

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2,$$

то есть $\Delta s'^2 = \Delta s^2$.

Таким образом, интервал (217) является инвариантом по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Из рассуждений приведённых выше видно, что t_{12} и ℓ_{12} не являются инвариантом, то есть каждое слагаемое (218) и (219) изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, сама же величина s_{12}^2 остается постоянной.

Согласно (216), собственное время события, то есть время, измеренное по часам, движущимся относительно инерциальной системы отсчета

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

Преобразуем выражение, учитывая, что $\tau = t_2 - t_1 = \Delta t$, $\Delta\ell = \upsilon\cdot\Delta t$:

$$\tau_0 = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\cdot\Delta t^2 - \upsilon\cdot(\Delta t)^2} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\cdot\Delta t^2 - \Delta\ell^2},$$

тогда
$$\tau_0 = \frac{1}{c}\cdot\Delta s \qquad (220).$$

Промежуток собственного времени пропорционален интервалу между событиями. Поскольку Δs - интервал между событиями является инвариантом, т.е. одинаков во всех инерциальных системах отсчета, то согласно (220) и собственное время так же является инвариантом.

Таким образом, **собственное время не зависит от того, в какой системе отсчета наблюдается движение данного тела**.

5. Релятивистская кинематика. Релятивистский закон сложения скоростей

Механику, основанную на принципе относительности, одинаковости скорости света во всех инерциальных системах и преобразованиях Лоренца принято называть релятивистской (от латинского слова *relativ* - отношение). Законы релятивистской механики в общем случае отличаются от законов классической механики Галилея-Ньютона.

1. В классической механике считалось, что тела могут двигаться с любыми, сколь угодно большими скоростями. Однако уже из преобразований Лоренца (211) и (212) видно, что **относительные скорости тел имеют верхнюю границу**

$$\upsilon < c.$$

При $\upsilon > c$ знаменатели, равные $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$ становятся мнимыми и координаты x' и t' теряют физический смысл.

2. Движущиеся тела изменяют размеры. Длина стержня, движущегося со скоростью υ относительно системы отсчета K, связана с длиной неподвижного стержня ℓ_0 соотношением

$$\ell = \ell_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

При малых скоростях движения (υ <<c) $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \cong 1$, релятивистскими сокращениями длин движущихся тел можно пренебречь. При υ близком к c это сокращение становится существенным. Так при относительной скорости двух инерциальных систем $\upsilon = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot c \cong 260000$ км/с, $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ и метр, покоящийся в одной системе будет иметь в другой длину 1/2 м.

Скорости такого порядка, при которых сокращение размеров движущихся материальных частиц становится заметным, носят название релятивистских скоростей. В настоящее время они достигнуты в крупных лабораториях и в новых промышленных установках. Так, в ядерных реакторах атомных электростанций быстрые нейтроны движутся со скоростями, для которых $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = 0,997$, то есть сокращение длин порядка 3%.

Сильно релятивистские частицы приходящих на Землю космических лучей имеют $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \approx 10^{-7}$, и их продольные размеры сокращаются в 10 миллионов раз.

3. В движущейся системе изменится ход течения времени:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

В неподвижной системе K два события будут разделены промежутком времени в $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$ большим.

Представим себе, что удалось реализовать фантастический проект и отправить к звезде ракету со скоростью, столь близкой к скорости света, что $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = 0,001$. По земным часам ракета будет лететь к звезде 1000 лет. Но для материальной системы – ракеты и путешественника в ней – путешествие займет всего 1 год.

Расчет показывает, что при полетах в пределах солнечной системы релятивистские эффекты скажутся лишь в виде малых поправок.

4. Релятивистский закон сложения скоростей

Рассмотрим движение материальной точки в инерциальной системе

K и K'.

В системе K положение точки определяется в каждый момент времени t координатами x,y,z. Выражения

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

представляют собой проекции на оси x, y, z вектора скорости точки относительно системы K.

В системе K' положение точки характеризуется в каждый момент времени t' координатами x', y', z'. Проекции на оси x', y', z' вектора скорости точки относительно системы K' определяются следующими выражениями:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Из формулы (212) преобразований Лоренца вытекает, что

$$dx = \frac{dx' + \upsilon \cdot dt'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \;\; dy = dy'; \;\; dz = dz'; \;\; dt = \frac{dt' + \frac{\upsilon}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Разделив первые три равенства на четвертое, получим формулы преобразования скоростей при переходе от одной системы отсчета к другой:

$$u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1+\frac{\upsilon}{c^2}\cdot u'_x}; \quad u_y = \frac{u'_y \cdot \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1+\frac{\upsilon}{c^2}\cdot u'_x}; \quad u_z = \frac{u'_z \cdot \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1+\frac{\upsilon}{c^2}\cdot u'_x} \qquad (221).$$

Формулы (221) выражают закон сложения скоростей в релятивистской кинематике.

В случае, когда $\upsilon << c$ (221) переходят в формулы сложения скоростей (199) в классической механике.

Все изложенное выше показывает, что законы релятивистской механики в случае малых скоростей ($\upsilon << c$) переходят в законы классической механики.

Таким образом, **классическая механика не отвергается, а лишь ограничивается определенными пределами применимости: случаями, когда относительные скорости тел много меньше скорости света.** Она верна как частный случай общей механики Эйнштейна – случай малых скоростей.

6. Релятивистская динамика

В классической механике Ньютона предполагается, что масса тела постоянна, независимо от состояния его движения и одинакова во всех инерциальных системах отсчета ($m = m'$).

Эйнштейн показал, что при $\upsilon \sim c$ масса тела зависит от скорости её движения по отношению к рассматриваемой инерциальной системе отсчета по следующему закону:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (222),$$

где m_0 – масса того же тела, измеренная в инерциальной системе отсчета по отношению к которой тело покоится. Эта величина называется массой покоя тела. Масса m движущегося тела называется релятивистской массой тела или просто массой.

В связи с уравнением (222) – **основной закон релятивистской динамики – будет иметь вид**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \cdot \vec{\upsilon} \right) = \vec{F} \qquad (223).$$

Это выражение является инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца.

При $\upsilon << c$ $m \sim m_0$ и релятивистское уравнение (223) совпадает с основным законом динамики в классической механике:

$m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}$, или $\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$,

где $\vec{p}$ - импульс.

Из (223) следует, что импульс релятивистской частицы равен

$$\vec{p} = \frac{m_0 \cdot \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Найдем выражение для кинетической энергии свободной материальной частицы в релятивистской механике.

Пусть в начале эта частица покоилась. А затем под действием силы F приобрела некоторую скорость υ и соответствующую энергию $E_к$, после чего действие силы прекратилось и частица вновь стала свободной.

Приращение $\Delta E_к$ кинетической энергии материальной частицы на элементарном перемещении dr равно работе, совершаемой силой F на этом перемещении

$$dE_к = dA.$$

Работа может быть записана через скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$: $dA = \left(\vec{F} d\vec{r}\right)$.

Учитывая, что $d\vec{r} = \vec{\upsilon} dt$, получим $dA = \left(\vec{F} \cdot \vec{\upsilon} dt\right)$ и, соответственно,

$$dE_к = \left(\vec{F} \cdot \vec{\upsilon} dt\right) \qquad (224).$$

Из основного уравнения релятивистской динамики (222) имеем

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \frac{m_0 \cdot \upsilon}{c^2 \cdot \left[1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right]^{3/2}} \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{\upsilon} \qquad (225).$$

Подставляя (225) в уравнение (224) получим следующее выражение для приращения кинетической энергии материальной частицы

$$dE_к = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \cdot \left(\vec{\upsilon} d\vec{\upsilon}\right) + \frac{m_0 \cdot \upsilon \cdot d\upsilon}{c^2 \left[1 - \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2\right]^{3/2}} \left(\vec{\upsilon} \cdot \vec{\upsilon}\right).$$

Учитывая, что $\left(\vec{\upsilon} d\vec{\upsilon}\right) = \upsilon d\upsilon$, а $\left(\vec{\upsilon} \cdot \vec{\upsilon}\right) = \upsilon^2$ перепишем предыдущее выражение в таком виде:

$$dE_к = \frac{m \cdot \upsilon d\upsilon}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \cdot \left[1 + \frac{\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}\right] = \frac{m_0 \cdot \upsilon \cdot d\upsilon}{\left[1 - \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad (226),$$

с другой стороны из формулы (5.25) видно, что

$$dm = \frac{m_0 \cdot \upsilon d\upsilon}{c^2 \cdot \left[1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right]^{3/2}} \qquad (227).$$

Сравнивая (226) и (227), делаем вывод, что

$$dE_к = c^2 dm \qquad (228),$$

то есть при изменении скорости материальной точки изменение её кинетической энергии и массы пропорциональны друг другу.

Проинтегрируем уравнение (228), учитывая, что кинетическая энергия покоящейся точки равна нулю, а её масса равна m_0

$$\int_0^{E_к} dE_к = c^2 \int_{m_0}^{m} dm;$$

$$E_к = m \cdot c^2 - m \cdot c_0^2 \qquad (229).$$

Подставим в уравнение (229) выражение для массы (222), получим формулу для вычисления кинетической энергии в релятивистской динамике:

$$E_к = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - m_0 \cdot c^2;$$

$$E_к = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1 \right) \qquad (230).$$

При $\upsilon << c$ легко получить обычное выражение для кинетической энергии материальной точки в классической механике. Для этого разложим в бином Ньютона $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$: $\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)$..... и подставим в уравнение (230): $E_к = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\upsilon^2}{c^2}-1\right) = \frac{1}{2}\cdot m_0 \cdot \upsilon^2$.

Из уравнения (228) следует, что при сообщении телу кинетической энергии $dE_к$ его масса возрастает на величину $dm = \frac{dE_к}{c^2}$.

Естественно ожидать, что масса тела должна возрастать не только при сообщении ему кинетической энергии, но также при любом увеличении его полной энергии, независимо от того, за счет какого конкретного вида энергии это увеличение произошло, то есть $dm = \frac{dE}{c^2}$.

Интегрируя это уравнение, находим универсальное соотношение между m и E:

$$E = m \cdot c^2 + k \qquad (231).$$

Постоянную интегрирования (k) нужно положить равной нулю, так как уравнение (231) при любом значении $k \neq 0$ неинвариантно относительно преобразований Лоренца. Таким образом, **полная энергия системы равна произведению её полной релятивистской массы на квадрат скорости света в вакууме**

$$E=m\cdot c^2 \qquad (232).$$

Уравнение (232) выражает один из важнейших законов природы – закон взаимосвязи массы и энергии.

Связь между импульсом и энергией можно найти следующим образом. Подставим в (232) уравнение для массы (222):

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \cdot c^2.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения и освободимся от знаменателя: $E^2 = \dfrac{m_0^2 \cdot c^4}{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}$; $E^2 - E^2 \cdot \dfrac{\upsilon^2}{c^2} = m_0^2 \cdot c^4$. Преобразуем полученное соотношение: $E^2 = m_0^2 \cdot c^4 + \dfrac{m^2 \cdot c^4 \cdot \upsilon^2}{c^2}$; $E^2 = m_0^2 \cdot c^4 + m^2 \cdot \upsilon^2 \cdot c^2$. Учитывая, что $m \cdot \upsilon$ есть импульс p, получим

$$E = \sqrt{p^2 \cdot c^2 + m_0^2 \cdot c^4} \qquad (233).$$

Эта формула выражает связь между полной энергией свободной частицы (тела) и её импульсом. **Величина $m_0 \cdot c^2 = E_0$ носит название энергии покоя частицы или собственной энергией**. Собственная энергия сохраняется (как и масса покоя) за каждой частицей, пока она не превращается в другие частицы.

Основы молекулярной физики и термодинамики
Статистический и динамический методы исследования

Молекулярная физика и термодинамика – разделы физики, в которых изучаются макроскопические процессы в телах, связанных с огромным числом содержащихся в телах атомов и молекул. В основе исследования лежат два метода: статистический и термодинамический.

Молекулярная физика – раздел физики, в котором изучаются строение и свойства вещества, исходя из молекулярно-кинетических представлений, основывающихся на том, что все тела состоят из молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении.

В основе молекулярно-кинетической теории лежат **три основных положения:**

1. Все вещества – жидкие, твердые и газообразные – образованы из мельчайших частиц – молекул, которые сами состоят из атомов («элементарных молекул»). Молекулы химического вещества могут быть простыми и сложными, т.е. состоять из одного или нескольких атомов. Молекулы и атомы представляют собой электрически нейтральные частицы. При определенных условиях молекулы и атомы могут приобретать дополнительный электрический заряд и превращаться в положительные или отрицательные ионы.
2. Атомы и молекулы находятся в непрерывном хаотическом движении.
3. Частицы взаимодействуют друг с другом силами, имеющими электрическую природу. Гравитационное взаимодействие между частицами пренебрежимо мало.

Наиболее ярким экспериментальным подтверждением представлений молекулярно-кинетической теории о беспорядочном движении атомов и молекул является **броуновское движение**. **Это тепловое движение мельчайших микроскопических частиц, взвешенных в жидкости или газе**. Оно было открыто английским ботаником Р. Броуном в 1827 г. Броуновские частицы движутся под влиянием беспорядочных ударов молекул. Из-за хаотического теплового движения молекул эти удары никогда не уравновешивают друг друга. В результате скорость броуновской частицы беспорядочно меняется по модулю и направлению, а ее траектория представляет собой сложную зигзагообразную кривую (рис. 106).

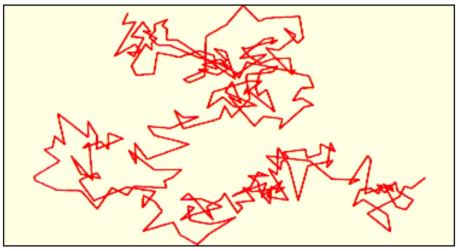


Рис. 106. Траектория броуновской частицы

Теория броуновского движения была создана А. Эйнштейном в 1905 г. Экспериментально теория Эйнштейна была подтверждена в опытах французского физика Ж. Перрена, проведенных в 1908–1911 гг.

Главный вывод теории А. Эйнштейна состоит в том, что квадрат смещения $\langle r^2 \rangle$ броуновской частицы от начального положения, усредненный по многим броуновским частицам, пропорционален времени наблюдения t

$$\langle r^2 \rangle = D \cdot t \qquad (234).$$

Это соотношение выражает так называемый диффузионный закон. Как следует из теории коэффициент пропорциональности D монотонно возрастает с увеличением температуры.

Постоянное хаотичное движение молекул вещества проявляется также в другом легко наблюдаемом явлении – диффузии. **Диффузией называется явление проникновения двух или нескольких соприкасающихся веществ друг в друга.** Наиболее быстро процесс протекает в газе, если он неоднороден по составу. Диффузия приводит к образованию однородной смеси независимо от плотности компонентов. Так, если в двух частях сосуда, разделенных перегородкой, находятся кислород O_2 и водород H_2, то после удаления перегородки начинается процесс взаимопроникновения газов друг в друга, приводящий к образованию взрывоопасной смеси – гремучего газа. Этот процесс идет и в том случае, когда легкий газ (водород) находится в верхней половине сосуда, а более тяжелый (кислород) – в нижней.

Значительно медленнее протекают подобные процессы в жидкостях. Взаимопроникновение двух разнородных жидкостей друг в друга, растворение твердых веществ в жидкостях (например, сахара в воде) и образование однородных растворов – примеры диффузионных процессов в жидкостях.

Наиболее медленно процесс диффузии протекает в твердых телах. Однако опыты показывают, что при контакте хорошо очищенных поверхностей двух металлов через длительное время в каждом из них обнаруживается атомы другого металла.

Диффузия и броуновское движение – родственные явления, которые происходят вследствие хаотичного теплового движения молекул.

Термодинамика – раздел физики, в котором изучаются общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и процессы перехода между этими состояниями.Суть статистического и термодинамического методов и пояснения к ним приведены в таблице 8.

Таблица 8

Статистический и термодинамический методы

Метод	**Суть метода**	**Пояснения**
Статистический (основа молекулярной физики)	Метод исследования систем из большого числа частиц, оперирующий статистическими закономерностями и средними значениями физических величин, характеризующих всю совокупность частиц (например, среднее значение скоростей теплового движения молекул и их энергий)	Процессы, изучаемые молекулярной физикой, являются результатом совокупного действия огромного числа молекул. Температура тела, например, определяется скоростью беспорядочного движения его молекул, но так как в любой момент времени разные молекулы имеют разные скорости, то она может быть выражена только через среднее значение скорости движения молекул. Нельзя говорить о температуре одной молекулы

Продолжение таблицы 8

Термодинамический (основа термодинамики)	Метод исследования систем из большого числа частиц, оперирующий на основе законов превращения энергии величинами, характеризующими систему в целом (например, давление, объём, температура) не рассматривая её микроструктуры и совершающихся в системе микропроцессов	Нет таких областей физики и химии, в которых нельзя было бы пользоваться этим методом. Однако термодинамика ничего не говорит о микроскопическом строении вещества, о механизме явлений, а лишь устанавливает связи между макроскопическими свойствами вещества

Оба подхода – термодинамический и статистический – не противоречат, а дополняют друг друга. Только совместное использование термодинамики и молекулярно-кинетической теории может дать наиболее полное представление о свойствах систем, состоящих из большого числа частиц.

При описании термодинамических систем используются следующие понятия.

Термодинамическая система – совокупность макроскопических тел, которые взаимодействуют и обмениваются энергией, как между собой, так и с внешней средой.

Внешняя среда – тела, не входящие в исследуемую термодинамическую систему.

Замкнутая термодинамическая система – термодинамическая система, не обменивающаяся с внешней средой ни энергией, ни веществом.

Термодинамические параметры (параметры состояния) - совокупность физических величин, характеризующих свойства термодинамической системы. Обычно в качестве параметров состояния выбирают температуру, давление и объём.

Термодинамический процесс – любое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из её термодинамических параметров. Например, изобарный (происходит при постоянном давлении), изохорный (происходит при постоянном объёме), изотермический (происходит при постоянной температуре) процессы.

Термодинамическое равновесие состоит в том, что с течением времени её состояние не меняется.

Основы молекулярно-кинетической теории

Для изучения закономерностей поведения вещества находящегося в газообразном состоянии широко используется идеализированная модель реальных газов – идеальный газ.

Идеальный газ (идеализация) **–** модель, согласно которой:

- собственный объём газа пренебрежимо мал по сравнению с объёмом сосуда;
- между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;
- столкновения молекул газа между собой и стенками сосуда абсолютно упругие.

Эта модель может быть использована при изучении реальных газов, так как они в условиях, близких к нормальным, а также при низких давлениях и высоких температурах близки по свойствам к идеальному газу.

В реальных газах между молекулами действуют силы взаимодействия. Силы, действующие между двумя молекулами, зависят от расстояния между ними. Молекулы состоят из атомов.

Атом – наименьшая часть химического элемента, являющаяся носителем его свойств.

Молекула – наименьшая устойчивая частица вещества, обладающая его основными химическими свойствами и состоящая из атомов, соединённых между собой химическими связями. Молекулы представляют собой сложные пространственные структуры, содержащие как положительные, так и отрицательные заряды. Если расстояние между молекулами достаточно велико, то преобладают силы межмолекулярного притяжения. На малых расстояниях преобладают силы отталкивания. Зависимости результирующей силы F взаимодействия между молекулами и потенциальной энергии E_p от расстояния между их центрами качественно изображены на рис. 107 ($F > 0$ – сила отталкивания, $F < 0$ – сила притяжения). На рис.108 зависимость $F(r)$ и модель взаимодействия между частицами вещества.

При некотором расстоянии $r = r_0$ сила взаимодействия обращается в нуль. Это расстояние условно можно принять за диаметр молекулы. Потенциальная энергия взаимодействия при $r = r_0$ минимальна. Чтобы удалить друг от друга две молекулы, находящиеся на расстоянии r_0, нужно сообщить им дополнительную энергию E_0. Величина E_0 называется глубиной потенциальной ямы или энергией связи.

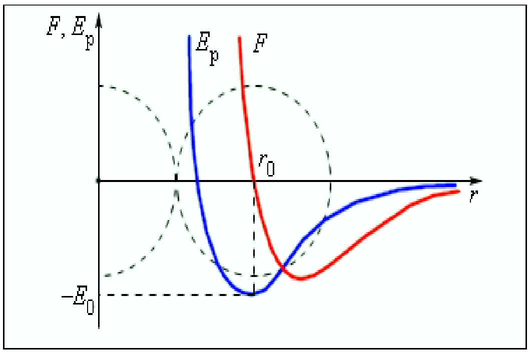


Рис. 107. Зависимость F и Ep между молекулами от r

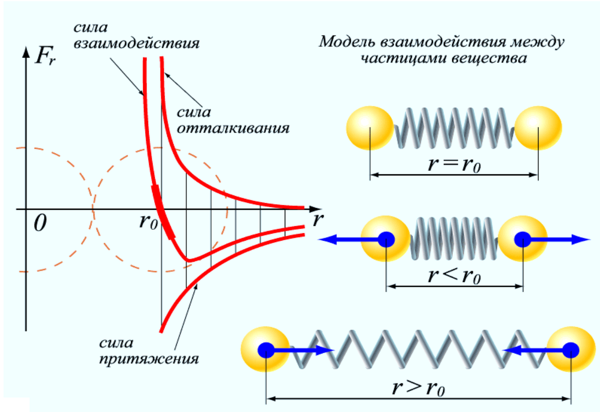


Рис. 108. Зависимость F(r) и модель взаимодействия между частицами

Молекулы имеют чрезвычайно малые размеры. Простые одноатомные молекулы имеют размер порядка 10^{-10} м. Сложные многоатомные молекулы могут иметь размеры в сотни и тысячи раз больше.

Беспорядочное хаотическое движение молекул называется тепловым движением. Кинетическая энергия теплового движения растет с возрастанием температуры. При низких температурах средняя кинетическая энергия молекулы может оказаться меньше глубины потенциальной ямы E_0. В этом случае молекулы конденсируются в жидкое или твердое вещество; при этом среднее расстояние между молекулами будет приблизительно равно r_0. При повышении температуры средняя кинетическая энергия молекулы становится больше E_0, молекулы разлетаются, и образуется газообразное вещество.

В твердых телах молекулы совершают беспорядочные колебания около фиксированных центров (положений равновесия). Эти центры могут быть расположены в пространстве нерегулярным образом (аморфные тела) или образовывать упорядоченные объемные структуры (кристаллические тела).

В жидкостях молекулы имеют значительно большую свободу для теплового движения. Они не привязаны к определенным центрам и могут перемещаться по всему объему. Этим объясняется текучесть жидкостей. Близко расположенные молекулы жидкости также могут образовывать упорядоченные структуры, содержащие несколько молекул. Это явление называется ближним порядком в отличие от дальнего порядка, характерного для кристаллических тел.

В газах расстояния между молекулами обычно значительно больше их размеров. Силы взаимодействия между молекулами на таких больших расстояниях малы, и каждая молекула движется вдоль прямой линии до очередного столкновения с другой молекулой или со стенкой сосуда. Среднее расстояние между молекулами воздуха при нормальных условиях порядка 10^{-8} м, то есть в десятки раз превышает размер молекул. Слабое взаимодействие между молекулами объясняет способность газов расширяться и заполнять весь объем сосуда. В пределе, когда взаимодействие стремится к нулю, мы приходим к представлению об идеальном газе.

Понятие температуры тесно связано с понятием теплового равновесия. Тела, находящиеся в контакте друг с другом, могут обмениваться энергией. Энергия, передаваемая одним телом другому при тепловом контакте, называется количеством теплоты. Температура – это физический параметр, одинаковый для всех тел, находящихся в тепловом равновесии. Возможность введения понятия температуры следует из опыта и носит название нулевого закона термодинамики.

Температура – физическая величина, характеризующая состояние термодинамического равновесия макроскопической системы и определяющая направление теплообмена между телами, это одно из основных понятий в физике.

Температура – это мера средней кинетической энергии теплового движения молекул.

Для измерения температуры используются физические приборы – термометры, в которых о величине температуры судят по изменению какого-либо физического параметра. Для создания термометра необходимо выбрать термометрическое вещество (например, ртуть, спирт) и термометрическую величину, характеризующую свойство вещества (например, длина ртутного или спиртового столбика). В различных конструкциях термометров используются разнообразные физические свойства вещества (например, изменение линейных размеров твердых тел или изменение электрического сопротивления проводников при нагревании).

Термометры должны быть откалиброваны. Для этого их приводят в тепловой контакт с телами, температуры которых считаются заданными. Чаще всего используют простые природные системы, в которых температура остается неизменной, несмотря на теплообмен с окружающей средой – это смесь льда и воды и смесь воды и пара при кипении при нормальном атмосферном давлении. По температурной шкале Цельсия точке плавления льда приписывается температура 0 °C, а точке кипения воды – 100 °C. Изменение длины столба жидкости в капиллярах термометра на одну сотую длины между отметками 0 °C и 100 °C принимается равным 1 °C. В ряде стран (США) широко используется шкала Фаренгейта (TF), в которой температура замерзающей воды принимается равной 32 °F, а температура кипения воды равной 212 °F. Следовательно,

$$t_F = \frac{9}{5} \cdot t_C + 32^0; \; t_C = \frac{5}{9} \cdot (t_F - 32^0) \qquad (235).$$

Английский физик У. Кельвин (Томсон) в 1848 г. предложил использовать точку нулевого давления газа для построения новой температурной шкалы (шкала Кельвина). В этой шкале единица измерения температуры такая же, как и в шкале Цельсия, но нулевая точка сдвинута:

$$T = t + 273{,}16 \qquad (236),$$

при этом $\Delta T = \Delta t$.

В системе СИ принято единицу измерения температуры по шкале Кельвина называть кельвином и обозначать буквой *K*. Например, комнатная температура t = 20 °С по шкале Кельвина равна T = 293,16 *K*.

Температурная шкала Кельвина называется абсолютной шкалой температур и является международной практической шкалой. Она оказывается наиболее удобной при построении физических теорий.

Нет необходимости привязывать шкалу Кельвина к двум фиксированным точкам – точке плавления льда и точке кипения воды при нормальном атмосферном давлении, как это принято в шкале Цельсия.

Кроме точки нулевого давления газа, которая называется абсолютным нулем температуры, достаточно принять еще одну фиксированную опорную точку. В шкале Кельвина в качестве такой точки используется температура тройной точки воды (0,01 °С), в которой в тепловом равновесии находятся все три фазы – лед, вода и пар. По шкале Кельвина температура тройной точки принимается равной 273,16 К. Ниже (рис.109) приведены шкала Цельсия и шкала Кельвина (термодинамическая шкала).

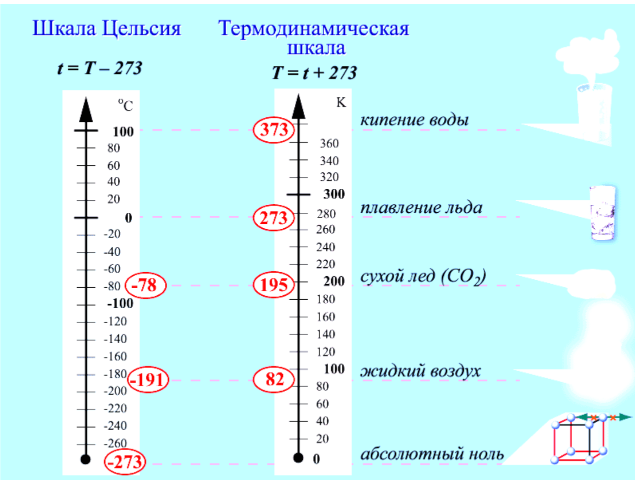


Рис. 109. Шкала Цельсия и термодинамическая шкала

На рис. 110. приведён диапазон температур в природе и технике.

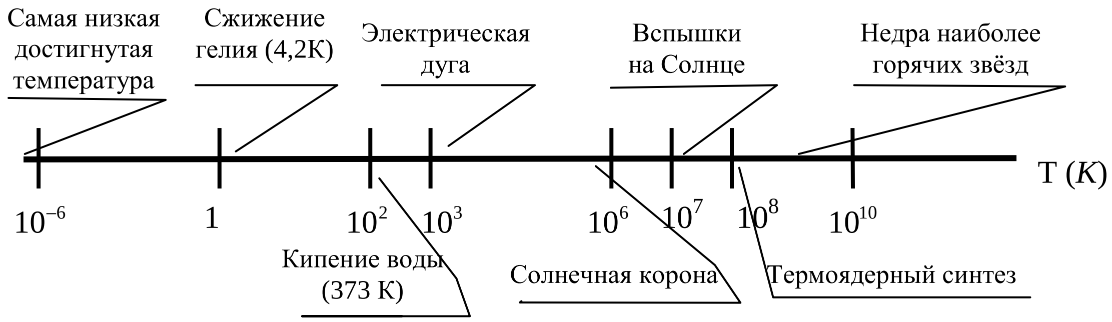


Рис. 110. Диапазон Температур

Основные понятия молекулярно-кинетической теории

Относительная молекулярная масса M_r – это отношение массы молекулы к $\frac{1}{12}$ части массы атома углерода

$$M_r = \frac{m_0}{\frac{1}{12} \cdot m_{атC}} \qquad (237),$$

где m_0 – масса молекулы.

Относительная атомная масса – это отношение массы молекулы к 1/12 части массы атома углерода.

Относительные атомная и молекулярная массы – безразмерные величины.

$$1 \; а.е.м. = \frac{1}{12} \cdot m_{атC} = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Количество вещества (ν) – физическая величина, определяемая числом специфических структурных элементов – молекул, атомов, ионов, из которых состоит вещество.

Единица количества вещества – 1 моль. 1 моль – количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в 12 граммах углерода.

Массу одного моля вещества принято называть молярной массой *M*. **Молярная масса** равна произведению массы m_0 одной молекулы данного вещества на постоянную Авогадро

$$M = N_A \cdot m_0 \qquad (238).$$

$$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} \frac{1}{моль}.$$

Физический смысл N_A: число Авагадро показывает, что в одном моле любого вещества содержится 6,02·10^{23} молекул.

Молярную массу можно найти как отношение массы вещества m к количеству молей ν в нём

$$M = m/\nu \qquad (239).$$

Молярная масса – величина скалярная. $[M]1\frac{кг}{моль}$.

Используя таблицу Менделеева можно легко определить молярную массу

$$M = M_r \cdot 10^{-3}\frac{кг}{моль} \qquad (240).$$

Например, для воды: $M_{H_2O} = (2+16)\cdot 10^{-3}\frac{кг}{моль}$.

Масса одной молекулы

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{m}{N} \qquad (241).$$

Кроме того массу одной молекулы m_0 можно определить разделив плотность вещества ρ на концентрацию его молекул n

$$m_0 = \frac{\rho}{n} \qquad (242),$$

где $n = \frac{N}{V}$ – число частиц в единице объёма (концентрация).

Для оценки объёма молекулы можно объём одного моля твёрдого или жидкого вещества разделить на число молекул в одном моле, то есть на число Авогадро. Например, один моль воды занимает объём 18 см^3=18·10^{-6} м. Тогда объём одной молекулы воды $V_{H_2O} = \frac{18\cdot 10^{-6}}{6,02\cdot 10^{23}}\, м^3 = 30\cdot 10^{-30}\, м^3$, а её диаметр D, считая, что форма молекулы – шар, примерно равен корню кубическому из объёма молекулы:

$$D=\sqrt[3]{V_{H_2O}}=3Ч10^{-10}м=3\overset{0}{A}.$$

Здесь $\overset{0}{A}$ – ангстрем – внесистемная единица длины, часто использующаяся в молекулярной и атомной физике.

$$1\overset{0}{A}=10^{-10}\ м.$$

Молярный объём (V_m) – физическая величина, равная отношению объёма V однородной системы к количеству вещества ν системы

$$V_m = \frac{V}{\nu} \qquad (243).$$

$[V_m]1\, м^3/моль$. 1 кубический метр на моль – молярный объём вещества, занимающего при количестве вещества 1 моль объём 1 м^3.

Закон Авогадро: моли любых газов при одинаковых температуре и давлении занимают одинаковые объёмы.

При нормальных условиях $V_m = 22,41 \cdot 10^{-3}$ *м³/моль*.

Закон Дальтона: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений $p_1, p_2, ... p_n$ входящих в неё газов

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_n \qquad (244).$$

Парциальное давление – давление, которое производил бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал объём, равный объёму смеси при той же температуре.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

Используя модель идеального газа, вычислим давление газа на стенку сосуда. В процессе взаимодействия молекулы со стенкой сосуда между ними возникают силы, подчиняющиеся третьему закону Ньютона. В результате проекция υ_x скорости молекулы, перпендикулярная стенке, изменяет свой знак на противоположный, а проекция υ_y скорости, параллельная стенке, остается неизменной (рис. 111).

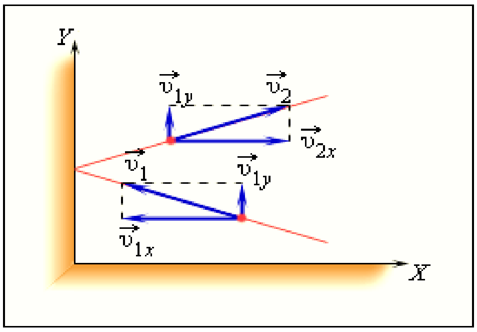


Рис. 111. Упругое столкновение молекулы со стенкой

При каждом соударении молекула, движущееся перпендикулярно площадке, передаёт ей импульс

$$m_0 \cdot \upsilon - (-m_0 \cdot \upsilon) = 2 \cdot m_0 \cdot \upsilon,$$

где m_0 – масса молекулы, υ– её скорость.

За время Δt площадки ΔS достигнут только те молекулы, которые заключены в объёме цилиндра с основанием ΔS и высотой $\upsilon \cdot \Delta t$ (рис. 112). Число этих молекул равно

$$n \cdot \Delta S \cdot \upsilon \cdot \Delta t,$$

где n – концентрация молекул.

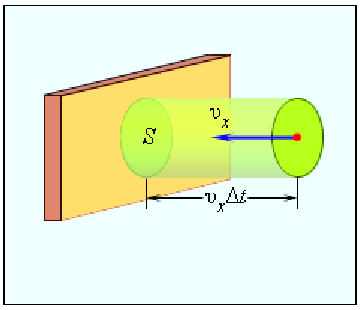


Рис. 112. Определение числа столкновений молекул с площадкой S

Реально, молекулы движутся к площадке ΔS под разными углами и имеют различные скорости, причём при каждом соударении скорость молекул меняется. Для упрощения расчётов хаотическое движение молекул заменяют движением вдоль трёх взаимно перпендикулярных направлений, так что в любой момент времени вдоль каждого из них движется $1/3$ молекул, причём половина молекул $1/6$ движется вдоль данного направления в одну сторону, половина – в противоположную. Тогда число ударов молекул, движущихся в заданном направлении, о площадку ΔS будет $\frac{1}{6}\cdot n\cdot\Delta S\cdot\upsilon\cdot\Delta t$. При столкновении с площадкой эти молекулы передадут ей импульс

$$\Delta P = 2\cdot m_0\cdot\upsilon\cdot\frac{1}{6}\cdot n\cdot\Delta S\cdot\upsilon\cdot\Delta t = \frac{1}{3}\cdot n\cdot m_0\cdot\upsilon^2\cdot\Delta S\cdot\Delta t.$$

Тогда давление газа, оказываемое им на стенку сосуда

$$p = \Delta P/(\Delta t\cdot\Delta S) = \frac{1}{3}\cdot n\cdot m_0\cdot\upsilon^2 \qquad (245).$$

Если газ в объёме V содержит N молекул, движущихся со скоростями $\upsilon_1, \upsilon_2, ...\upsilon_N$, то целесообразно рассматривать квадратичную скорость (корень квадратный из среднего значения квадратов скоростей всех молекул)

$$\langle\upsilon_{кв}\rangle = \sqrt{\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\upsilon_i^2} \qquad (246),$$

характеризующую всю совокупность молекул газа.

Уравнение (245) с учётом (246) примет вид

$$p = \frac{1}{3}\cdot n\cdot m_0\cdot\langle\upsilon_{кв}\rangle^2 \qquad (247).$$

Это уравнение называется **основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеальных газов**. Точный расчёт с учётом движения молекул по всевозможным направлениям даёт ту же формулу.

Учитывая, что $E_k = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2}$, получим

$$p = \frac{2}{3} \cdot n \cdot \langle E_k \rangle \qquad (248),$$

где $\langle E_k \rangle$ – суммарная E_k поступательного движения всех молекул газа.

Так как плотность газа $\rho = m_0 \cdot n$, то

$$p = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \langle \upsilon \rangle^2 \qquad (249).$$

Уравнение состояния идеального газа

Связь между давлением идеального газа, его концентрацией и абсолютной температурой

$$p = n \cdot k \cdot T$$

(250),

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Так как $n = \frac{N}{V}$ ($*$), то подставив ($*$) в (250) получим $p = \frac{N}{V} \cdot k \cdot T$,

$p \cdot V = N \cdot k \cdot T$ (2$*$), так как $m = \nu \cdot N = \frac{M}{N_A} \cdot N$ то $N = \frac{m \cdot N_A}{M}$ (3$*$). Подставим (3$*$) в (2$*$), получим $p \cdot V = \frac{m \cdot N_A \cdot k \cdot T}{M}$. $k \cdot N_A = R = 8{,}31$ Дж/моль·К – универсальная газовая постоянная. Окончательно получаем

$$p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$$

(251).

(251) – уравнение Клапейрона – Менделеева.

Для одного моля газа $p \cdot V = R \cdot T \Rightarrow \frac{p \cdot V}{T} = R$, так как $\frac{p \cdot V}{T}$ – величина постоянная для данной массы газа.

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} = const \qquad (252),$$

или

$$\frac{p \cdot V}{T} = const \qquad (252*).$$

Уравнение (252), (252*) – уравнение Клапейрона. Поэтому уравнение (251) называется уравнением Клапейрона – Менделеева.

Средняя квадратичная скорость молекул

Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеальных газов ($p = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m_0 \cdot \langle \upsilon_{кв} \rangle^2$ (247)) и уравнения Клапейрона – Менделеева ($p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$ (251), для одного моля газа), можно получить

$$R \cdot T = \frac{1}{3} \cdot M \cdot \langle \upsilon_{кв} \rangle^2 \qquad (253).$$

Из (253) следует, что

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_0}} \qquad (254).$$

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа

Используем основное уравнение МКТ $p = \frac{2}{3} \cdot n \cdot \langle E_k \rangle$.

$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot \langle E_k \rangle \Rightarrow p \cdot V = \frac{2}{3} \cdot N \cdot \langle E_k \rangle$; $p \cdot V = \frac{2}{3} \cdot E$, так как

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{E}{N} = \frac{m_0 \cdot \langle \upsilon_{кв} \rangle^2}{2} \qquad (255).$$

Учитывая, что $\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_0}}$, получим

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \qquad (256).$$

Из (256) следует физический смысл термодинамической температуры. **Термодинамическая температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа.** При температурах, близких к 0 *К*, это выражение несправедливо, то есть $\langle \varepsilon_0 \rangle$ не пропорционально *Т*. Поэтому некорректно говорить о том, что при 0 *К* движение молекул прекращается. В настоящее время доказано, что даже при 0 K частицы вещества совершают нулевые колебания.

Изопроцессы в идеальном газе

Изопроцессами в газах называются процессы, при которых одни из параметров состояния: давление, объём или температура – остаётся неизменным в течение всего процесса. Закономерности, наблюдаемые при изопроцессах, называют газовыми законами. Газовые законы являются следствиями уравнения Клапейрона ($\frac{p\cdot V}{T}=const$)

1. **Изотермическим процессом** называется процесс (рис. 113), протекающий при постоянной температуре.

Закон Бойля-Мариотта: при постоянной температуре произведение давления данной массы идеального газа ($m=const$) и его объёма есть величина постоянная

$$p\cdot V=const \qquad (257).$$

Уравнение изотермического процесса было получено из эксперимента английским физиком Р. Бойлем (1662 г.) и независимо французским физиком Э. Мариоттом (1676 г.). Поэтому это уравнение называют законом Бойля–Мариотта.

Процесс в реальном газе можно считать изотермическим, если он протекает очень медленно, столь медленно, что изменением температуры газа за некоторый малый промежуток времени можно пренебречь.

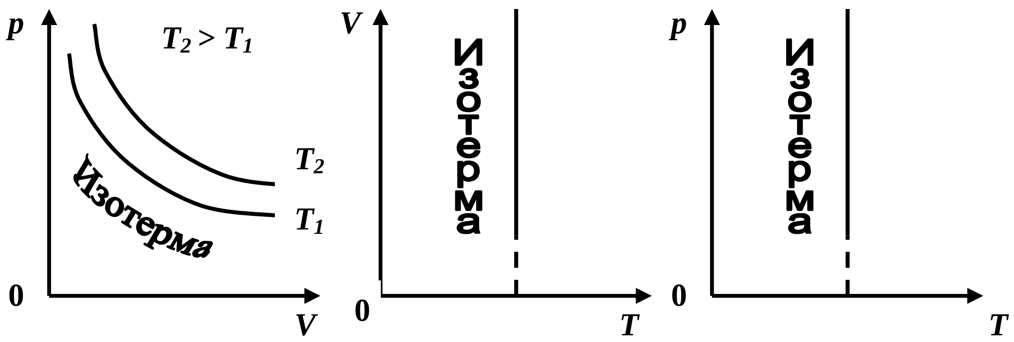


Рис. 113. Зависимость p(V), V(T), p(T) для изотермического процесса

2. **Изобарный процесс** – это процесс квазистатического нагревания или охлаждения газа при постоянном давлении и при условии, что количество вещества ν в сосуде остается неизменным (рис.114).

Закон Гей – Люссака: при постоянном давлении объём данной массы идеального газа прямопропорционален его абсолютной температуре, то есть (при $p = const; m = const$) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$ или

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \qquad (258).$$

Зависимость объема газа от температуры при неизменном давлении была экспериментально исследована французским физиком Ж. Гей-Люссаком (1862 г.). Поэтому уравнение изобарного процесса называют законом Гей-Люссака.

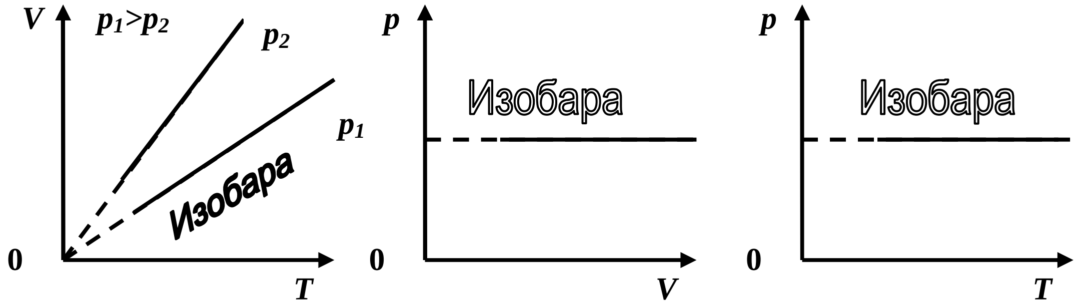


Рис. 114. Зависимость V(T), p(V), p(T) для изобарного процесса

3. **Изохорный процесс** – это процесс квазистатического нагревания или охлаждения газа при постоянном объеме V и при условии, что количество вещества ν в сосуде остается неизменным (рис.115).

Закон Шарля: при постоянном объёме давление данной массы идеального газ прямо пропорционально его абсолютной температуре. Как следует из уравнения Клапейрона ($V = const; m = const$) $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$ или

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \qquad (259).$$

Экспериментально зависимость давления газа от температуры исследовал французский физик Ж. Шарль (1787 г.). Поэтому уравнение изохорного процесса называется законом Шарля.

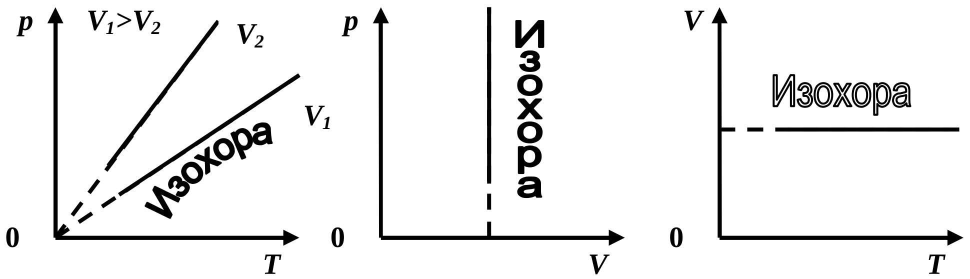


Рис. 115. Зависимость p(T), p(V), V(T) для изохорного процесса

Распределение молекул по скоростям. Закон Максвелла

Предположим, что мы располагаем способом одновременного определения скоростей N-молекул некоторого количества газа. Изобразим полученные результаты в виде точек на оси υ. При этом мы получим «моментальную фотографию» скоростей молекул для некоторого момента времени t. Если бы все значения были одинаково вероятны, точки распределялись бы по оси равномерно (рис.116).

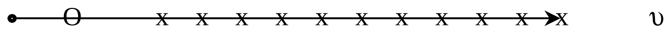


Рис. 116. Скорости молекул

Однако скорости группируются в основном вблизи некоторого, наиболее вероятного значения. Близкие к нулю и очень большие значения скоростей встречаются сравнительно редко. Поэтому распределение точек по оси υ будет неравномерным с плотностью, различной на разных участках оси (рис. 117).

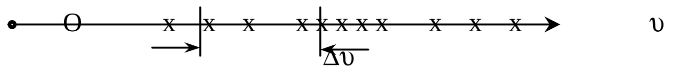


Рис. 117. Распределение точек по оси υ

Отношение числа точек ΔN_υ, попадающих в пределах интервала $\Delta\upsilon$, к величине этого интервала, называется плотностью точек (ρ)

$$\rho(\upsilon) = \frac{\Delta N_\upsilon}{\Delta\upsilon}.$$

Если сопоставить ряд фотографий для разных моментов времени, то плотность будет различна. Для газа, находящегося в равновесном состоянии, то есть для газа с неизменяющимися параметрами, плотность, с которой распределены точки на различных участках оси υ для всех моментов времени будет одна и та же.

Если взять несколько порций газа, находящегося в идентичных условиях, то распределение молекул по скоростям будет также идентично. Однако плотность точек по оси υ при одинаковом характере распределения по оси, очевидно, пропорциональна количеству молекул N и, следовательно, для различных порций газа будет различна. Одинаковым для различных порций будет соотношение

$$f(\upsilon) = \frac{\rho(\upsilon)}{N} = \frac{1}{N}\cdot\frac{\Delta N_\upsilon}{\Delta\upsilon} \qquad (260).$$

Определенная таким образом функция $f(\upsilon)$ характеризует распределение молекул газа по скоростям и называется функцией распределения, где

$\Delta N_\upsilon = \Delta f(\upsilon)\Delta\upsilon$ – число молекул, скорость которых больше υ, но меньше $\upsilon+\Delta\upsilon$; $\frac{\Delta N_\upsilon}{N} = f(\upsilon)\Delta\upsilon$ есть вероятность того, что скорость молекулы будет иметь значение в пределах данного интервала скоростей.

Найдём аналитическое выражение закона распределения молекулярных скоростей. Скорость каждой молекулы изображается вектором. В прямоугольной системе координат вектор скорости υ определяется координатами υ_x, υ_y, υ_z (рис.118). Очевидно, что эти координаты одновременно будут являться компонентами скорости вдоль выбранных осей координат. Тогда число молекул ΔN_{υ_x}, составляющие скорости которых больше υ_x, но меньше $\upsilon_x+\Delta\upsilon_x$ согласно равенству (260), равны

$$\Delta N_{\upsilon_x} = Nf(\upsilon_x)\Delta\upsilon_x \qquad (261).$$

Отношение $\frac{\Delta N_{\upsilon_x}}{N} = f(\upsilon_x)\Delta\upsilon_x$ есть вероятность для произвольно выбранной молекулы обладать скоростью, лежащей в указанном интервале.

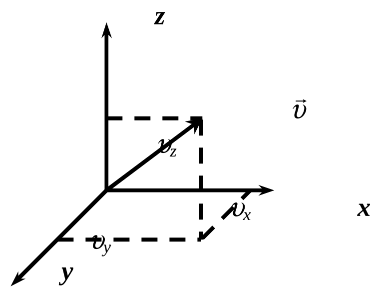


Рис.118. Вектор $\vec{\upsilon}$

Рассуждая аналогично, можно написать выражение вероятности для молекул обладать составляющей скорости вдоль оси y, большей υ_y и меньшей $\upsilon_y+\Delta\upsilon_y$

$$\frac{\Delta N_{\upsilon_y}}{N} = f(\upsilon_y)\Delta\upsilon_y \qquad (262).$$

Вероятность составляющей скорости вдоль оси z, заключенной в пределах от υ_z до $\upsilon_z+\Delta\upsilon_z$

$$\frac{\Delta N_{\upsilon_z}}{N} = f(\upsilon_z)\Delta\upsilon_z. \qquad (263).$$

Из теории вероятности известно, что вероятность совместного осуществления трех независимых событий равна произведению их вероятностей. Поэтому вероятность $\frac{\Delta N_\upsilon}{N}$ для молекулы обладать скоростью, компоненты которой заключены в пределах от υ_x, υ_y, υ_z, до $(\upsilon_x+\Delta\upsilon_x)$, $(\upsilon_y+\Delta\upsilon_y)$, $(\upsilon_z+\Delta\upsilon_z)$ найдется перемножением 3-х вероятностей (261), (262) и (263):

$$\frac{\Delta N_\upsilon}{N} = f(\upsilon_x)\Delta\upsilon_x \cdot f(\upsilon_y)\Delta\upsilon_y \cdot f(\upsilon_z)\Delta\upsilon_z. \qquad (264).$$

Допустим, что нижний предел скорости υ = const, в этом случае

$$\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2=const;\ \upsilon_x\Delta\upsilon_x+\upsilon_y\Delta\upsilon_y+\upsilon_z\Delta\upsilon_z=0.$$

Допустим также, что

$$\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z=\text{const}.$$

При выполнении этих предположений должна оставаться неизменной и вероятность $\frac{\Delta N_\upsilon}{N}$ того, что молекула обладает скоростью, удовлетворяющей сформулированным выше требованиям. Если это так, то

$$d\left(\frac{\Delta N_\upsilon}{N}\right)=0 \qquad (265),$$

$$d\left(\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z\right)=0. \qquad (266).$$

Подставив в равенство (265) равенство (264) и учитывая (266), получим

$$f(\upsilon_y)\cdot f(\upsilon_z)\cdot f'(\upsilon_x)\Delta\upsilon_x+f(\upsilon_z)\cdot f(\upsilon_x)\cdot f'(\upsilon_y)\Delta\upsilon_y+f(\upsilon_x)\cdot(\upsilon_y)\cdot f'(\upsilon_z)\Delta\upsilon_z=0.$$

Разделим полученное уравнение на произведение функций $f(\upsilon_x)f(\upsilon_y)f(\upsilon_z)$, получим

$$\frac{f'(\upsilon_x)}{f(\upsilon_x)}d\upsilon_x+\frac{f'(\upsilon_y)}{f(\upsilon_y)}d\upsilon_y+\frac{f'(\upsilon_z)}{f(\upsilon_z)}d\upsilon_z=0 \qquad (267).$$

Умножим выражение (265) на произвольную величину λ, сложим с уравнением (267), сгруппируем члены в соответствии с индексами у υ и получим

$$\left[\frac{f'(\upsilon_x)}{f(\upsilon_x)}+\lambda\upsilon_x\right]d\upsilon_x+\left[\frac{f'(\upsilon_y)}{f(\upsilon_y)}+\lambda\upsilon_y\right]d\upsilon_y+\left[\frac{f'(\upsilon_z)}{f(\upsilon_z)}+\lambda\upsilon_z\right]d\upsilon_z=0.$$

В силу произвольности величин $d\upsilon_x$, $d\upsilon_y$, $d\upsilon_z$ написанное уравнение может выполняться в том случае, если каждый из стоящих в скобках двучленов порознь равен нулю, то есть

$$\left[\frac{f'(\upsilon_x)}{f(\upsilon_x)}+\lambda\upsilon_x\right]=0 \qquad (268);$$

$$\left[\frac{f'(\upsilon_y)}{f(\upsilon_y)}+\lambda\upsilon_y\right]=0 \qquad (269);$$

$$\left[\frac{f'(\upsilon_z)}{f(\upsilon_z)}+\lambda\upsilon_z\right]=0 \qquad (270).$$

Обозначим $f(\upsilon_x)=y$, тогда $f'(\upsilon_x)=\frac{dy}{d\upsilon_x}$ и (268) перепишется в виде

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{d\upsilon_x}+\lambda\upsilon_x=0.$$

После интегрирования

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \lambda \cdot \upsilon_x dx$$

имеем

$$\ell n y = -\lambda \cdot \frac{\upsilon_x^2}{2} + \ell n A,$$

где A – постоянная интегрирования. Потенцируя данное выражение, получим

$$y = A \cdot e^{-\frac{\lambda \cdot \upsilon_x^2}{2}}.$$

Таким образом, искомое выражение вероятности $\frac{\Delta N_{\upsilon_x}}{N}$ того, что скорость молекулы в направлении оси x, заключенной в пределах от υ_x до $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$ будет равна

$$f(\upsilon_x)\Delta\upsilon_x = A \cdot e^{-\frac{\lambda \cdot \upsilon_x^2}{2}} \Delta\upsilon_x .$$

Аналогичные выражения можно получить из (269) для вероятности того, что скорость молекулы вдоль оси y заключена в пределах от υ_y до $\upsilon_y + \Delta\upsilon_y$ и из (270) для вероятности того, что скорость молекулы в направлении оси z заключена в пределах от υ_z до $\upsilon_z + \Delta\upsilon_z$.

Вероятность совместного события найдется перемножением соответствующих вероятностей, то есть

$$\frac{\Delta N_\upsilon}{N} = A^3 \cdot e^{-\lambda \frac{\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2\right)}{2}} \Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z .$$

Если в этом выражении заменить $\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2 = \upsilon^2$ и определить значение постоянных, то вероятность того, что молекула движется независимо от направления со скоростью, заключенной в пределах от υ до $\upsilon + \Delta\upsilon$, будет выражаться следующим соотношением

$$\frac{\Delta N_\upsilon}{N} = 4 \cdot \pi \cdot \left[\frac{m_0}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot T}\right]^{3/2} \upsilon^2 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot \upsilon^2}{2 \cdot k \cdot T}} \Delta\upsilon,$$

(271),

где m_0 – масса молекулы, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура. Учитывая, что $f(\upsilon)\Delta\upsilon = \frac{\Delta N_\upsilon}{N}$, из (271) получим

$$f(\upsilon) = 4 \cdot \pi \cdot \left[\frac{m_0}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot T}\right]^{3/2} \upsilon^2 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot \upsilon^2}{2 \cdot k \cdot T}} \qquad (272).$$

Это выражение и является искомым законом распределения молекулярных скоростей Максвелла.

Таким образом, конкретный вид функции распределения зависит от рода газа (массы молекул) и от температуры. Давление газа и объем на распределение молекул по скоростям не влияют.

Дж. Максвелл в 1860 г. вывел закон распределения молекул газа по скоростям, исходя из основных положений молекулярно-кинетической теории. На рис. 119 представлены типичные кривые распределения молекул по скоростям. По оси абсцисс отложен модуль скорости, а по оси ординат – относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от υ до $\upsilon + \Delta\upsilon$. Это число равно площади выделенного на рис. 119 столбика.

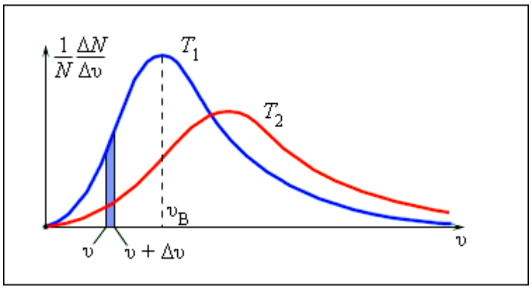


Рис.119. Распределение молекул по скоростям. $T_2 > T_1$

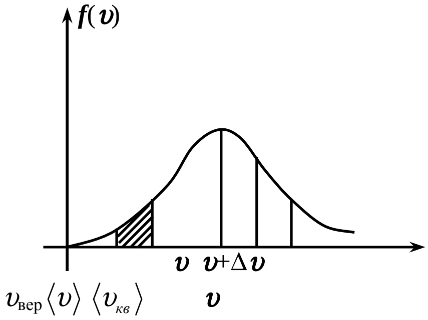


Рис. 120. К закону Максвелла

Из графика (рис.120) видно, что $f(\upsilon)$ функция распределения стремится к нулю при

$$\upsilon \to 0 \text{ и } \upsilon \to \infty.$$

Следовательно, относительное число молекул в газе, обладающее очень малыми и очень большими скоростями ничтожно мало. Скорость, отвечающая максимальному значению функции распределения, будет, очевидно, наиболее вероятной.

Для нахождения максимума функции f(υ) продифференцируем выражение (272), заменяя через $C = 4\cdot\pi\cdot\left[\frac{m_0}{2\cdot\pi\cdot k\cdot T}\right]^{3/2}$

$f(\upsilon) = C\cdot e^{-\frac{m_0\cdot\upsilon^2}{2\cdot k\cdot T}}\cdot\upsilon^2$; $\frac{df(\upsilon)}{d\upsilon} = C\cdot e^{-\frac{m_0\cdot\upsilon^2}{2\cdot k\cdot T}}\cdot\upsilon\left(2-\frac{m\cdot\upsilon^2}{k\cdot T}\right)$ и, приравняв к нулю $\frac{df(\upsilon)}{d\upsilon} = 0$, получим

$$C\cdot e^{-\frac{m_0\cdot\upsilon^2}{2\cdot k\cdot T}}\cdot\upsilon\cdot\left(2-\frac{m_0\cdot\upsilon^2}{k\cdot T}\right) = 0.$$

Значение υ, обращающее в нуль выражение, стоящее в скобках, представляет собой искомое $\upsilon_{вер}$

$$\upsilon_{вер} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{m_0}} \qquad (273).$$

Вычисления показывают, что

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot k \cdot T}{\pi \cdot m_0}} \qquad (274),$$

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_0}} \qquad (275),$$

поэтому $\upsilon_{вер} : \langle \upsilon \rangle : \langle \upsilon_{кв} \rangle = 1 : 1{,}13 : 1{,}22$.

При возрастании температуры средняя скорость $\langle \upsilon \rangle$ и наиболее вероятная скорость $\upsilon_{вер}$ увеличиваются пропорционально $\sqrt{T}$, и максимум распределения сдвигается вправо (рис.119). При этом число медленных молекул убывает, а число быстрых – возрастает. Но **площадь под кривой, равная полному числу всех молекул газа N, остается постоянной**. Необходимо подчеркнуть, что **установленный Максвеллом закон** распределения молекул по скоростям **и все вытекающие из него следствия, справедливы только для газа, находящегося в равновесном состоянии.**

Закон справедлив для любого числа N, если только это число достаточно велико. Закон Максвелла – статистический закон, а законы статистики выполняются тем точнее, чем к большему числу одинаковых объектов они применяются. При малом числе объектов могут наблюдаться значительные отклонения от предсказаний статистики. Следует обратить внимание на то, что при каждом столкновении молекул в газе изменяется не только направление, но и величины скоростей обеих сталкивающихся молекул. Скорости одних молекул при этом увеличиваются, других – уменьшаются. Но число молекул, скорость которых лежит в любом определенном интервале скоростей $\Delta\upsilon$, не меняется.

Если в результате столкновений в единицу времени Δn молекул, обладавших скоростью в интервале $\Delta\upsilon$, изменяют свою скорость, то ровно столько же молекул, обладавших ранее другими скоростями, приобретут в результате столкновений скорость в пределах $\Delta\upsilon$. Как показал Больцман, в результате взаимодействия между молекулами, каким бы ни было исходное распределение скоростей, в конце концов (весьма быстро) устанавливается максвелловское распределение.

Барометрическая формула

Действие силы тяжести приводит к определенному распределению молекулярной плотности по высоте газового столба. Одновременно с изменением плотности изменяется и давление, измеряемое барометром.

Пусть имеется свободный столб газа, поддерживаемый при постоянной температуре. Выделим мысленно столб газа с основанием 1 см^2 (рис.120). Обозначим p_0 давление газа у основании столба, р – давление газа на высоте h. Тогда давление газа на высоте $h + dh$ равно $p + dp$. Причем, давление во втором сечении будет меньше, чем в первом на величину $p + dp$.

Уменьшение давления равно весу столба газа сечением 1 см^2, заключенного между 1-м и 2-м сечениями, который равен $\rho \cdot g \cdot dh$ то есть

$p-(p+dp) = \rho \cdot g \cdot dh$,

где ρ – плотность газа на высоте h.

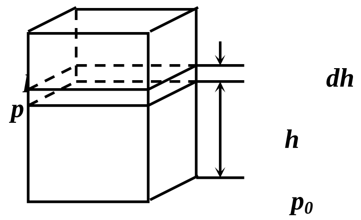


Рис. 120. Столб газа

Отсюда

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dh \qquad (276).$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона следует, что

$$p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T,$$

где V – объем газа, M – молярная масса газа, m – масса газа. Заменим в данном уравнении $\frac{m}{V}$ через ρ – плотность газа

$$\rho = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \qquad (277).$$

Подставим (277) в (276)

$$dp = -\frac{p \cdot M}{R \cdot T} \cdot g dh,$$

разделим переменные и проинтегрируем полученное выражение:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T} dh; \quad \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T} dh; \quad \ell n \frac{p}{p_0} = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T} dh.$$

Потенцируя последнее уравнение, найдем зависимость давления от высоты при сделанном нами допущении о постоянстве температуры:

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{M \cdot g \cdot h}{R \cdot T}} \qquad (278).$$

Эта формула называется барометрической.

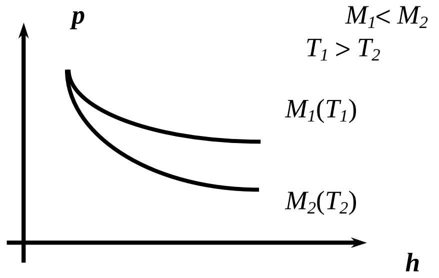


Рис. 121. Зависимость p(h) для газа

Из нее следует, что давление убывает с высотой тем быстрее, чем тяжелее газ (больше *M*) и чем ниже температура (рис.121).

Больцмановское распределение частиц в потенциальном поле. Закон Максвелла-Больцмана

Если в барометрическую формулу (278) подставить основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов в виде $p = n \cdot k \cdot T$, то получим закон изменения с высотой числа молекул в единице объема:

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{M \cdot g \cdot h}{R \cdot T}} \qquad (279),$$

где n_0 – число молекул в единице объема на высоте, равной нулю, n – то же число на высоте h.

Величина $\frac{M}{R} = \frac{m_0 \cdot N_A}{R} = \frac{m_0}{k}$, где m_0 – масса одной молекулы, N_A – число Авогадро, k – постоянная Больцмана. Следовательно,

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot g \cdot h}{k \cdot T}} \qquad (280).$$

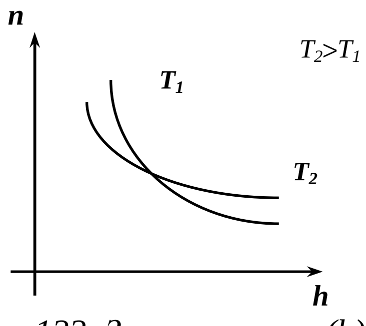


Рис. 122. Зависимость n(h)

Графически эта зависимость изображается следующим образом (рис.122).

Каждое конкретное распределение молекул на высоте устанавливается в результате действия двух тенденций:

1) притяжение молекул к Земле, характеризуемое силой $m \cdot g$, стремится расположить их на поверхности Земли;

2) тепловое движение, характеризуемое величиной $k \cdot T$, стремится разбросать молекулы равномерно по поверхности Земли.

Чем больше m_0 и меньше T, тем сильнее преобладает первая тенденция, и молекулы сгущаются у поверхности Земли. При высоких температурах преобладает тепловое движение, и плотность молекул медленно убывает с высотой. На разной высоте молекула обладает различным запасом потенциальной энергии

$$\varepsilon_p = m_0 \cdot g \cdot h \qquad (281).$$

Следовательно, распределение молекул по высоте является вместе с тем и распределением их по значениям потенциальной энергии. Подставляя (281) в (279), получим распределение Больцмана в виде

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{\varepsilon_p}{k \cdot T}} \qquad (282),$$

где n_0 – число молекул в единице объема, в том месте, где $\varepsilon_p = 0$, n – число молекул, где потенциальная энергия молекулы равна ε_p.

Выражение (282) показывает, что **молекулы располагаются с большей плотностью там, где меньше их потенциальная энергия и, наоборот, с меньшей плотностью в местах, где их потенциальная энергия больше**.

Если взять отношения n_1 и n_2 в точках, где потенциальная энергия молекулы имеет значение ε_{p_1} и ε_{p_2}, то

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2}}{k \cdot T}} \qquad (283).$$

Больцман показал, что распределение (282) и вытекающее из него выражение (283) справедливо не только в случае потенциального поля сил земного тяготения, но и в любом потенциальном поле сил для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения.

Таким образом, закон Максвелла дает распределение частиц по значениям кинетической энергии, закон Больцмана дает распределение частиц по значениям потенциальной энергии. Для обоих распределений характерно наличие экспоненциального множителя, в показателе которого стоит отношение кинетической или соответственно потенциальной энергии одной молекулы к величине, определяющей среднюю энергию теплового движения молекул. Эти два распределения можно объединить в один закон Максвелла-Больцмана. Согласно распределению Максвелла, количество молекул, содержащихся в единице объема, скорость которых лежит между υ и $\upsilon + d\upsilon$ равно

$$dn = n \cdot f(\upsilon) d\upsilon \qquad (284),$$

где

$$f(\upsilon) = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{m_0}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot T} \right)^{3/2} \upsilon^2 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot \upsilon^2}{2 \cdot k \cdot T}} \qquad (285).$$

Подставляя (282) и (285) в (284), получим закон Максвелла-Больцмана

$$dn_{\varepsilon_p, \upsilon} = n_0 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{m_0}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{\left(\varepsilon_p + \frac{m_0 \cdot \upsilon^2}{2} \right)}{k \cdot T}} \cdot \upsilon^2 d\upsilon$$

(286),

или

$$dn_{\varepsilon_p,\upsilon} \approx e^{-\frac{E}{k\cdot T}} \cdot \upsilon^2 d\upsilon \qquad (287),$$

где E – полная энергия молекулы.

Экспериментальный метод определения числа Авогадро

В газе, находящемся в поле силы тяжести, число молекул в единице объема убывает с высотой. Если число молекул в единице объема на нулевой высоте равно n_0, то на высоте h оно равно

$$n_h = n_0 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot g \cdot h}{k\cdot T}} \qquad (288),$$

где m_0 – масса молекулы, g – ускорение силы тяжести, k – постоянная Больцмана, T – температура по шкале Кельвина.

Эта формула была применена Перреном для броуновских частиц и использована для определения числа Авогадро.

Взвешенные в жидкости, очень мелкие твердые частицы, находящиеся в состоянии непрерывного беспорядочного движения, называются броуновскими частицами. Принимая участие в тепловом движении, эти частицы должны вести себя подобно гигантским молекулам и для них должны выполняться закономерности кинетической теории, в частности, закон (288).

Во время опыта по определению числа Авогадро была взята стеклянная трубка с эмульсией глубиной 0,1 мм и помещена под микроскоп. Микроскоп имел столь малую глубину поля зрения, что в него были видны только частицы, находящиеся в горизонтальном слое толщиной примерно один микрон. Перемещая микроскоп в вертикальном направлении, можно было исследовать распределение броуновских частиц по высоте.

Обозначим высоту слоя, видимого в микроскоп над дном кюветы буквой h. Число частиц, попадающих в поле зрения микроскопа, определяется формулой

$$\Delta N = n(h) \cdot s \cdot \Delta h,$$

где $n(h)$ – число броуновских частиц в единице объема на высоте h, s – площадь, Δh - глубина поля зрения микроскопа.

Согласно формулы (288), можно записать для броуновских частиц, что

$$n(h) = n_0 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot g \cdot h}{k\cdot T}},$$

где $m \cdot g$ – сила тяжести броуновской частицы в эмульсии, взятая с учетом закона Архимеда.

Запишем выражение числа частиц Δh для двух разных высот h_1 и h_2 и получим

$$\Delta N_1 = n_0 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot g \cdot h_1}{k \cdot T}} \cdot s \cdot \Delta h,$$

$$\Delta N_2 = n_0 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot g \cdot h_2}{k \cdot T}} \cdot s \cdot \Delta h.$$

Возьмем отношение этих двух величин и, прологарифмировав данное выражение, получим

$$\ell n \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{m_0 \cdot g \cdot (h_2 - h_1)}{k \cdot T}.$$

Измеряя $m \cdot g$, T, $(h_2 - h_1)$, ΔN_1 и ΔN_2, можно определить постоянную Больцмана:

$$k = \frac{m_0 \cdot g \cdot (h_2 - h_1)}{T \cdot \ell n \dfrac{\Delta N_1}{\Delta N_2}}.$$

Число Авогадро связано с k соотношением $k = \dfrac{R}{N_A}$, откуда $N_A = \dfrac{R}{k}$, где R – универсальная газовая постоянная, то есть

$$N_A = \frac{R \cdot T \cdot \ell n \dfrac{\Delta N_1}{\Delta N_2}}{m_0 \cdot g \cdot (h_2 - h_1)}.$$

Исходя из данных этого эксперимента, Перрен получил значение N_A в пределах от $6{,}5 \cdot 10^{26}$ до $7{,}2 \cdot 10^{26}$ кмоль$^{-1}$. Определенное другими, более точными методами, значение $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{26}$ кмоль$^{-1}$.

Таким образом, значение, полученное Перреном, находится в хорошем согласии со значениями, полученными другими методами, что доказывает применимость к броуновским частицам закона распределения Больцмана.

Эффективный диаметр молекулы. Число столкновений и средняя длина свободного пробега молекулы

Молекулы газа, находясь в тепловом движении, непрерывно сталкиваются друг с другом. **Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется эффективным диаметром молекулы** d (рис.123). **Путь, который проходит молекула за время между двумя последовательными соударениями, называется длиной свободного пробега** (ℓ)**.**

Длина свободного пробега случайная величина. Поэтому имеет смысл ввести понятие средней арифметической длины свободного пробега. Средняя арифметическая величина свободных пробегов называется средней длиной свободного пробега, то есть

$$\overline{\ell} = \frac{\ell_1 + \ell_2 + ... + \ell_z}{z} \qquad (289),$$

где z – число соударений.

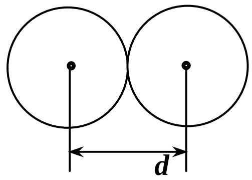


Рис. 123. Эффективный диаметр молекулы

Число свободных пробегов за какой-то промежуток времени совпадает с числом соударений молекулы за тоже время. Если за 1 с молекула испытала z соударений, то длина её траектории, численно равная средней скорости её движения, будет состоять из z свободных пробегов.

Отношение средней скорости движения молекулы к средней длине свободного пробега определяет среднее число соударений

$$\overline{z} = \frac{\overline{\upsilon}}{\overline{\ell}} \qquad (290).$$

Для вычисления средней длины свободного пробега молекулы предположим, что все молекулы газа, за исключением одной, неподвижны и распределены равномерно по всему объему. Будем считать, что скорость движущейся молекулы совпадает со средней скоростью молекулярного движения идеального газа. Двигаясь, молекула соударяется с другими всякий раз, когда она приближается к ним настолько, что расстояние между их центрами делается равным эффективному диаметру молекулы (рис.124).

Опишем вокруг движущейся молекулы сферу радиусом, равным эффективному диаметру молекулы, и назовем её сферой ограждения молекулы. Всякий раз, когда движущаяся молекула сближается с какой-либо другой молекулой настолько, что центр последней находится на поверхности сферы ограждения, происходит соударение молекул. При движении молекулы сфера ограждения вырезает в пространстве цилиндр с основанием πd^2.

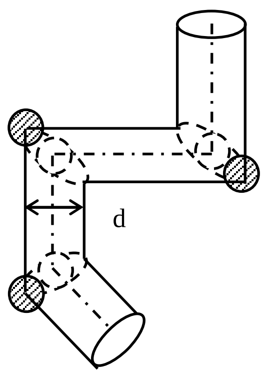


Рис. 124. К движению молекулы

Если молекула движется в течение 1 с, то высота этого цилиндра равна средней скорости молекулы $\overline{\upsilon}$, а объем, вырезанный сферой ограждения, составляет

$$V = \pi \cdot d^2 \cdot \overline{\upsilon} \qquad (291).$$

Очевидно, что соударения будут происходить всякий раз, когда центр встречной молекулы будет находиться вблизи цилиндра, вырезанного сферой ограждения. Следовательно, для определения среднего числа соударений $\overline{z}$ достаточно подсчитать число молекул газа, центры которых находятся вблизи указанного цилиндра. Это число равно произведению объема цилиндра V на количество молекул газа в единице объема n_0.

Таким образом, среднее число соударений молекулы за одну секунду равно

$$\overline{z} = n_0 \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \overline{\upsilon} \qquad (292).$$

При получении этого соотношения все молекулы газа, кроме одной, считались неподвижными.

Более строгая теория показывает, что при учёте движения всех молекул и при условии, что скорости молекулярного движения распределены согласно закону Максвелла, среднее число соударений молекулы за 1 с будет несколько больше и может быть подсчитано по уравнению

$$\overline{z} = \sqrt{2} \cdot n_0 \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \overline{\upsilon} \qquad (293).$$

Зная среднее число соударений молекулы, можно определить среднюю длину пробега молекулы

$$\overline{\ell} = \frac{\overline{\upsilon}}{\overline{z}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot n_0 \cdot \pi \cdot d^2}, \qquad (294),$$

где n_0 – число молекул газа в единице объема.

Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории

$$n_0 = \frac{p}{k \cdot T} \qquad (295),$$

подставив (295) в (294), получим

$$\overline{\ell} = \frac{k \cdot T}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot p} \qquad (296).$$

Таким образом, при **постоянной температуре средний свободный пробег молекулы обратно пропорционален давлению**. При повышении температуры средняя длина пробега несколько растет. Зависимость ℓ от T дается формулой Сёзерленда

$$\ell = \ell_\infty \cdot \frac{T}{T + C} \qquad (297),$$

где C – характерная для каждого газа постоянная величина, имеющая размерность температуры и носящая название постоянной Сёзерленда, ℓ_∞ – средняя длина свободного пробега при $T \to \infty$.

Явления переноса в термодинамически неравновесных системах

До сих пор мы рассматривали газ, находящийся в равновесном состоянии. Такое состояние газа характеризуется тем, что параметры газа (объем, давление, температура) не изменяются. Теперь рассмотрим явления, возникающие при отклонении газа от равновесия, причем ограничимся случаями, когда отклонения невелики. Подобные явления называются явлениями переноса.

Явления переноса – необратимые процессы в термодинамически неравновесных системах, в результате которых происходит пространственный перенос энергии, массы или импульса (таблица 8).

Таблица 8

Общие сведения о явлениях переноса (одномерный случай)

Явление переноса	Переносимая физическая величина	Закон, описывающий явление переноса	Коэффициенты λ, D и η
Теплопроводность	Энергия	Закон Фурье $j_E = -\lambda \cdot \dfrac{dT}{dx}$ (298)	$\lambda = \dfrac{1}{3} \cdot c_V \cdot \rho \cdot \langle \upsilon \rangle \cdot \langle l \rangle$
Диффузия	Масса	Закон Фика $j_m = -D \cdot \dfrac{d\rho}{dx}$ (299)	$D = \dfrac{1}{3} \cdot \langle \upsilon \rangle \cdot \langle l \rangle$
Внутреннее трение (вязкость)	Импульс	Закон Ньютона $j_p = -\eta \cdot \dfrac{d\upsilon}{dx}$ (300)	$\eta = \dfrac{1}{3} \cdot \rho \cdot \langle \upsilon \rangle \cdot \langle l \rangle$

В таблице 8: j_E, j_m, j_p – соответственно плотность теплового потока, плотность потока массы и плотность потока импульса; λ, D, η – соответственно коэффициенты теплопроводности, диффузии и динамической вязкости; $\dfrac{dT}{dx}, \dfrac{d\rho}{dx}, \dfrac{d\upsilon}{dx}$ – соответственно градиенты температуры, плотности и скорости; c_V – удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме; ρ – плотность газа; $\langle \upsilon \rangle$ – средняя скорость теплового движения молекул; $\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул.

$$[\lambda] 1\frac{Вт}{м \cdot К};\ [D] 1\frac{м^2}{с};\ [\eta] 1\, Па \cdot с.$$

Теплопроводность – один из видов явлений переноса, заключающийся в том, что если в одной области газа средняя кинетическая энергия молекул больше, чем в другой, то с течением времени вследствие постоянных столкновений молекул происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, то есть выравнивание температур.

В законе Фурье (298) знак минус показывает, что энергия переносится в направлении убывания температуры; ось x ориентирована в направлении переноса энергии.

Плотность теплового потока j_E – величина, определяемая энергией, переносимой в форме теплоты в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси x.

Градиент температуры $\frac{dT}{dx}$ – определяется скоростью изменения температуры на единицу длины x в направлении нормали к площадке.

Коэффициент теплопроводности (теплопроводность) λ равен плотности теплового потока при градиенте температуры, равном единице.

Диффузия – один из видов явлений переноса, заключающихся в том, что происходит самопроизвольное проникновение и перемешивание частиц двух соприкасающихся газов, жидкостей и даже твёрдых тел; диффузия сводится к обмену масс частиц этих тел, возникает и продолжается, пока существует градиент плотности.

В законе Фика (299) ось x ориентирована в направлении переноса массы. Знак минус показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности.

Плотность потока массы j_m – величина, определяемая массой вещества, диффундирующего в единицу времени через площадку, перпендикулярную оси x.

Градиент плотности $\frac{d\rho}{dx}$– определяется скоростью изменения плотности на единицу длины x в направлении нормали к площадке.

Коэффициент диффузии (диффузия) D равен плотности потока массы при градиенте плотности, равном единице.

Внутреннее трение (вязкость) – один из видов явлений переноса, заключающийся в том, что из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между слоями, в результате чего импульс слоя, движущегося быстрее уменьшается, движущегося медленнее – увеличивается, что приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее.

Взаимодействие двух слоёв, согласно второму закону Ньютона, можно рассматривать как процесс, при котором от одного слоя к другому в единицу времени переносится импульс, по модулю равный действующей силе. Тогда выражение для силы внутреннего трения между слоями газа (жидкости), определяемого законом Ньютона $F = \eta \cdot \left|\frac{d\upsilon}{dx}\right|$ (S – площадь, на которую действует сила F), можно представить в виде (300).

В законе Ньютона (300) ось x ориентирована в направлении переноса импульса. Знак минус показывает, что импульс переносится в направлении убывания скорости.

Плотность потока импульса j_p – величина, определяемая полным импульсом, переносимым в единицу времени в положительном направлении x через единичную площадку, перпендикулярную оси x.

Градиент скорости $\frac{d\upsilon}{dx}$ – определяется быстротой изменения скорости на единицу длины x в направлении нормали к площадке.

Динамическая вязкость η – равна плотности потока импульса при градиенте скорости равном единице.

Закономерности всех явлений переноса сходы между собой. Законы Фурье, Фика и Ньютона были установлены задолго до того, как они были обоснованы и выведены из молекулярно-кинетической теории, позволившей установить, что внешнее сходство их математических выражений обусловлено общностью лежащего в основе явлений теплопроводности, диффузии и внутреннего трения молекулярного механизма перемешивания молекул в процессе их хаотического движения и столкновений друг с другом.

Формулы для коэффициентов теплопроводности, диффузии и внутреннего трения связывают коэффициенты переноса и характеристики теплового движения молекул. Из этих выражений вытекают следующие зависимости между λ, D, η:

$$\eta = \rho \cdot D \qquad (301),$$

$$\frac{\lambda}{\eta \cdot c_V} = 1 \qquad (302).$$

Основы термодинамики

Внутренняя энергия системы. Работа. Количество теплоты

В отличие от молекулярно-кинетической теории термодинамика рассматривает разнообразные физические явления не с точки зрения их механизма, а с точки зрения тех превращений энергии, которыми эти явления сопровождаются.

Исторически термодинамика возникает как раздел физики, изучающий соотношение между теплотой, работой и внутренней энергией системы. Для описания состояния системы вводится понятие о параметрах состояния системы. К ним следует отнести объем, давление, температуру.

Параметры состояния не являются независимыми переменными, их связывает соотношение, называемое **уравнением состояния**, которое можно записать в общем случае в виде

$$F\,(p,\,V,\,T) = 0 \qquad (303).$$

Величины, однозначно определяемые параметрами состояния, называются функциями состояния. Важнейшей функцией состояния является внутренняя энергия системы. Внутренней энергией системы называют общий запас энергии, которым обладает термодинамическая система.

Из молекулярно-кинетической теории известно, что внутренняя энергия тела складывается из кинетической энергии движения молекул и потенциальной энергии их взаимного расположения.

Покажем, что внутренняя энергия является функцией состояния. Предположим, что термодинамическая система находится в состоянии *1* с параметрами p_1,V_1,T_1. Внутренняя энергия имеет в этом случае единственное значение $U_1 = U(p_1,V_1,T_1)$. Переведем рассматриваемую систему из состояния *1* в состояние *2* с параметрами p_2,V_2,T_2. Значение энергии в этом случае $U_2 = U(p_2,V_2,T_2)$. Разница во внутренних энергиях при переходе системы из первого состояния во второе $\Delta U = U_2 - U_1$ будет иметь одно и то же значение, вне зависимости от того, каким путем совершается переход из одного состояния в другое (рис.125) по *abc* или по *adc*. Это справедливо для всех функций состояния, то есть для любой функции состояния изменение её при переходе системы из одного состояния в другое не зависит от пути перехода.

Рассмотрим два важнейших понятия термодинамики: теплоту и работу и покажем, что они не являются функцией состояния.

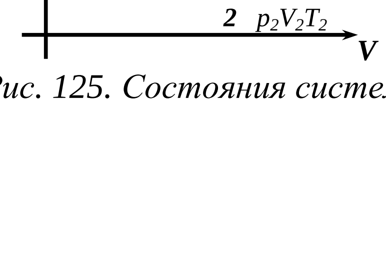


Рис. 125. Состояния системы 1 и 2

Пусть система переходит из состояния *1* с параметрами p_1,V_1,T_1 в состояние *2* с параметрами p_2,V_2,T_2 по различным путям: в первом случае по кривой *a*bc, во втором случае по кривой *a*dc.

Элементарная работа dA при элементарном изменении объема ΔV определяется как

$$dA = p \cdot dV \qquad (304),$$

где $p = const$.

Полная работа найдётся интегрированием

$$A_{1.2} = \int_{V_1}^{V_2} pdV \qquad (305).$$

Работа численно равна площади под графиком процесса на диаграмме p,V (рис. 126).

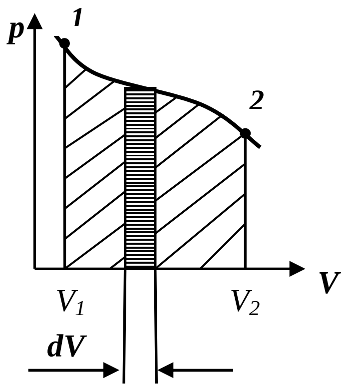


Рис. 126. Графическое представление работы

Величина работы зависит от того, каким путем совершался переход из начального состояния в конечное. На рис. 127 изображены три различных процесса, переводящих газ из состояния (1) в состояние (2). Во всех трех случаях газ совершает различную работу. Во всех трех случаях газ совершает разную работу, равную площади под графиком процесса.

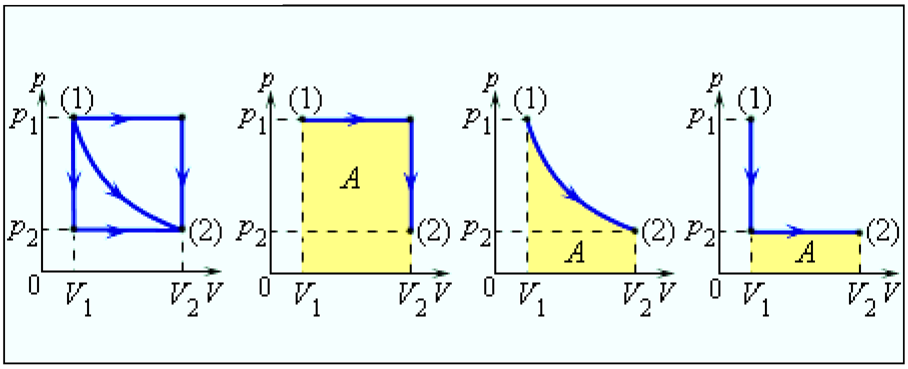


Рис. 127. Три различных пути перехода из состояния (1) в состояние (2)

Таким образом, работа, затрачиваемая или получаемая системой при переходе системы из одного состояния в другое, зависит от пути перехода и, следовательно, не является функцией состояния.

Поскольку работа не является функцией состояния, не имеет смысла говорить о количестве работы в какой-либо системе, то есть представление о количестве работы не имеет физического смысла.

Аналогично, не имеет физического смысла и понятие количества теплоты. Для доказательства этого рассмотрим один моль газа, занимающий при температуре T_1 и давлении p_1 объем V_1. На диаграмме pV

это состояние изображается точкой *1* (рис.128).

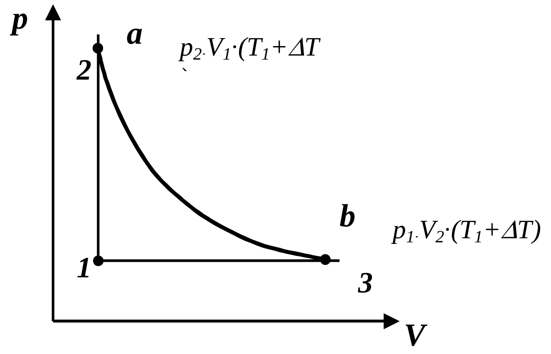


Рис.128. Диаграмма pV

Сообщим системе некоторое количество теплоты ΔQ, необходимое для того, чтобы температура повысилась на ΔT. В зависимости от давления газа один моль газа может занимать различные объемы при температуре $T_1+\Delta T$, на диаграмме pV эти состояния образуют изотерму *a*b.

Вертикальная прямая соответствует нагреванию при постоянном объеме, для которого требуется количество теплоты

$$\Delta Q_{1.2} = C_V \cdot \Delta T,$$

где C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Горизонтальная прямая 1–3 соответствует нагреванию при p = const, которому требуется количество теплоты

$$\Delta Q_{1.3} = C_p \cdot \Delta T,$$

где C_p – молярная теплоемкость при $p = const$. Так как $C_p > C_V$, то

$$\Delta Q_{1.3} > \Delta Q_{1.2}.$$

Таким образом, количество теплоты, необходимое для нагревания вещества в первом и втором случаях будет различным. То есть при переходе вещества из одного состояния в другое количество теплоты, в зависимости от пути перехода, имеет различное значение. Поэтому, как и в случае работы, не имеет смысла говорить о количестве теплоты, которой обладает система. Итак, параметры состояния могут однозначно определять только внутреннюю энергию системы.

Внутренняя энергия – однозначная функция термодинамического состояния системы, то есть в каждом состоянии система обладает вполне определённой внутренней энергией (она не зависит от того, как система пришла в данное состояние). Это означает, что при переходе системы из одного состояния в другое изменение внутренней энергии определяется только разностью значений внутренних энергий этих состояний и не зависит от пути перехода.

Внутреннюю энергию можно изменить, совершив работу, или с помощью теплопередачи (передав количество теплоты).

Внутренняя энергия тела может изменяться, если действующие на него внешние силы совершают работу (положительную или отрицательную). Например, если газ подвергается сжатию в цилиндре под поршнем, то внешние силы совершают над газом некоторую положительную работу A'. В то же время силы давления, действующие со стороны газа на поршень, совершают работу $A = -A'$.

При тепловом контакте тел внутренняя энергия одного из них может увеличиваться, а другого – уменьшаться. В этом случае говорят о тепловом потоке от одного тела к другому. Количеством теплоты Q, полученным телом, называют изменение внутренней энергии тела в результате теплообмена.

Передача энергии от одного тела другому в форме тепла может происходить только при наличии разности температур между ними. Тепловой поток всегда направлен от горячего тела к холодному.

Количество теплоты Q является энергетической величиной. В СИ $[Q]1\ Дж;\ [A]1\ Дж; [U]1\ Дж.$

Процессы, связанные с поглощением теплоты: нагревание, плавление, парообразование. С выделением – охлаждение, кристаллизация, конденсация, сгорание топлива.

При нагревании (охлаждении)

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta t = c \cdot m \cdot \Delta T \qquad (306),$$

плавлении (кристаллизации)

$$Q = \lambda \cdot m \qquad (307),$$

парообразовании (конденсации)

$$Q = r \cdot m \qquad (308),$$

сжигании топлива

$$Q = g \cdot m \qquad (309).$$

В формулах (306 – 309) известных из школьного курса физики c, λ, r, g – соответственно удельная теплоёмкость, удельная теплота плавления, удельная теплота парообразования, удельная теплота сгорания топлива (табличные величины).

Для замкнутой системы ($\Delta U_i = Q_i$) суммарная внутренняя энергия не меняется

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 + ... = 0 \ \Rightarrow$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + ... = 0 \qquad (310).$$

(310) – уравнение теплового баланса.

Первое начало термодинамики

Итак, если к системе подводить или отводить некоторое количество теплоты, то внутренняя энергия его будет изменяться, то есть подвод к системе или отвод от неё теплоты является одним из способов изменения внутренней энергии системы.

Вторым способом изменения внутренней энергии системы является совершение системой некоторой работы или совершение работы над системой. Действительно, если совершать работу, быстро сжать газ, он нагреется и его внутренняя энергия возрастает. Наоборот, если предоставить газу расширяться не подводя к нему теплоты, газ будет охлаждаться, то есть его внутренняя энергия будет убывать.

Передача теплоты и совершение работы – это формы движения материи, в результате которых и только благодаря которым, изменяется внутренняя энергия системы.

На рис. 129 условно изображены энергетические потоки между выделенной термодинамической системой и окружающими телами. Величина $Q > 0$, если тепловой поток направлен в сторону термодинамической системы. Величина $A > 0$, если система совершает положительную работу над окружающими телами.

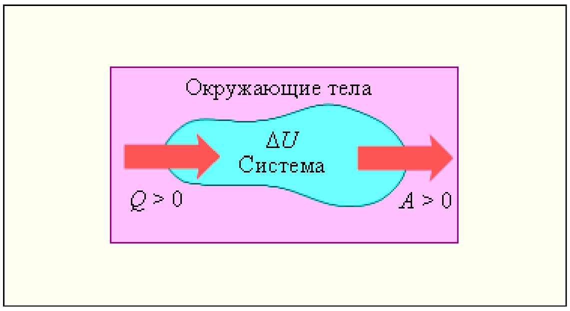


Рис. 129. Обмен энергией между термодинамической системой и окружающими телами в результате теплообмена и совершаемой работы

Если система обменивается теплом с окружающими телами и совершает работу (положительную или отрицательную), то изменяется состояние системы, то есть изменяются её макроскопические параметры (температура, давление, объем). Так как внутренняя энергия U однозначно определяется макроскопическими параметрами, характеризующими состояние системы, то отсюда следует, что процессы теплообмена и совершения работы сопровождаются изменением ΔU системы.

Таким образом, для изменения внутренней энергии можно записать, что

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta A, \qquad (311),$$

где ΔQ – сообщаемое системе количество тепла, ΔA – работа, совершенная системой.

Уравнение (311) можно переписать в виде

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A \qquad (312)$$

или

$$dQ = dU + dA \qquad (313).$$

Следует отметить, что (313) более корректно нужно записать так:

$$\partial Q = dU + \partial A \qquad (313^*).$$

Здесь dU – бесконечно малое изменение внутренней энергии системы; ∂A – элементарная работа; ∂Q – бесконечно малое количество теплоты. В этом выражении dU является полным дифференциалом, а ∂A и ∂Q таковыми не являются.

Это и есть обычная математическая формулировка первого начала термодинамики, которая гласит: **количество теплоты, сообщенное телу, идет на увеличение его внутренней энергии и на совершение телом работы.**

Первое начало термодинамики – это закон сохранения и превращения энергии: при разнообразных процессах, протекающих в природе, энергия не возникает из ничего и не исчезает, но превращается лишь из одних видов в другие.

Этот закон обобщает многовековой опыт человека. Он может быть сформулирован несколько иначе, исходя из следующих соображений. Долгое время человечество пыталось построить **машину, которая бы производила работу, не потребляя эквивалентного количества энергии**. **Такая машина называется вечным двигателем первого рода**. Поэтому первое начало термодинамики записывают в виде утверждения: **невозможно построить вечный двигатель первого рода.**

Степени свободы молекул. Закон Больцмана о равномерном распределение энергии по степеням свободы

Число степеней свободы молекул – число независимых переменных, полностью определяющих положение системы в пространстве.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения любой молекулы определяется выражением

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \qquad (314).$$

Энергия, приходящаяся на поступательную степень свободы

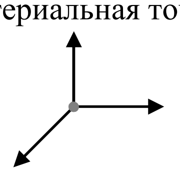
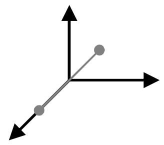
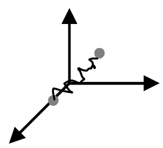
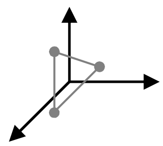
$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{\langle \varepsilon_0 \rangle}{3} = \frac{k \cdot T}{2} \qquad (315).$$

Независимо от общего числа степеней свободы молекул три степени свободы всегда поступательные. Ни одна из поступательных степеней свободы не имеет преимущества перед другими, поэтому на каждую из них приходится в среднем одинаковая энергия, равная $\frac{1}{3}$ значения $\langle \varepsilon_0 \rangle$.

Ниже (таблица 9) приведены данные по числу степеней свободы для различных моделей молекул.

Таблица 9

Число степеней свободы для различных моделей молекул

Газ	Модель газа	Число степеней свободы			
		$i_{пост}$	$i_{вращ}$	$i_{колеб}$	всего
Одноатомный	материальная точка 	3	-	-	3
Двухатомный	Две материальные точки, жёсткая связь 	3	2	-	5
Двухатомный	Две материальные точки, нежёсткая связь 	3	2	2	7
Трёхатомный, многоатомный	Три (много) атома, жёсткая связь 	3	3	-	6

В классической кинетической теории молекулы, состоящие из одного атома, принимались за идеально гладкие твердые шарики, у которых отсутствовало вращательное движение. На этом основании считают, что одноатомные молекулы обладают только тремя степенями свободы поступательного движения. У двухатомной молекулы к трем степеням свободы поступательного движения следовало бы добавить три степени свободы вращательного движения. Эти три степени свободы соответствуют трем взаимно перпендикулярным осям вращения. Однако одну из осей вращения можно совместить с осью молекулы (рис. 130).

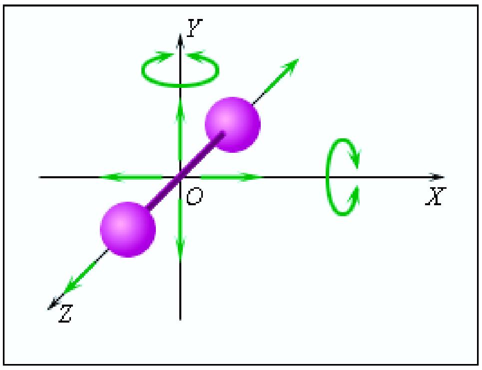


Рис. 130. Модель двухатомной молекулы. Точка О совпадает с центром масс молекулы

Таким образом, всем двухатомным молекулам следует приписать две степени свободы вращательного движения. Общее число степеней свободы двухатомной молекулы равно пяти. Это число совпадает с числом независимых координат, необходимых для определения положения двухатомной молекулы в пространстве.

Для многоатомной молекулы с нелинейным расположением атомов сохраняется три степени свободы вращательного движения и поэтому общее число степеней свободы, обусловленное поступательным и вращательным движением молекулы, равно шести.

В приведенном подсчете числа степеней свободы принималось, что атомы в молекулах закреплены неподвижно и не могут колебаться друг относительно друга. Опыт показывает, что при комнатной температуре для двухатомных газов это предположение оправдывается.

Для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная $\frac{k \cdot T}{2}$, а на каждую колебательную степень свободы – в среднем энергия, равная $k \cdot T$. Колебательная степень «обладает» вдвое большей энергией потому, что на неё приходится не только кинетическая энергия (как в случае поступательного и вращательного движений), но и потенциальная, причём среднее значение кинетической и потенциальной энергий одинаковы.

Таким образом, средняя кинетическая энергия молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} \cdot k \cdot T \qquad (316),$$

где $i = i_{пост} + i_{вращ} + 2 \cdot i_{колеб}$ (i– сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы).

В школьном курсе физики рассматривался идеальный одноатомный газ, поэтому для нахождения внутренней энергии газа использовалась формула

$$U = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \qquad (317).$$

В общем случае **внутренняя энергия произвольной массы газа**

$$U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot T = \frac{i}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot T \qquad (318).$$

Теплоёмкости. Уравнение Майера

Теплоемкостью какого-либо **тела** называется величина, равная количеству тепла, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один градус. Если сообщение телу количества тепла dQ повышает его температуру на dT, то теплоемкость по определению равна

$$C_{тела} = \frac{dQ}{dT} \qquad (319).$$

$[C]$ 1 Дж/К.

Теплоемкость моля вещества называется молярной теплоемкостью

$$C_m = \frac{\partial Q}{\nu dT} \qquad (320).$$

$[C_m]$ 1 Дж/моль·К.

Удельная теплоёмкость c – величина, определяемая количеством теплоты, необходимым для нагревания 1 кг вещества на 1 К

$$c = \frac{\partial Q}{m dT} \qquad (321).$$

$[c]$ 1 Дж/(кг·К).

Между молярной и удельной теплоемкостями имеется соотношение

$$C_m = c \cdot M \qquad (322).$$

Величина теплоемкости зависит от условий, при которых происходит нагревание тела. Наибольший интерес представляет теплоемкость для случаев, когда нагревание происходит при постоянном объеме или при постоянном давлении. Если нагревание происходит при постоянном объеме, тело не совершает работы над внешними телами и, следовательно, согласно первому началу термодинамики

$$dQ = dA + dU,$$

все тепло идет на приращение внутренней энергии

$$dA = 0, \quad dQ = dU.$$

Отсюда вытекает, что теплоемкость любого тела при постоянном объеме равна

$$C_V = \frac{dU}{dT} \qquad (323).$$

Следовательно, чтобы получить молярную теплоемкость идеального газа при постоянном объеме, нужно продифференцировать по температуре выражение для внутренней энергии. Для одного моля газа

$$U = \frac{i}{2} R \cdot T\ .$$

Молярная теплоемкость при постоянном объеме $C_V = \dfrac{dU}{dT} \Rightarrow$

$$C_V = \frac{i}{2} \cdot R \qquad (324).$$

Из этого выражения следует, что теплоемкость идеального газа при постоянном объеме оказывается постоянной величиной, не зависящей от параметров состояния газа, в частности, от температуры. Введя понятие молярной теплоемкости при V = const, можно записать следующее выражение для внутренней энергии идеального газа:

$$U = C_V \cdot T \qquad (325).$$

Если нагревание газа происходит при постоянном давлении, то газ будет расширяться, совершая над внешними телами положительную работу. Следовательно, для повышения температуры газа на один градус в этом случае понадобится больше тепла, чем при нагревании при постоянном объеме – часть тепла будет затрачиваться на совершение газом работы.

Напишем уравнение первого начала термодинамики для моля газа:

$dQ = dU + dA$, учтем, что $dA = pdV$; $dQ = dU + pdV$.

Разделив на dT, получим выражение для молярной теплоемкости при постоянном давлении $\dfrac{dQ}{dT} = C_p$,

$$C_p = \frac{dU}{dT} + p \cdot \frac{dV}{dT} \qquad (326).$$

Слагаемое $\dfrac{dU}{dT} = C_V$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме, поэтому

$$C_p = C_V + p \cdot \frac{dV}{dT} \qquad (327).$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона для одного моля газа следует, что $p \cdot V = R \cdot T$. Дифференцируя это выражение по T, находим, что

$$p \cdot \frac{dV}{dT} + V \cdot \frac{dp}{dT} = R \qquad (328).$$

Учитывая, что $\frac{dp}{dT} = 0$, получим

$$p \cdot \frac{dV}{dT} = R \qquad (329),$$

тогда

$$C_p = C_V + R \qquad (330).$$

Для идеального газа молярная теплоемкость при постоянном давлении превышает молярную теплоемкость при постоянном объеме на величину R – универсальную газовую постоянную. Из выражения (330) следует, что **работа, которую совершает моль идеального газа при повышении его температуры на один градус при постоянном давлении, оказывается равной универсальной газовой постоянной**. В этом и заключается ее физический смысл. Так как

$$C_V = \frac{i}{2} R \qquad (331),$$

то

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R \qquad (332).$$

Величина отношения $\frac{C_p}{C_V}$, обозначаемая γ, называется коэффициентом Пуассона

$$\gamma = \frac{C_V + R}{C_V} = \frac{i+2}{i} \qquad (333),$$

то есть **величина γ определяется числом степеней свободы молекул**.

Рассмотренная теория теплоемкости является классической. Ее результаты приблизительно верны для отдельных температурных интервалов, причем каждому интервалу соответствует свое число степеней свободы молекулы.

Качественная экспериментальная зависимость C_V от температуры

Рассмотрим кривую зависимости молярной теплоемкости C_V от температуры, полученную опытным путем для водорода (рис. 131).

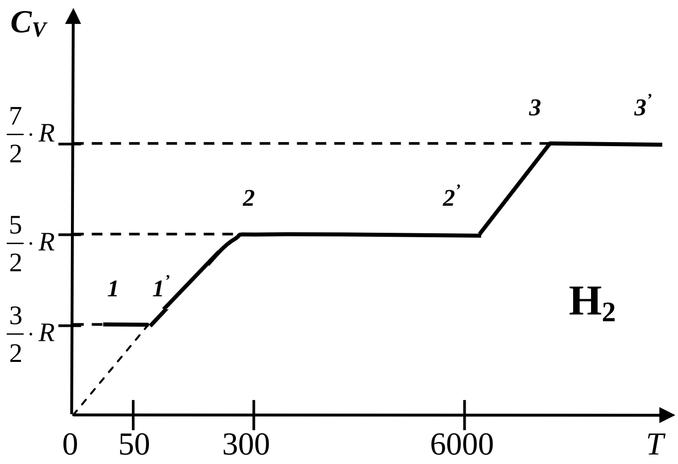


Рис. 131. Зависимость $C_V(T)$ для водорода

Согласно теории, теплоёмкость не должна зависеть от температуры. Как видно из рисунка, это оказывается справедливым только в пределах отдельных температурных интервалов, причем в различных интервалах теплоемкость имеет значения, соответствующие различному числу степеней свободы молекулы.

Так на участке 1-1′ $C_V = \frac{3}{2\cdot R}$. Это означает, что молекула ведет себя как система, обладающая только поступательными степенями свободы.

На участке 2-2′ $C_V = \frac{5}{2}\cdot R$, следовательно, при температурах, соответствующих этому участку, у молекулы, в дополнение к проявляющимся при более низких температурах, трем поступательным степеням свободы, добавляются еще две – вращательные. Наконец, при достаточно больших температурах $C_V = \frac{7}{2}\cdot R$, что свидетельствует о наличии при этих температурах колебаний молекулы.

В промежутках между указанными интервалами теплоемкость монотонно растет с ростом температуры, то есть соответствует как бы переменному числу степеней свободы. Объяснение такого поведения дается квантовой механикой. Как устанавливает квантовая теория, энергия вращательного и колебательного движения молекул оказывается квантованной. Это означает, что энергия вращения и энергия колебания молекулы могут иметь не любые значения, а только дискретные (то есть отдельные, отличающиеся друг от друга на конечную величину) значения. Следовательно, энергия, связанная с этими видами движения, может меняться только скачками. Что и наблюдается на опыте.

Применение первого начала термодинамики к изопроцессам

Изохорный процесс

Процесс, протекающий при V = const, называется изохорным (рис. 132).

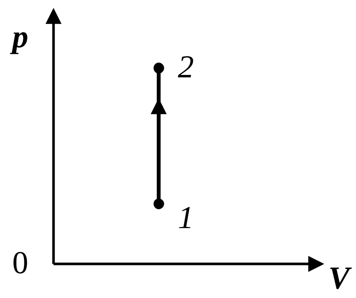


Рис. 132. К изохорному процессу

Поскольку при изохорном процессе V = const, а $dV = 0$, то

$$dA = pdV = 0,$$

то есть при изохорном процессе газ работу не совершает. Первое начало термодинамики $(\partial Q = dU + \partial A)$ запишется в этом случае в виде соотношения

$$\partial Q = dU \qquad (334).$$

Количество теплоты, которое необходимо сообщить системе для того, чтобы при постоянном объеме повысить его температуру на величину dT, можно выразить, если известна теплоемкость вещества при постоянном объеме $\partial Q = C_V dT$ и, следовательно (для 1 моля),

$$dU = C_V dT \qquad (335).$$

Для $\frac{m}{M}$ молей

$$\partial Q = dU = \frac{m}{M} \cdot C_V dT \qquad (336).$$

Принимая, что C_V – теплоемкость идеального газа не зависит от температуры, для внутренней энергии моля идеального одноатомного газа получим выражение

$$U = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT \qquad (337).$$

Для $\frac{m}{M}$ молей

$$U = Q = \frac{m}{M} \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1) \qquad (338).$$

Таким образом, **при изохорном изменении состояния газа вся подведенная к системе теплота идет на увеличение внутренней энергии системы.**

При изохорном нагревании тепло поглощается газом ($Q > 0$), и его внутренняя энергия увеличивается. При охлаждении тепло отдается внешним телам ($Q < 0$).

Изобарный процесс

Изобарный процесс – процесс, происходящий при постоянном давлении *p* = const (рис. 133).

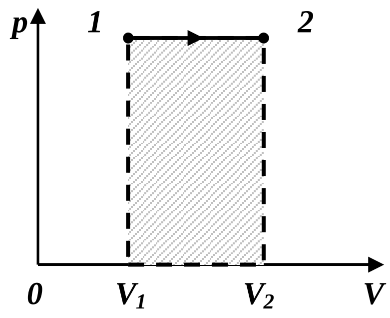


Рис. 133. К изобарному процессу

Работа в этом случае равна

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = p\int_{V_1}^{V_2} dV = p\cdot(V_2 - V_1) \quad (339).$$

Работа изображается на диаграмме (рис. 133) площадью прямоугольника $V_1 12 V_2$.

Применим первое начало термодинамики к изобарному процессу

$$\partial Q = dU + \partial A.$$

Из определения молярной теплоемкости следует, что

$$\partial Q = C_p dT.$$

Интегрируя выражение, получим количество теплоты, необходимое для нагревания газа от температуры T_1 до T_2 для одного моля газа

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C_p dT = C_p\cdot(T_2 - T_1) \quad (340),$$

для $\frac{m}{M}$ молей газа

$$Q = \frac{m}{M}\cdot C_p\cdot(T_2 - T_1) \quad (341).$$

Таким образом, **при изобарном процессе подводимое к газу тепло частично тратится на увеличение его внутренней энергии и частично на совершение работы.**

При изобарном расширении $Q > 0$ – тепло поглощается газом, и газ совершает положительную работу. При изобарном сжатии $Q < 0$ – тепло отдается внешним телам. В этом случае $A < 0$. Температура газа при изобарном сжатии уменьшается, $T_2 < T_1$; внутренняя энергия убывает, $\Delta U < 0$.

Изотермический процесс

Процесс, происходящий при постоянной температуре, называется изотермическим процессом (рис. 134).

При T = const, U = const (внутренняя энергия не изменяется), $dU = 0$.

Уравнение первого начала термодинамики ($\partial Q = dU + \partial A$) при изотермическом состоянии газа запишется в следующей форме:

$$\partial Q = \partial A \quad (342).$$

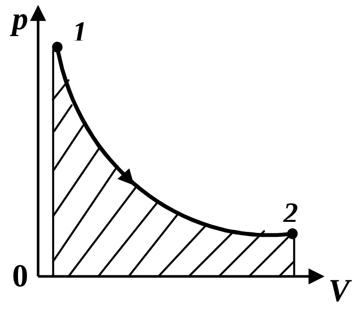


Рис. 134. К изотермическому процессу

Из этого выражения следует, что **при изотермическом процессе все подводимое к системе количество теплоты превращается в работу**. Для подсчета работы, совершенной газом при изотермическом расширении от объема V_1 до V_2, необходимо проинтегрировать выражение для элементарной работы

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} pdV \,.$$

Выразив давление из уравнения Менделеева – Клапейрона для одного моля газа $p = R \cdot T / V$ и подставив в уравнение для определения работы, получим

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} R \cdot T \cdot \frac{dV}{V} = R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad (343).$$

Работа, совершаемая при расширении $\frac{m}{M}$ – молей газа, будет в $\frac{m}{M}$ раз больше, то есть

$$A_{1-2} = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad (344).$$

Графически вычисленная работа (рис. 134) выражается на диаграмме с координатами pV площадью заштрихованной на графике. Вместо отношения $\frac{V_2}{V_1}$, можно воспользоваться равным ему обратным отношением давлений, исходя из закона Бойля-Мариотта, тогда

$$A_{1-2} = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} \qquad (345).$$

Согласно (342) при T = const $Q = A$, следовательно

$$Q = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} \qquad (346).$$

Количество теплоты Q, полученной газом в процессе изотермического расширения, превращается в работу над внешними телами. При изотермическом сжатии работа внешних сил, произведенная над газом, превращается в тепло, которое передается окружающим телам.

Адиабатический (адиабатный) процесс

Процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой, называется адиабатическим, то есть в этом случае $\partial Q = 0$. Условие $\partial Q = 0$ (полная теплоизоляция) на практике неосуществимо. Это условие выполняется приближённо для быстро протекающих процессов. Например – сжатие и расширение воздуха в звуковой волне, расширение и сжатие горючей смеси в цилиндрах двигателей внутреннего сгорания.

Уравнение первого начала термодинамики ($\partial Q = dU + \partial A$) при учете, что $\partial Q = 0$ принимает вид

$$dU + \partial A = 0,$$

или

$$\partial A = -dU \qquad (347).$$

То есть **при адиабатическом процессе работа совершается только за счет внутренней энергии газа.**

При адиабатическом расширении газ совершает работу, а его внутренняя энергия и, следовательно, температура падают. **При адиабатическом сжатии работа газа отрицательна (внешняя среда производит работу над газом), внутренняя энергия и температура газа возрастают.**

Теплоемкость при адиабатическом процессе

$$C = \frac{\partial Q}{dT} = 0.$$

Выведем уравнение кривой, изображающей адиабатический процесс на pV-диаграмме. При бесконечно малом изменении состояния газа совершается работа

$$dA = pdV$$

и изменение внутренней энергии

$$dU = C_V dT.$$

Подставив эти значения в уравнение первого начала термодинамики, получим

$$C_V dT + pdV = 0 \qquad (348).$$

Это и есть уравнение адиабаты в дифференциальной форме. Уравнение содержит все три параметра p,V,T. Для упрощения его воспользуемся уравнением состояния для одного моля газа

$$p \cdot V = R \cdot T.$$

Дифференцируя его, получим

$$pdV + Vdp = RdT \qquad (349).$$

Составим систему двух уравнений

$$\begin{cases} C_V dT + pdV = 0 \\ pdV + Vdp = RdT \end{cases} \qquad (350).$$

Умножим первое на R, второе на C_V и сложим их:

$$R \cdot C_V dT + p \cdot RdV + p \cdot C_V dV + V \cdot C_V dR = C_V \cdot RdT.$$

Преобразуя выражение, получим

$$(C_V + R) \cdot pdV + C_V \cdot Vdp = 0.$$

Разделим уравнение на $C_V \cdot p \cdot V$

$$\frac{(C_V + R) \cdot pdV}{C_V \cdot p \cdot V} + \frac{C_V \cdot Vdp}{C_V \cdot p \cdot V} = 0,$$

учтём, что $C_V + R = C_p$, то есть молярной теплоёмкости при постоянном давлении

$$\frac{C_p}{C_V} \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \qquad (351).$$

Запишем вместо $\frac{C_p}{C_V}$ коэффициент Пуассона γ:

$$\gamma \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \qquad (352).$$

Левая часть соотношения есть производная от $(\gamma \ln V = \ln p)$, поэтому

$$d\left[\gamma \ln V + \ln p\right] = 0 \qquad (353).$$

Отсюда следует, что величина, стоящая в скобках, должна быть постоянной

$$\gamma \ln V + \ln p = \ln const.$$

Учитывая, что $\gamma \cdot \ln V = \ln V^{\gamma}$ и потенцируя выражение ($\ln V^{\gamma} + \ln p = \ln const$), получим

$$p \cdot V^{\gamma} = \text{const.} \qquad (354).$$

Это выражение называется уравнением Пуассона или уравнением адиабаты. Его можно записать в ином виде, учитывая, что $p \cdot V = R \cdot T$, $p = \frac{R \cdot T}{V}$, то есть

$$\frac{R \cdot T}{V} \cdot V^{\gamma} = const,$$

или

$$T \cdot V^{\gamma - 1} = const \qquad (355).$$

Работа газа в адиабатном процессе

$$A = \frac{m}{M} \cdot C_V \cdot (T_1 - T_2) \qquad (356).$$

Если газ адиабатно расширяется от объёма V_1 до V_2, то его температура уменьшается от T_1 до T_2.

$$A = \frac{p_1 \cdot V_1}{\gamma - 1} \cdot \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{R \cdot T_1}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{M} \cdot \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] \qquad (357).$$

Для перехода к переменным p, V в формуле (356), следует, применить уравнение Клапейрона – Менделеева $p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$, исключить температуру $p_1 \cdot V_1 = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1$.

Работа, совершаемая газом при адиабатном расширении меньше, чем при изотермическом расширении. При адиабатном расширении происходит охлаждение газа, тогда как при изотермическом расширении температура поддерживается постоянной за счёт притока извне эквивалентного количества теплоты.

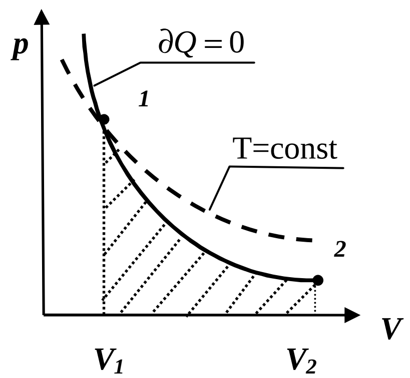


Рис.135. К определению работы при адиабатном процессе

Работа, совершённая газом при адиабатном расширении определяется заштрихованной площадью на рис. 135.

Политропный процесс

Политропный процесс – процесс, в котором теплоёмкость остаётся постоянной

$$C = const \qquad (358).$$

Уравнение политропного процесса

$$p \cdot V^n = const \qquad (359),$$

где n – показатель политропы; $1 < n < \gamma$.

Политропа – график зависимости между параметрами состояния при $C = const$ (рис.136).

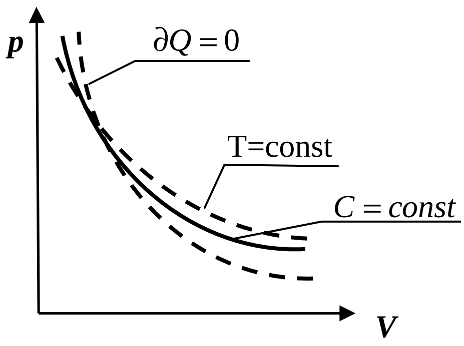


Рис.136. Политропа

В координатах p,V – гипербола (определяется уравнением $p \cdot V^n = const$); Занимает промежуточное положение между изотермой и адиабатой.

Работа для политропного процесса

$$A = \frac{m}{M} \cdot \frac{R}{n-1} \cdot (T_1 - T_2) \qquad (360).$$

Ниже (таблица 10) приведены частные случаи политропного процесса.

Таблица 10

Частные случаи политропного процесса

$C = 0$	$n = \gamma$	$p \cdot V^\gamma = const$	Уравнение адиабаты
$C = \infty$	$n = 1$	$p \cdot V = const$	Уравнение изотермы
$C = C_p$	$n = 0$	$p = const$	Уравнение изобары
$C = C_V$	$n = \pm\infty$	$V = const$	Уравнение изохоры

Обобщим сказанное выше в таблицах (таблицы 11 – 12).

Таблица 11

Сравнение различных газовых процессов

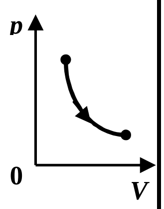
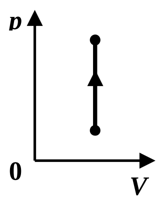
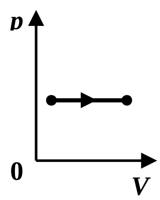
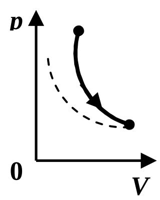
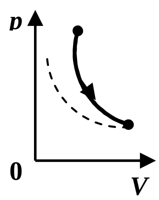
Название процесса	Изотермический	Изохорный	Изобарный	Адиабатный	Политропный
Условие процесса	$T = const$	$V = const$	$p = const$	$\partial Q = 0$	$C = const$
p,V - диаграмма					

Таблица 12

Сравнение различных газовых процессов

Название процесса	Закон	Первое начало термодинамики применительно к процессу	Изменение внутренней энергии	Работа А
Изотермический	$p \cdot V = const$	$\partial Q = \partial A$	0	$\frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln\frac{V_2}{V_1}$
Изохорный	$\frac{p}{T} = const$	$\partial Q = dU$	$\frac{m}{M} \cdot C_V dT$	0
Изобарный	$\frac{V}{T} = const$	$\partial Q = dU + \partial A$	$\frac{m}{M} \cdot C_V dT$	$p \cdot (V_2 - V_1) = \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$
Адиабатный	$p \cdot V^{\gamma} = const$ $T \cdot V^{\gamma-1} = const$ $T^{\gamma} \cdot p^{1-\gamma} = const$	$\partial Q = -dU$	$\frac{m}{M} \cdot C_V dT$	$\frac{m}{M} \cdot C_V \cdot (T_1 - T_2)$
Политропный	$p \cdot V^{n} = const$ $T \cdot V^{n-1} = const$ $T^{n} \cdot p^{1-n} = const$	$\partial Q = dU + \partial A$	$\frac{m}{M} \cdot C_V dT$	$\frac{m}{M} \cdot \frac{R}{n-1} \cdot (T_1 - T_2)$

Круговой процесс и его термический КПД. Обратимые и необратимые процессы

В термодинамических рассуждениях большое значение имеет рассмотрение различных круговых процессов. **Круговым процессом и циклом называется такая последовательность превращений, в результате которой система, выйдя из какого-либо исходного состояния, вновь в него возвращается.** На диаграмме состояния круговой процесс изображается замкнутой кривой (рис. 137).

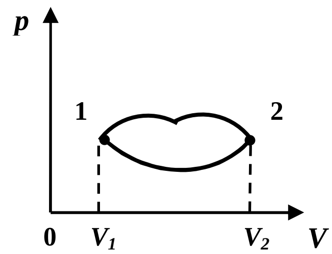


Рис. 137. Круговой процесс

Цикл (рис. 138), за который совершается положительная работа $A = \oint pdV > 0$ (цикл протекает по часовой стрелке). Работа расширения (процесс *1a2*), определяемая площадью фигуры *1a2V*$_2$*V*$_1$*1* положительна (*dV > 0*).

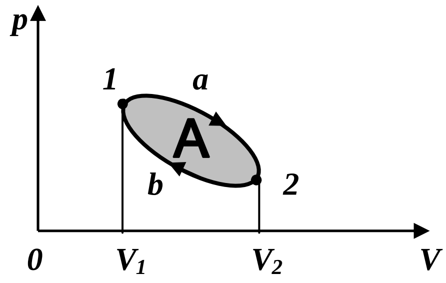


Рис. 138. Прямой цикл

Работа сжатия (процесс *2b1*) определяется площадью фигуры *2b1V*$_1$*V*$_2$*2* отрицательна (*dV < 0*).

Работа совершаемая за цикл, определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой.

Прямой цикл используется в тепловых двигателях – периодически действующих двигателях, совершающих работу за счёт полученной извне теплоты.

Обратный цикл – цикл, за который совершается отрицательная работа $A = \oint pdV < 0$ (цикл протекает против часовой стрелки). Работа расширения (процесс *1a2*), определяемая площадью фигуры *1a2V*$_2$*V*$_1$*1* положительна (*dV > 0*). Работа сжатия (процесс *2b1*) определяется площадью фигуры *2b1V*$_1$*V*$_2$*2* отрицательна (*dV < 0*). Работа (рис. 139) совершаемая за цикл, определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой.

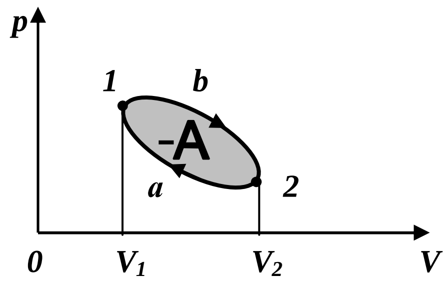


Рис. 139. Обратный цикл

Обратный цикл используется в холодильных машинах – периодически действующих установках, в которых за счёт работы внешних сил теплота переносится к телам с более высокой температурой.

В результате кругового процесса система возвращается в исходное состояние, то есть изменение внутренней энергии газа равно нулю. Согласно первому началу термодинамики $Q = \Delta U + A = A$, то есть работа совершаемая за цикл, равна количеству полученной извне теплоты. $Q = Q_1 - Q_2$. Коэффициент полезного действия (КПД) для кругового процесса

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \qquad (361).$$

Различают **обратимые и необратимые круговые процессы**. **Процесс называется обратимым, если система возвращается в ис-**

ходное состояние, не вызывая изменения в окружающих телах. Чисто механические процессы всегда обратимы. Например, шар, поднятый над землей на высоту h, обладает запасом потенциальной энергии $m \cdot g \cdot h$. Свободно падая, шар в конце движения приобретает скорость υ, которая может быть найдена из закона сохранения энергии $m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2}$.

Ударившись о преграду (удар абсолютно упругий), шар изменит свою скорость на обратную и начнет подниматься. При возвращении шара в исходное положение его потенциальная энергия примет первоначальное значение $m \cdot g \cdot h$ и, следовательно, во всей системе не произойдет никаких изменений, кроме изменений знака скорости. Процесс обратимый.

При наличии теплового движения наблюдаются, как правило, процессы **необратимые (процессы, не удовлетворяющие условию обратимости процесса)**. Пуля в результате трения о воздух теряет свою скорость. Происходит превращение механической энергии в тепловую (пуля и воздух нагреваются). Известно, что повернуть этот процесс так, чтобы рассеянное тепло превратилось опять в энергию механического движения невозможно, то есть процесс необратим.

Обратимые процессы – это идеализация реальных процессов. Их рассмотрение существенно по двум причинам:

1) многие процессы в природе и технике практически обратимы;
2) обратимые процессы являются наиболее экономичными; имеют максимальный термический коэффициент полезного действия, что позволяет указать пути повышения КПД реальных тепловых двигателей.

Тепловые двигатели и холодильные машины

Как следует из первого закона термодинамики, полученное газом количество теплоты Q полностью превращается в работу A при изотермическом процессе, при котором внутренняя энергия остается неизменной ($\Delta U = 0$): $A = Q$.

Но такой однократный акт преобразования теплоты в работу не представляет интереса для техники. Реально существующие тепловые двигатели (паровые машины, двигатели внутреннего сгорания и т. д.) работают циклически. Процесс теплопередачи и преобразования полученного количества теплоты в работу периодически повторяется. Для этого рабочее тело должно совершать круговой процесс или термодинамический цикл, при котором периодически восстанавливается исходное состояние.

Общее свойство всех круговых процессов состоит в том, что их невозможно провести, приводя рабочее тело в тепловой контакт только с одним тепловым резервуаром. Их нужно, по крайней мере, два (нагреватель и холодильник).

Тепловой двигатель – периодически действующий двигатель, совершающий работу за счёт полученной извне теплоты. От термостата (системы, которая может обмениваться теплотой с телами без изменения температуры) с более высокой температурой T_1, называемого нагревателем, за цикл отнимается количество теплоты Q_1, а термостату с более низкой температурой T_2, называемому холодильником, за цикл передаётся количество теплоты Q_2, при этом совершается работа $A = Q_1 - Q_2$ (рис. 140).

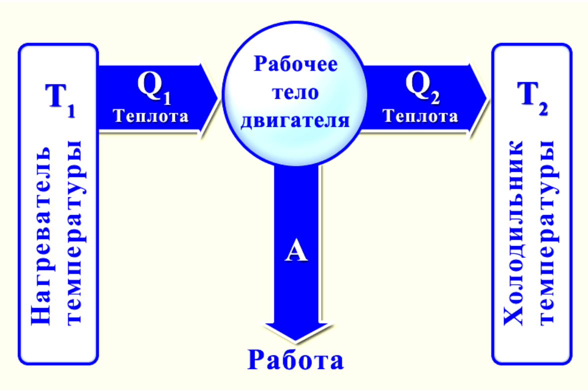


Рис. 140. Принцип работы теплового двигателя

КПД теплового двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \qquad (362).$$

Чтобы η=1 необходимо Q_2= 0 (тепловой двигатель должен иметь один источник теплоты). Сади Карно показал, что для работы теплового двигателя необходимо не менее двух источников теплоты с различными температурами.

Теорема Карно: из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей (T_1) и холодильников (T_2), наибольшим КПД обладают обратимые машины. При этом КПД обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей (T_1) и холодильников (T_2), равны друг другу и не зависят от природы рабочего тела, а определяются только температурами нагревателя и холодильника.

Холодильная машина – периодически действующая установка, в которой за счёт работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой.

Системой за цикл от термостата с более низкой температурой T_2 отнимается количество теплоты Q_2 и отдаётся термостату с более высокой температурой T_1 количество теплоты Q_1.

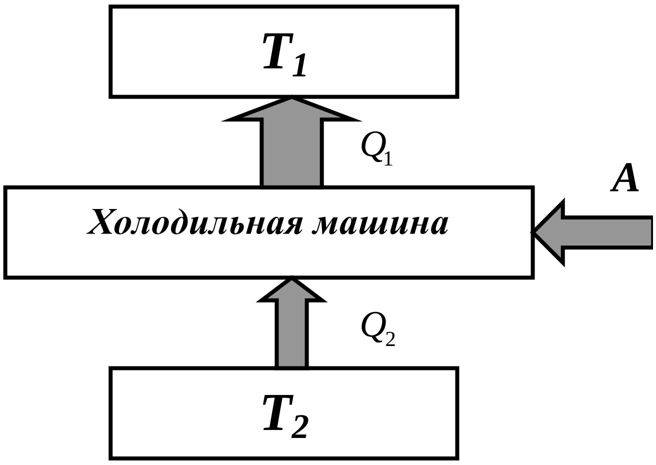


Рис. 141. Принцип работы холодильной машины

Для кругового процесса $Q = A$, но по условию $Q = Q_2 - Q_1 < 0$, поэтому $A < 0$ и $Q_2 - Q_1 = -A$ или $Q_1 = Q_2 + A$, то есть количество теплоты Q_1, отданное системой источнику теплоты при более высокой температуре T_1, больше количества теплоты Q_2, полученного от источника теплоты при более низкой температуре T_2 на величину работы, совершённой над системой.

Без совершения работы нельзя отбирать теплоту от менее нагретого тела и отдавать её более нагретому телу (утверждение второго начала термодинамики).

Холодильный коэффициент

$$\eta' = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \qquad (363).$$

Холодильный коэффициент характеризует эффективность холодильной машины и определяется как отношение отнятой от термостата с более низкой температурой количества теплоты Q_2 к работе, которая затрачивается на приведение холодильной машины в действие.

Цикл Карно

С практической точки зрения интересны циклические процессы, сопровождающиеся превращением теплоты в работу. В двигателях, применяемых в технике, используются различные круговые процессы. На рис. 142 изображены циклы, используемые в бензиновом карбюраторном и в дизельном двигателях. В обоих случаях рабочим телом является смесь паров бензина или дизельного топлива с воздухом. Цикл карбюраторного двигателя внутреннего сгорания состоит из двух изохор (1–2, 3–4) и двух адиабат (2–3, 4–1). Дизельный двигатель внутреннего сгорания работает по циклу, состоящему из двух адиабат (1–2, 3–4), одной изобары (2–3) и одной изохоры (4–1). Реальный коэффициент полезного действия у карбюраторного двигателя порядка 30 %, у дизельного двигателя – порядка 40 %.

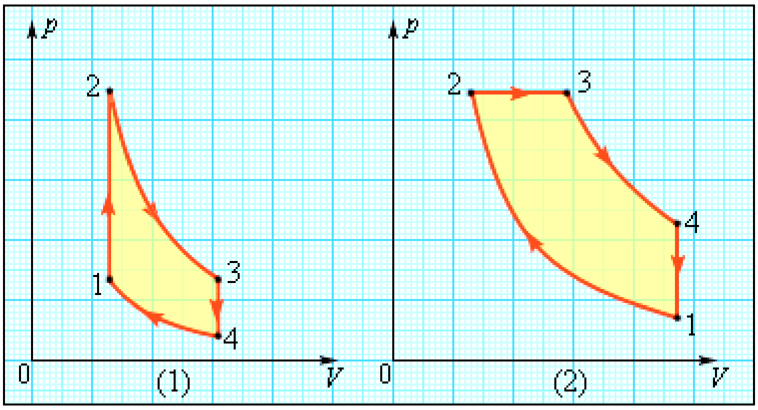


Рис. 142. Циклы карбюраторного двигателя внутреннего сгорания (1) и дизельного двигателя (2)

Наиболее совершенным в отношении коэффициента полезного действия является циклический процесс, рассмотренный впервые французским инженером Сади Карно (1824 г.) и носящий его имя.

Цикл Карно совершает газ, находящийся в цилиндре под поршнем. Цикл Карно состоит из двух изотерм (1-2) и (3-4) и двух адиабат (2-3) и (4-1), (рис. 143).

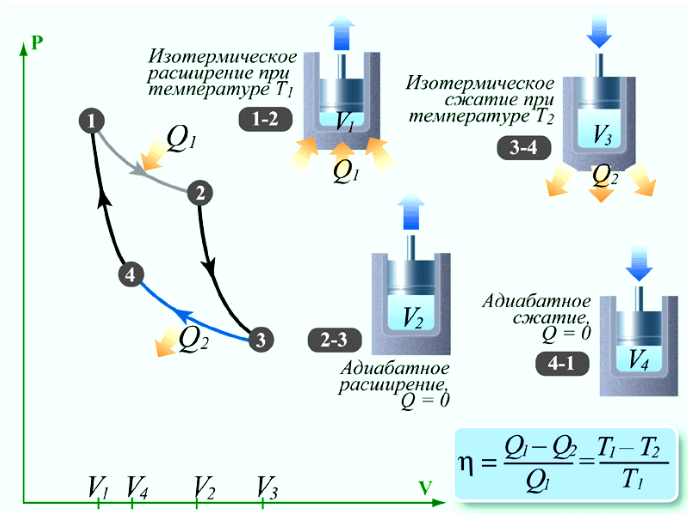


Рис. 143. Цикл Карно

Работа при изотермическом расширении 1-2 (T = const; $V_2 > V_1$)

$$A_{12} = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln\frac{V_2}{V_1} = Q_1 \quad (364).$$

Работа при адиабатном расширении 2-3 ($\partial Q = 0; T_2 < T_1$)

$$A_{23} = -\frac{m}{M} \cdot C_V (T_2 - T_1) \quad (365).$$

Работа при изотермическом сжатии 3-4 (T = const; $V_4 < V_3$)

$$A_{34} = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln\frac{V_4}{V_3} = -Q_2 \quad (366).$$

Работа при адиабатном сжатии 4-1 ($\partial Q = 0; T_1 > T_2$)

$$A_{43} = -\frac{m}{M} \cdot C_V (T_2 - T_1) = -A_{23} \quad (367).$$

Работа за цикл определяется площадью, ограниченной изотермами и адиабатами цикла Карно. Работа за цикл

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2 \quad (368).$$

Цикл Карно замечателен тем, что на всех его участках отсутствует соприкосновение тел с различными температурами. Любое состояние рабочего тела (газа) на цикле является квазиравновесным, т. е. бесконечно близким к состоянию теплового равновесия с окружающими телами (тепловыми резервуарами или термостатами). Цикл Карно исключает теплообмен при конечной разности температур рабочего тела и окружающей среды (термостатов), когда тепло может передаваться без совершения работы. Поэтому цикл Карно – наиболее эффективный круговой процесс из всех возможных при заданных температурах нагревателя и холодильника

$$\eta_{Карно} = \eta_{max} \quad (369).$$

Любой участок цикла Карно и весь цикл в целом может быть пройден в обоих направлениях. Обход цикла по часовой стрелке соответствует тепловому двигателю, когда полученное рабочим телом тепло частично превращается в полезную работу. Обход против часовой стрелки соответствует холодильной машине, когда некоторое количество теплоты отбирается от холодного резервуара и передается горячему резервуару за счет совершения внешней работы. Поэтому идеальное устройство, работающее по циклу Карно, называют обратимой тепловой машиной.

Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (370),$$

то есть определяется только температурами нагревателя (T_1) и холодильника (T_2).

Действительно запишем уравнение адиабатного процесса в виде $T \cdot V^{\gamma-1} = const$ и используем рис. 143. Тогда можно записать

$$T_1 \cdot V_2^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_3^{\gamma-1};\ T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_4^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Подставив эти выражения в формулу для термического КПД кругового процесса, получим

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln\frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln\frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln\frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Из выражения для η получаем $\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}$, то есть для сравнения температур T_1 и T_2 двух тел необходимо осуществить обратимый цикл Карно, в котором одно тело используется в качестве нагревателя, другое – холодильника. Из равенства $\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}$ видно, что отношение температур тел равно отношению отданного в этом цикле количества теплоты к полученному. Согласно теореме Карно, химический состав рабочего тела не влияет на результаты сравнения температур, поэтому такая термодинамическая шкала не связана со свойствами какого-то определённого термодинамического тела.

Второе начало термодинамики

Второе начало термодинамики, как и первое, может быть сформулировано несколькими способами. Во-первых, второе начало термодинамики гласит, что **невозможен самопроизвольный переход тепла от тела менее нагретого к телу, более нагретому**. Более строго можно сформулировать: **невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых был бы переход тепла от тела менее нагретому к телу, более нагретому** (формулировка по Клаузиусу).

Второе начало термодинамики не запрещает вообще переход тепла от тела менее нагретого к телу, более нагретому. Мы рассмотрели такой переход, рассматривая принцип работы холодильной машины. Однако этот переход не был бы единственным результатом процесса. Переход сопровождался изменениями в окружающих телах, связанными с совершением над системой работы.

Второе начало термодинамики может быть также сформулировано следующим образом: **невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых явилось бы отнятие от некоторого**

тела определенного количества теплоты и превращение этого тепла полностью в работу (формулировка по Кельвину).

В тепловой машине превращение тепла в работу обязательно сопровождается дополнительным процессом – передачей некоторого количества тепла Q_2 более холодному телу, вследствие чего полученное от более нагретого тела количество тепла Q_1 не может быть полностью превращено в работу, то есть, невозможен тепловой двигатель, который обладал бы коэффициентом полезного действия равным единице.

Двигатель такого рода получил название вечного двигателя второго рода. Вечный двигатель второго рода – периодически действующий двигатель, совершающий работу за счёт одного источника теплоты. Таким образом, *второе начало термодинамики может быть сформулировано также в виде принципа невозможности построения вечного двигателя второго рода*.

Приведенное количество теплоты. Неравенство Клаузиуса

Коэффициент полезного действия для любой тепловой машины

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, отданное нагревателем, Q_2 – отданное холодильнику.

Коэффициент полезного действия обратимой тепловой машины (цикл Карно)

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 – температура нагревателя, T_2 – температура холодильника.

В случае обратимого процесса между этими величинами должен стоять знак равенства

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \qquad (371).$$

В случае необратимого процесса

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1} \qquad (372).$$

Соотношения (371) и (372) можно объединить и записать в виде

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \le \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

или

$$\frac{Q_2}{Q_1} \ge \frac{T_2}{T_1}.$$

Умножив полученное выражение на положительную величину $\frac{Q_1}{T_2}$, получим

$$\frac{Q_2}{T_2} \geq \frac{Q_1}{T_1}.$$

Вычитая из левой и правой части $\frac{Q_2}{T_2}$, имеем

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \qquad (373).$$

В соотношение (373) входит как тепло, полученное системой Q_1, так и тепло, отдаваемое ею Q_2. Вместо отдаваемого телу тепла Q_2 введем полученное от этого тела тепло, равное -Q_2. Тогда выражение (373) запишется в виде

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \qquad (374).$$

Это соотношение носит название неравенства Клаузиуса.

Отношение количества тепла, полученного системой от какого-либо тела, к температуре этого тела называется приведенным количеством тепла. Используя эту терминологию Клаузиуса, выражение (374) может быть сформулировано следующим образом: **при обратимом цикле Карно сумма приведенных количеств тепла равно нулю, при необратимом цикле – меньше нуля.**

Неравенство Клаузиуса может быть обобщено на любой круговой процесс. Любой круговой процесс может быть разбит на весьма большое число элементарных циклов Карно. Каждый из этих элементарных циклов Карно протекает между нагревателем соответствующей температуры T_i, от которого он получает количество тепла ΔQ_i, и холодильником соответствующей температуры T_k, которому он отдает количество тепла ΔQk. Для этого элементарного цикла напишем неравенство Клаузиуса:

$$\frac{Q_i}{T_i} + \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \qquad (375).$$

Суммируя выражение (375), написанное для каждого из элементарных циклов, получим для всего цикла

$$\sum \frac{\Delta Q}{T} \leq 0 \qquad (376).$$

То есть **для всякого кругового процесса сумма приведенных количеств тепла не может быть больше нуля.** В случае обратимого протекания процесса можно показать, что сумма (376) преобразуется в контурный интеграл

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \qquad (377),$$

где интеграл берется по всему циклу.

Энтропия. Свойства энтропии. Закон возрастания энтропии в замкнутых системах

Возьмем какой-либо обратимый цикл (рис.144) и выделим в нем два произвольных состояния (1) и (2).

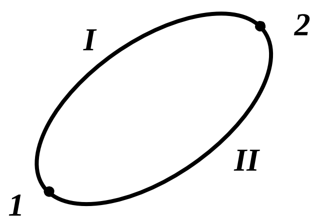


Рис.144. Обратимый цикл

Эти состояния делят цикл на две ветви, которые обозначены на рис.144 I и II. Сумма приведенных количеств тепла, взятая по всему циклу, равна нулю:

$$\sum \frac{\Delta Q}{T} = 0.$$

Для рассматриваемого цикла

$$\sum_{\substack{1\to 2\\ (\mathrm{I})}} \frac{\Delta Q}{T} + \sum_{\substack{2\to 1\\ (\mathrm{II})}} \frac{\Delta Q}{T} = 0 \qquad (378).$$

Если изменить направление перехода, то в силу обратимости процесса, каждое слагаемое суммы должно изменить знак. Так, если при направлении процесса от состояния (1) к состоянию (2) система получает от какого-то тела с температурой *T* количество тепла *ΔQ*, то при направлении процесса (2-1) на том же участке система должна отдавать этому же телу с температурой *T* такое же количество *ΔQ*, то есть получить -*ΔQ*.

Таким образом,

$$\sum_{\substack{1\to 2\\ (обр)}} \frac{\Delta Q}{T} = -\sum_{\substack{2\to 1\\ (обр)}} \frac{\Delta Q}{T} \qquad (379).$$

Исходя из неравенств (378) и (379), можно получить следующее соотношение:

$$\sum_{\substack{1\to 2\\ (\mathrm{I})}} \frac{\Delta Q}{T} - \sum_{\substack{1\to 2\\ (\mathrm{II})}} \frac{\Delta Q}{T} = 0 \qquad (380).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{\substack{1\to 2\\ (\mathrm{I})}} \frac{\Delta Q}{T} = \sum_{\substack{1\to 2\\ (\mathrm{II})}} \frac{\Delta Q}{T} \qquad (381),$$

то есть сумма приведенных количеств тепла, полученных системой при обратимом переходе от одного состояния (начальное) в другое (конечное), не зависит от пути, по которому совершается переход и, следовательно, **зависит только от начального и конечного состояний**. **Величины, изменения которых при переходе из одного состояния в другие не зависят от пути перехода, называются функциями состояния.** Независимость суммы $\sum\limits_{\substack{1\to 2\\(обр)}} \frac{\Delta Q}{T}$ от пути, по которому совершается обратимый переход из состояния (1) в состояние (2) дает основание утверждать, что при обратимом процессе $\frac{\Delta Q}{T}$ **представляет собой приращение некоторой функции состояния. Эта функция была названа энтропией и обозначается буквой *S*.**

Таким образом,

$$\left(\frac{\Delta Q}{T}\right)_{обр} = \Delta S \qquad (382).$$

Согласно этому равенству, приращение энтропии равно элементарному количеству тепла, получаемому обратимо системой извне, отнесенному к температуре, при которой это тепло получается. Поскольку энтропия – функция состояния, **сумма приращений энтропии должна быть равна разности значений энтропии в конечном и начальном состояниях**:

$$\sum_{\substack{1\to 2\\(обр)}} \frac{\Delta Q}{T} = \sum_{1\to 2} \Delta S = S_2 - S_1 \qquad (383).$$

Более того, суммы должны быть заменены интегралом

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 dS = S_2 - S_1 \qquad (384).$$

Итак, **при обратимом процессе сумма приведенных количеств тепла равна приращению энтропии**.

Рис.145. Круговой цикл

Выясним, в каком соотношении находятся сумма приведенных количеств тепла и приращение энтропии при необратимом процессе. Для этого рассмотрим цикл, состоящий из обратимой и необратимой ветвей (рис.146).

Поскольку в целом цикл необратим, сумма приведенных количеств тепла, взятая по всему циклу, должна быть меньше нуля

$$\sum_{O}\frac{\Delta Q}{T}<0 \qquad (385).$$

Разобьем эту сумму на две части, отнесенные к разным ветвям

$$\sum_{\substack{1\to 2\\(необ)}}\frac{\Delta Q}{T}+\sum_{\substack{2\to 1\\(обр)}}\frac{\Delta Q}{T}<0 \qquad (386).$$

Вторая из этих сумм равна разности энтропий в состояниях 1 и 2 (383). Поэтому соотношение (386) можно записать в виде

$$\sum_{\substack{1\to 2\\(необ)}}\frac{\Delta Q}{T}+\left(S_1-S_2\right)<0 \qquad (387),$$

или

$$\left(S_2-S_1\right)>\sum_{\substack{1\to 2\\(необ)}}\frac{\Delta Q}{T} \qquad (388).$$

Объединяя вместе (383) и (388), получим

$$\left(S_2-S_1\right)\geq\sum\frac{\Delta Q}{T} \qquad (389),$$

то есть приращение энтропии больше или равна сумме приведенных количеств тепла.

Знак равенства соответствует любому обратимому переходу 1→2. Знак неравенства – любому необратимому переходу из состояния (1) в состояние (2). Температура T означает температуру того тела, от которого система получает тепло ΔQ.

При обратимом процессе эта температура совпадает с температурой системы. Если система изолирована, то есть не обменивается теплом, то все ΔQ будут равны нулю, вследствие чего

$$S_2 - S_1 \geq 0 \qquad (390)$$

или, соответственно,

$$\Delta S \geq 0 \qquad (391).$$

Таким образом, энтропия изолированной системы может только возрастать (если в системе протекает необратимый процесс), либо оставаться постоянной (если в системе протекает обратимый процесс). Убывать энтропия изолированной системы не может.

Если система обменивается теплом с внешней средой, ее энтропия может вести себя любым образом. В частности, если система отдает тепло внешним телам, энтропия системы уменьшается. Если неизолированная система совершает цикл, то её энтропия возрастая на одних участках цикла и убывая на других, в конце цикла принимает первоначальное значение.

Энтропия – аддитивная величина. Это означает, что энтропия системы равна сумме энтропий отдельных ее частей.

Изменение энтропии

Изменение энтропии системы при её равновесном переходе из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\partial Q}{T} = \int_1^2 \frac{\partial U + \partial A}{T} \qquad (392).$$

Физический смысл имеет не сама энтропия, а разность энтропий (важны только изменения состояний).

$$dU = \frac{m}{M}\cdot C_V dT,\ \partial A = pdV = \frac{m}{M}\cdot R\cdot T\cdot\frac{dV}{V}.$$

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M}\cdot C_V\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} + \frac{m}{M}\cdot R\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \frac{m}{M}\cdot\left(C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1}\right) \qquad (393).$$

Изменение энтропии $\Delta S_{1\to 2}$ идеального газа при переходе его из состояния 1 в состояние 2 не зависит от вида процесса перехода $1\to 2$.

Изоэнтропийный процесс (*S* = *const*) – это адиабатный обратимый процесс, для которого $\partial Q = 0$, поэтому $\Delta S = 0$ и, следовательно, S = *const*, то есть адиабатный обратимый процесс протекает при постоянной энтропии.

Изменение энтропии в изотермическом процессе ($T_1 = T_2$)

$$\Delta S = \frac{m}{M}\cdot R\ln\frac{V_2}{V_1} \qquad (394),$$

в изохорном процессе ($V_1 = V_2$)

$$\Delta S = \frac{m}{M}\cdot R\ln\frac{T_2}{T_1} \qquad (395).$$

Энтропия системы равна сумме энтропий тел, входящих в систему. Свойством аддитивности обладают также внутренняя энергия, масса, объём (температура и давление таким свойством не обладают).

Статистический смысл второго начала термодинамики. Связь энтропии с термодинамической вероятностью

Термодинамической вероятностью *W* какого-либо состояния называют число микросостояний, с помощью которых может быть осуществлено данное макросостояние. Термодинамическая вероятность макросостояния, при котором в 1-ой ячейке оказывается N_1-частиц, во 2-ой - N_2-частиц, равна

$$W = \frac{N_1!}{N_1!N_2!...N_n!} \quad (396).$$

Пусть в некотором сосуде имеется шесть молекул. Разделим мысленно сосуд на две равные половины и рассмотрим три состояния газа (рис.146).

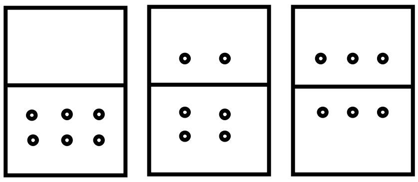


Рис. 146. Три состояния газа

Первое состояние соответствует случаю, когда все шесть молекул находятся в одной половине, а вторая свободна от молекул.

Второе состояние – когда в одной половине четыре молекулы, во второй половине – две.

Третье состояние, при котором в каждой половине сосуда присутствуют по три молекулы.

Первое состояние можно осуществить единственным способом. Термодинамическая вероятность первого состояния равна

$$W = \frac{6!}{6!0!} = 1.$$

Второе состояние можно осуществить уже несколькими способами. Термодинамическая вероятность равна ($6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 6 = 4! \cdot 5 \cdot 6$)

$$W = \frac{6!}{4!2!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4! \cdot 1 \cdot 2} = 15.$$

Третье состояние имеет термодинамическую вероятность

$$W = \frac{6!}{3!3!} = 20.$$

Каждое термодинамическое состояние можно рассматривать как с макроскопической, так и с микроскопической точек зрения. С макроскопической точки зрения не имеет значения, какие именно молекулы находятся в одной половине сосуда и какие в другой, важно только их количество. С микроскопической точки зрения, замена в одной из половин сосуда на молекулу из другой половины сосуда приводит уже к новому состоянию.

Таким образом, данное макроскопическое состояние системы может осуществляться различным количеством микроскопических состояний. Рассмотрим состояние, когда одна молекула находится в одной половине сосуда, а пять молекул – в другой.

Такое состояние можно осуществить уже несколькими способами. Действительно, предположим, что для того, чтобы осуществить это состояние, в одну из половин сосуда была помещена молекула a, а остальные пять в другую половину (рис.147).

С макроскопической точки зрения это состояние будет неразличимо от тех состояний, при которых вместо молекулы a в одной половине сосуда находятся молекулы b,c,d,e или f (рис.148).

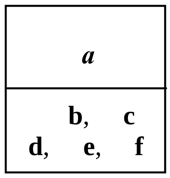


Рис. 147. Молекулы газа

С микроскопической точки зрения все эти состояния различны. Таким образом, в этом случае одно и то же макроскопическое состояние может быть осуществлено с помощью шести различных с микроскопической точки зрения состояний, то есть одному макросостоянию соответствует шесть микросостояний. Это число микросостояний можно определить, если подсчитать число сочетаний из 6 по 1, которое, как нам известно из математики, определяется так:

$$W = \frac{6!}{5!1!} = 6 .$$

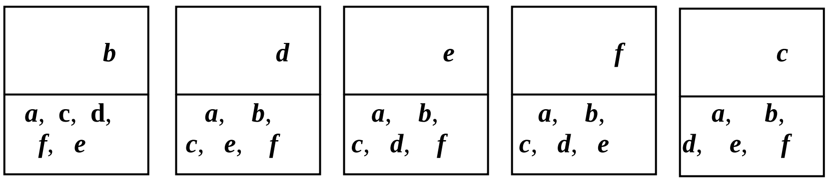


Рис. 148. Возможные микросостояния

Из рассмотренных нами состояний наиболее вероятным является состояние, при котором в каждой половине сосуда находятся по три молекулы, то есть для газа, на который не действуют внешние силы, наиболее вероятным является равномерное распределение молекул по всему объему.

Представление о термодинамической вероятности состояний позволяет понять особенности второго начала термодинамики. Как показал Больцман, термодинамическая вероятность определяет физическую величину называемую энтропией.

Энтропия связана с термодинамической вероятностью соотношением

$$S = k \cdot \ell n W \qquad (397),$$

где k – постоянная Больцмана.

Таким образом, можно дать следующее определение. **Энтропия – скалярная физическая величина, характеризующая макросостояние термодинамической системы, и численно равная постоянной Больцмана, умноженной на ℓn термодинамической вероятности этого состояния.** Согласно уравнению $S = k \cdot \ell n W$, возрастание энтропии означает возрастание вероятности данного состояния системы

$$\Delta S \geq 0, \quad k \cdot \ell n W \geq 0 \qquad (398),$$

то есть возрастание энтропии в данном случае означает, что **самопроизвольно изолированная система может переходить только от состояний, менее вероятных, к состояниям, более вероятным.**

Очевидно, что **изолированная термодинамическая система, энтропия которой достигла максимально возможной величины, при данных значениях параметров состояния, будет находиться в состоянии устойчивого равновесия. Утверждение, что самопроизвольно изолированная система может переходить только от состояний, менее вероятных, к состояниям, более вероятным, есть иная формулировка второго начала термодинамики, раскрывающая его статистический смысл.** В общем виде неравенство $\Delta S \geq 0$ было доказано Больцманом. Вывод Больцмана основан на применении методов статистической физики и теории вероятностей, поэтому и окончательный результат носит вероятностный характер. **Неравенство $\Delta S \geq 0$ строго следует формулировать: наиболее вероятным изменением энтропии системы является ее возрастание.**

Однако увеличение энтропии – это наиболее вероятный, но не обязательный путь развития системы. Или можно сказать так, что самопроизвольное уменьшение энтропии макроскопической системы не невозможно, но весьма маловероятно. В случае системы, состоящей из небольшого числа частиц или малых частей большой системы, могут наблюдаться процессы, связанные с убыванием энтропии. То есть при малой совокупности частиц могут наблюдаться отклонения от статистических закономерностей и, в частности, от второго начала термодинамики.

Так, например, в результате броуновского движения, пылинка может подняться на значительную высоту. Работа, необходимая для её подъема черпается из запаса кинетической энергии хаотического движения молекулы, газ остывает, его энтропия уменьшается. Чем большую совокупность частиц содержит данная система, тем менее вероятны отклонения от статистических закономерностей и, в частности, от второго начала термодинамики.

Агрегатные состояния вещества и фазовый переход

Критерии различных агрегатных состояний вещества

Критерием различных агрегатных состояний вещества является соотношение между величинами $E_{p\min}$ и $k \cdot T$; $E_{p\min}$ – наименьшая потенциальная энергия взаимодействия молекул – определяет работу, которую нужно совершить против сил притяжения для того, чтобы разъединить молекулы, находящиеся в равновесии ($r = r_0$); $k \cdot T$ определяет удвоенную среднюю энергию, приходящуюся на одну степень свободы хаотического (теплового) движения молекул.

Газообразное состояние вещества

$$E_{p\min} << k \cdot T \qquad (399).$$

Вещество находится в газообразном состоянии, так как интенсивное тепловое движение молекул препятствует соединению молекул, сблизившихся до расстояния r_0 (на расстоянии $r = r_0$ силы притяжения и отталкивания уравновешивают друг друга), то есть вероятность образования агрегатов из молекул достаточно мала.

Твёрдое состояния вещества

$$E_{p\min} >> k \cdot T \qquad (400).$$

Вещество находится в твёрдом состоянии, так как молекулы, притягиваясь друг другу, не могут удалиться на значительные расстояния и колеблются около положений равновесия, определяемых расстоянием r_0.

Жидкое состояние вещества

$$E_{p\min} \approx k \cdot T \qquad (401).$$

Вещество находится в жидком состоянии, так как в результате теплового движения молекулы перемещаются в пространстве, обмениваясь местами, но не расходясь на расстояние, превышающее r_0.

Таким образом, любое вещество, в зависимости от температуры, может находиться в газообразном, жидком или твёрдом агрегатном состоянии, причём температура перехода из одного агрегатного состояния в другое зависит от значения $E_{p\min}$ для данного вещества. Например, у инертных газов $E_{p\min}$ мало, а у металлов велико, поэтому при обычных (комнатных) температурах они находятся соответственно в газообразном и твёрдом состояниях.

Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Поведение реальных газов довольно хорошо описывается уравнением Менделеева – Клапейрона, то есть уравнением состояния идеального газа ($p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$) только при не слишком высоких давлениях и достаточно высоких температурах.

Однако с уменьшением температуры и повышением давления поведение реальных газов отклоняется от поведения газов идеальных. Например, рассмотрим произведение $p{\cdot}V$ для массы азота, занимающей при нормальных условиях объем, равный одному литру. В соответствии с уравнением Менделеева – Клапейрона $p{\cdot}V$ при неизменной температуре должно оставаться постоянным. В действительности, как видно из таблицы 13, при повышении давления наблюдаются заметные отклонения от постоянства $p{\cdot}V$, которые достигают 100% при p =1000 атм.

Таблица 13

Значения p и p·V для азота

p, атм	$p{\cdot}V$, атм·V
1	1,000
500	1,390
1000	2,069

Графическая зависимость произведения давления на объем реального газа (кислорода) при увеличении давления представлена на рис.149. Для идеального газа подобная зависимость выражается прямой линией, параллельной оси абсцисс (оси x).

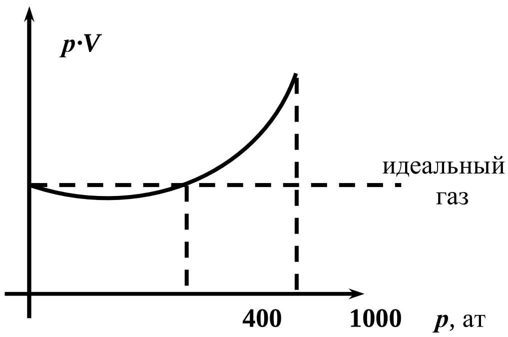


Рис.149. Зависимость $p \cdot V(p)$ для кислорода

Рассматривая график, мы видим, что реальный газ при увеличении давления первоначально сжимается больше, чем это следует из уравнения идеальных газов, так что произведение $p{\cdot}V$ уменьшается с возрастанием давления. При дальнейшем увеличении давления начинают сказываться какие-то иные свойства молекул реальных газов, в силу которых произведение $p{\cdot}V$ возрастает.

Причины подобных отклонений заключаются в следующем:

1) большую сжимаемость реального газа по сравнению с идеальным газом обуславливают силы межмолекулярного взаимодействия; молекулярное сцепление приводит к возникновению как бы добавочного давления, возрастающего при увеличении плотности газа;

2) наблюдаемое при высоких давлениях уменьшение сжимаемости и соответствующее возрастание произведения $p{\cdot}V$ объясняется тем, что реальные молекулы не являются материальными точками, а обладают некоторым конечным объемом.

По мере увеличения давления возрастает плотность газа, а вместе с ней возрастает влияние собственного объема молекул – газ оказывает большее сопротивление сжатию, чем это следует из уравнения Клапейрона – Менделеева.

Уравнение состояния реального газа было предложено впервые голландским физиком Ван-дер-Ваальсом (1837-1929) и носит его имя. Уравнение Ван-дер-Ваальса отличается от уравнения Клайперона наличием двух поправочных членов, один из которых учитывает влияние собственного объема молекул, а другой – влияние сил молекулярного притяжения.

Рассмотрим подробнее каждый из этих поправочных членов.

Рассчитаем поправку на недоступный объем. Молекула идеального газа, заключенная в некотором сосуде, может находиться в любой его точке и для неё доступен весь объем сосуда V.

Молекула реального газа не может находиться в тех местах сосуда, где расположены остальные (N-1)-молекул и ей доступна лишь часть всего объема, равная (V-b), где b – объём, недоступный для молекул. Для подсчета этого недоступного объема будем считать, что в газе происходят только двойные соударения молекул. Для каждой пары взаимодействующих молекул недоступной является та часть объема, в которой расстояние между их центрами равно d, где d – диаметр молекулы, то есть сфера с объемом $(4/3)\cdot\pi d^3$. Из N-молекул может быть образовано $\frac{N(N-1)}{2}$ пар. Следовательно, полный недоступный объём для всех молекул равен

$$\frac{N\cdot(N-1)}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot d^3 \approx N^2\cdot\frac{4}{6}\cdot\pi\cdot d^3 .$$

На каждую из N - молекул приходится

$$\frac{N^2\cdot\frac{4}{6}\cdot\pi\cdot d^3}{N} = 4\cdot N\cdot\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot d^3 ,$$

то есть

$$b = 4\cdot N\cdot\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot d^3 \qquad (402).$$

С учетом введенной поправки уравнение состояния реального газа примет вид

$$p\cdot(V-b) = \frac{m}{M}\cdot R\cdot T$$

при T = const, $p\cdot(V- b)$ = const.

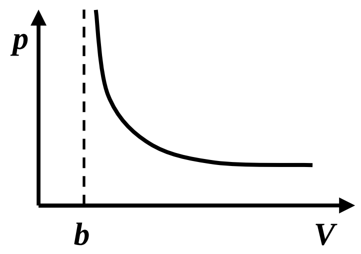


Рис. 150. Зависимость p(V)

График этой зависимости изображен на рис.150.

Изотермы p(V-b)=const имеют вид гипербол, у которых давление безгранично возрастает при V→b.

Рассчитаем поправку на «внутреннее давление» (точнее на влияние сил межмолекулярного притяжения). Сила давления газа на стенку сосуда – есть результат многочисленных столкновений молекул с твердой поверхностью. Поэтому давление идеального газа прямо пропорционально концентрации молекул n в слое, прилежащем непосредственно к стенке

$$n = N/V.$$

Так как между молекулами газа действуют силы притяжения, то давление уменьшается на величину p'. Поскольку силы взаимодействия очень быстро убывают с расстоянием, то практически следует учитывать притяжение первого слоя лишь одним соседним слоем II (рис. 151).

Сила этого притяжения, рассчитанная на единицу площади, пропорциональна концентрации молекул в обоих слоях:

$$p' \approx \frac{N}{V} \cdot \frac{N}{V}.$$

Обозначим коэффициент пропорциональности α, тогда

$$p' = \alpha \cdot \frac{N^2}{V^2} \qquad (403).$$

Обозначим $\alpha \cdot N^2 = a$, тогда $p' = a/V^2$. Вид коэффициента a зависит от конкретного строения взаимодействующих молекул, т.е. от природы газа. Объединяя вторую поправку с первой, мы можем записать

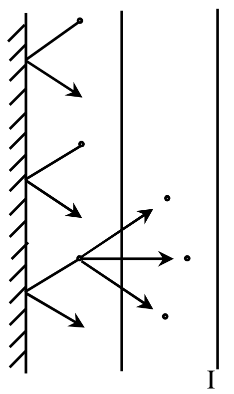


Рис. 151. К выводу уравнения Ван-дер-Ваальса

$$(p + p') \cdot (V - b) = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \qquad (404)$$

или

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \qquad (405).$$

(405) – уравнение Ван-дер-Ваальса.

В этом уравнении V – объём, занимаемый m – граммами газа. Поскольку при выводе уравнения был сделан целый ряд упрощений, на него следует смотреть как на приближенное уравнение состояния реального газа.

Вычисленные с помощью уравнения Ван-дер-Ваальса значения давления газа, достаточно точно совпадает с опытом лишь при относительно высоких температурах и только в некотором интервале давлений.

Экспериментальные изотермы. Критические состояния

Уравнение Ван-дер-Ваальса – алгебраическое уравнение третьей степени относительно объема. Для одного моля газа

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)\cdot(V-b)=\frac{m}{M}\cdot R\cdot T\ .$$

Раскрыв скобки и расположив члены уравнения по убывающим степеням объема, можно записать последнее в следующем виде:

$$V^3-(b+\frac{R\cdot T}{p})\cdot V^2+\frac{a}{p}\cdot V-\frac{a\cdot b}{p}=0 \qquad (406).$$

Это уравнение третьей степени относительно объема и, следовательно, при данных p и T оно может иметь или три вещественных корня, или один вещественный и два комплексно-сопряженных корня, не имеющих физического смысла. Это зависит от соотношения между коэффициентами. При низких температурах уравнение имеет три вещественных корня и график $p=f(V)$ имеет вид, изображенный на рис.152.

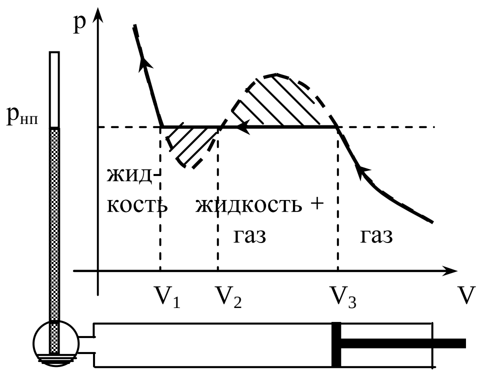


Рис. 152. График p=f(V)

Для того чтобы получить изотерму опытным путем, нужно взять вещество в газообразном состоянии, поместить его в сосуд с перемещающимся поршнем и начать медленно сжимать, делая одновременно отсчеты давления и объема, а также, следя за тем, чтобы температура вещества оставалась постоянной. Результат подобного опыта дан на рис. 152 (жирная линия).

Вначале с уменьшением объёма давление газа растёт, причем ход изотермы хорошо описывается уравнением Ван-дер-Ваальса (406).

Однако, начиная с некоторого объема V_3, экспериментальная изотерма перестает следовать уравнению (406). Начиная с этого значения объёма, давление в сосуде перестаёт изменяться, само вещество перестаёт быть однородным, часть газа конденсируется в жидкость. Происходит расслоение вещества на две фазы: жидкую и газообразную.

По мере дальнейшего уменьшения объёма всё большая часть вещества переходит в жидкую фазу, причем переход осуществляется при постоянном давлении, обозначенном $p_{нп}$ (рис. 152). После того, как процесс конденсации вещества в жидкость заканчивается при $V=V_1$, дальнейшее уменьшение объёма сопровождается быстрым ростом давления. При этом ход изотермы снова примерно следует уравнению (406). Вещество в состояниях, соответствующих этому участку изотермы, снова будет однородным, но представляет собой не газ, а жидкость.

Таким образом, уравнение Ван-дер-Ваальса описывает не только газообразное состояние вещества, но охватывает также процесс перехода в жидкое состояние и процесс сжатия жидкости.

Сопоставление экспериментальной изотермы с изотермой Ван-дер-Ваальса даёт, что эти изотермы довольно хорошо совпадают на участках, отвечающих однофазным состояниям вещества, но ведут себя совершенно различным образом в области расслоения на две фазы. Вместо *S*-образного завитка на изотерме Ван-дер-Ваальса экспериментальная изотерма имеет в этой области прямолинейный горизонтальный участок.

В состояниях, соответствующих горизонтальному участку изотермы, наблюдается равновесие между жидкой и газообразной фазами вещества. **Газ, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется насыщенным паром.** Давление $p_{нп}$, при котором может существовать равновесие при данной температуре, называется давлением насыщенного пара.

Опыт показывает, что с повышением температуры ($T'<T''<T'''<T_к$) горизонтальный участок изотермы сокращается и при некоторой температуре он стягивается в точку. Называется эта температура критической (рис.153). При этом уменьшается различие в удельных объёмах, а, следовательно, и в плотностях жидкости и насыщенного пара.

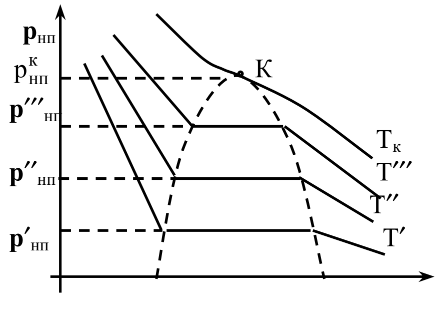


Рис.153. Изотермы Ван-дер-Ваальса

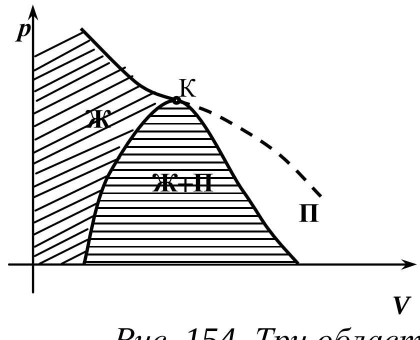


Рис. 154. Три области под колокообразной кривой

При критической температуре это различие исчезает. Одновременно исчезает всякое различие между жидкостью и паром. Если провести линию через крайние точки горизонтальных участков изотерм, получается колокообразная кривая, ограничивающая область двухфазных состояний вещества. Колокообразная кривая и участок критической изотермы, лежащий слева от точки *К* делит диаграммы(p·V) на три области (рис.154).

Наклонной штриховкой помечена область однородных жидких состояний. Под колокообразной кривой располагается область двухфазных состояний и область, лежащая справа от колокообразной кривой и верхней ветви критической изотермы, представляет собой область однородных газообразных состояний вещества. Особо следует отметить область, лежащую под правой ветвью критической изотермы – область пара.

Состояние вещества в этой области отличается от остальных газообразных состояний в том отношении, что при изотермическом сжатии вещество, находящееся в этом состоянии, претерпевает процесс сжижения. Вещество, находящееся в газообразном состоянии при температуре выше критической, не может быть сжижено никаким сжатием.

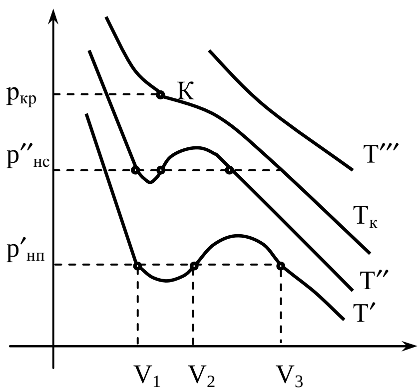


Рис. 155. Изотермы Ван-дер-Ваальса

Рассмотрим изотермы Ван-дер-Ваальса для нескольких значений температуры (рис.9.7). Расчеты показывают, что при температуре T′ коэффициенты в уравнении (9.1) таковы, что все три решения уравнения оказываются вещественными. С повышением температуры различие между тремя вещественными решениями уравнения (406) уменьшаются. Начиная с определённой, своей для каждого вещества, температуры $T_{кр}$, при любом давлении вещественным остается только одно решение, соответствующее точке *К*. Температура называется критической температурой. Точка *К* называется критической точкой. Для соответствующей изотермы точка К служит точкой перегиба. Ей соответствуют три совпадающих вещественных решения уравнения (406). Касательная к критической изотерме в точке *К* является пределом, к которому стремятся секущие p' и p'' при приближении температуры к критической. Следовательно, эта касательная, как и все секущие параллельна оси V так, что производная $\frac{dp}{dV}$ в точке *К* равна нулю.

Кроме того, в точке перегиба должна быть равна нулю и вторая производная $\frac{d^2 p}{dV^2}$. Разрешим уравнение (406) относительно

$$p = \frac{R \cdot T}{V - b} - \frac{a}{V^2} \qquad (407).$$

Дифференцирование этого выражения по V дает

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{R \cdot T}{(V - b)^2} + \frac{2 \cdot a}{V^3};$$

$$\frac{d^2 p}{dV} = \frac{2 \cdot R \cdot T}{(V - b)^3} - \frac{6 \cdot a}{V^4} \qquad (408).$$

В критической точке при $T=T_{кр}$ и $V=V_{кр}$ эти выражения обращаются в ноль:

$$-\frac{R \cdot T_{кр}}{(V_{кр} - b)^2} + \frac{2 \cdot a}{V_{кр}^3} = 0 \qquad (409);$$

$$\frac{2 \cdot R \cdot T}{(V_{кр} - b)^3} - \frac{6 \cdot a}{V_{кр}^4} = 0 \qquad (410).$$

Соответствующие значения и $p_{кр}$ носят название критического объема и критического давления для данного вещества. Из уравнения (407) находим

$$p_{кр} = \frac{R \cdot T_{кр}}{V_{кр} - b} + \frac{a}{V_{кр}^2} \qquad (411).$$

Решая систему трех уравнений с тремя неизвестными $V_{кр}$, $p_{кр}$ и $T_{кр}$, получим

$$V_{кр} = 3 \cdot b \qquad (412);$$

$$p_{кр} = \frac{a}{27 \cdot b^2} \qquad (413);$$

$$T_{кр} = \frac{8 \cdot a}{27 \cdot b \cdot R} \qquad (414).$$

Таким образом, зная константы Ван-дер-Ваальса a и b, можно найти соответствующие критической точке $V_{кр}$, $p_{кр}$ и $T_{кр}$, которые называют критическими величинами. И, наоборот, по известным критическим величинам могут быть найдены значения констант Ван-дер-Ваальса.

Внутренняя энергия реального газа. Эффект Джоуля-Томсона

Внутренняя энергия идеального газа представляет собой кинетическую энергию движения молекул, поскольку в нем отсутствует молекулярное взаимодействие. В реальных газах нельзя пренебречь взаимодействием молекул, поэтому внутренняя энергия реального газа находится суммированием кинетической энергии движения молекул и потенциальной энергии их взаимодействия.

Потенциальная энергия молекулярного взаимодействия зависит от взаимного расположения молекул и поэтому она должна изменяться при изменении объёма газа. Если исключить обмен энергией между газом и внешней средой, то сумма кинетической и потенциальной энергии должна оставаться постоянной. Изменение одного из видов энергии должно компенсироваться противоположным изменением второго вида энергии.

Исходя из этого, при расширении реального газа происходит уменьшение кинетической энергии за счет увеличения потенциальной энергии притяжения молекул. Поскольку мерой средней кинетической энергии молекул газа служит его абсолютная температура, то при расширении газа, молекулы которого притягиваются друг к другу, температура его должна понижаться. Впервые подобный опыт удалось осуществить Джоулю и Томсону.

В данном опыте были взяты два сосуда *A* и *B*, соединенные пористой перегородкой (рис.156). Специальные насосы поддерживают в этих сосудах постоянное давление: в сосуде A – p_1, а в сосуде B – меньше p_2. По обе стороны от пористой перегородки находятся термометры. Газ заставляют расширяться через пористую перегородку. При этом большинство газов, расширяясь при комнатной температуре и не очень больших давлениях, охлаждается. Исключение составляет водород, который при этих условиях нагревается.

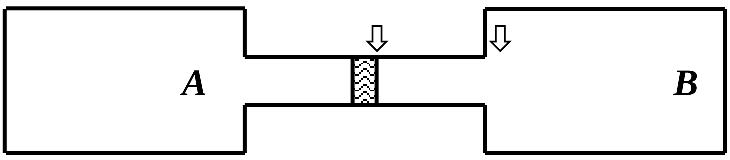


Рис. 156. К опыту Джоуля и Томсона

Изменение температуры, сопровождающее расширение реального газа, получило название эффекта Джоуля-Томсона. Охлаждение газа при расширении называют положительным эффектом Джоуля-Томсона, нагревание – отрицательным.

Для того чтобы понять существование двух знаков эффекта Джоуля-Томсона, рассмотрим график (рис.157), поясняющий отклонение поведения реального газа от идеального. Сплошными линиями изображены изменения отклонения произведения ($p \cdot V/T$) при изменении давления для трех различных температур $T_1 < T_2 < T_3$.

В случае идеального газа (пунктирная прямая) отношение ($p{\cdot}V/T$) остается постоянным. Из графика видно, что в зависимости от температуры отклонения в поведении реального газа от идеального различны. При более низкой температуре отклонение ($p{\cdot}V/T$) меньше, чем для идеального газа и, следовательно, преобладает влияние сил притяжения.

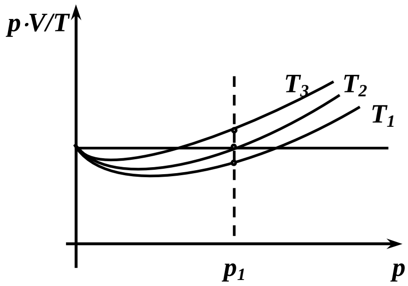


Рис.157. Зависимость $\frac{p\cdot V}{T}(p)$

При расширении газа в этом случае молекулы будут совершать работу против сил притяжения за счет кинетической энергии. В результате при расширении газ будет охлаждаться, то есть будет наблюдаться положительный эффект Джоуля-Томсона. При более высокой температуре T_3, как видно из рис. 157, преобладающее значение имеют силы отталкивания, учитываемые в уравнении Ван-дер-Ваальса поправочным членом b. Эти силы будут совершать работу при расширении реальных газов и тем увеличивать кинетическую энергию молекул. В таком случае при расширении реального газа будет наблюдаться нагревание, то есть отрицательный эффект Джоуля-Томсона.

Очевидно, найдется какая-то промежуточная температура, при которой влияние притяжения в точности компенсируется влиянием сил отталкивания, и реальный газ ведет себя как идеальный газ, то есть расширение не сопровождается изменением температуры.

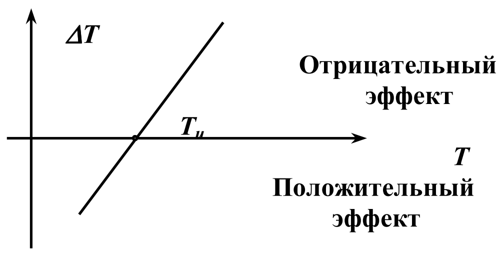


Рис. 158. К эффекту Джоуля – Томсона

Таким образом, при плавном изменении температуры от значения T_1 до T_2 знак эффекта Джоуля – Томсона изменяется с положительного на отрицательный (рис.158). Это происходит при температуре, называемой температурой инверсии $T_и$.

Для кислорода температура инверсии $+790^0$С, для водорода – 73^0С. Эффект Джоуля – Томсона применяется в технике сжижения газов.

Экзаменационные вопросы

(*курсивом выделены вопросы, вынесенные на самостоятельное изучение*)

1. Предмет физики. Методы физического исследования: опыт, гипотеза, эксперимент, теория. Роль физики в развитии техники и влияние техники на развитие физики. Международная система единиц (СИ).
2. Механика, ее разделы. Механическое движение, системы отсчета. Физические модели в механике. Путь и перемещение.
3. Прямолинейное равномерное, равнопеременное движение и движение с переменным ускорением.
4. Свободное падение. Движение тела брошенного горизонтально, под углом α к горизонту, движение пикирующего тела.
5. Равномерное, равнопеременное и переменное движение по окружности. Аналогия между параметрами и уравнениями поступательного движения и движения по окружности.
6. Инерциальные системы отчёта. Масса и импульс тела. Силы. Законы Ньютона.
7. Неинерциальные системы отчёта. Силы инерции. Принцип эквивалентности Эйнштейна.
8. Силы в механике. Сила тяжести и вес тела. Сила упругости. Закон Гука. Сила трения.
9. Законы сохранения импульса и движения центра масс. Уравнение движения тела переменной массы.
10. Механическая работа и мощность. Кинетическая и потенциальная энергии.
11. Закон сохранения энергии. Графическое представление энергии.
12. Удар абсолютно упругих и неупругих тел. Условия равновесия. Правило моментов.
13. Вращательное движение твёрдого тела. Момент инерции тела относительно оси вращения. Теорема Штейнера.
14. Кинетическая энергия тела при вращении. Уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела.
15. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса. Аналогия в описании поступательного и вращательного движений.
16. Законы Кеплера. Закон Всемирного тяготения. Гравитационное поле и его характеристики. Космические скорости.
17. Давление в жидкости и газе. Закон Паскаля и закон Архимеда. Уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли и его применение.

18. *Измерение давлений: трубка Пито, трубка Прандтля, трубка Вентури.* Вязкость. Режимы течения жидкостей (ламинарное и турбулентное). Методы определения вязкости: метод Стокса, *метод Пуазейля.*
19. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности. Постулаты специальной теории относительности. Преобразования Лоренца.
20. Следствия из преобразований Лоренца и следствия из них. Интервал между событиями. Импульс и энергия материальной точки в релятивисткой динамике.
21. Статистический и динамический методы исследования. Идеальный газ. Шкала Цельсия и термодинамическая шкала.
22. Основные понятия молекулярно – кинетической теории. Закон Дальтона. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов.
23. Уравнение состояния идеального газа. Средняя квадратичная скорость и средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа. Изопроцессы в идеальном газе.
24. Распределение молекул по скоростям. Закон Максвелла. Барометрическая формула.
25. Больцмановское распределение частиц в потенциальном поле. Закон Максвелла-Больцмана. Экспериментальный метод определения числа Авогадро.
26. Эффективный диаметр молекулы. Число столкновений и средняя длина свободного пробега молекулы.
27. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах. *Основные представления о свойствах разряженных газов (разряженный газ; вакуум; практические примеры получения разрежения; свойства ультраразреженных газов).*
28. Внутренняя энергия системы. Работа. Количество теплоты. Первое начало термодинамики.
29. Степени свободы молекул. Закон Больцмана о равномерном распределение энергии по степеням свободы. Теплоёмкости. Уравнение Майера.
30. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам. Адиабатный и политропный процессы.
31. Круговой процесс и его термический КПД. Обратимые и необратимые процессы. Тепловые двигатели и холодильные машины.
32. Цикл Карно. Второе начало термодинамики. Приведенное количество теплоты. Неравенство Клаузиуса.

33. Энтропия. Свойства энтропии. Закон возрастания энтропии в замкнутых системах. Изменение энтропии.
34. Статистический смысл второго начала термодинамики. Связь энтропии с термодинамической вероятностью
35. Критерии различных агрегатных состояний вещества. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Экспериментальные изотермы. Критические состояния.
36. Внутренняя энергия реального газа. Эффект Джоуля-Томсона
37. *Свойства жидкостей, поверхностное натяжение.*
38. *Давление под искривленной поверхностью. Капиллярные явления.*
39. *Кристаллические и аморфные твёрдые тела. Типы кристаллических твёрдых тел. Дефекты в кристаллах.*
40. *Теплоёмкость твёрдых тел. Испарение, сублимация, конденсация, плавление и кристаллизация.*

Приложение

1. Правила приближённого вычисления.

Когда число мало отличается от единицы, можно пользоваться приближенными формулами.

Если a, b, c – малы по сравнению с единицей (меньше 0,05), то:

1) $(1\pm a)\cdot(1\pm b)\cdot(1\pm c)=1\pm a\pm b\pm c$; 2) $\sqrt{1\pm a}=1\pm\frac{a}{2}$;

3) $(1\pm a)^n=1\pm n\cdot a$; 4) $\frac{1}{(1\pm a)^n}=1\pm a\cdot n$; 5) $\frac{1}{(1\pm a)}=1\pm a$; 6) $e^n=1+a$;

7) $\ln(1\pm a)=\pm a-\frac{a^2}{2}$.

Если a<<0, то в первом приближении можно принять:

$$\frac{1}{1\pm a}=1\pm a; \qquad \sqrt{1\pm a}=1\pm\frac{1}{2}a; \qquad e^a=1+a;$$

$$(1\pm a)^2=1\pm 2a; \qquad \frac{1}{\sqrt{1\pm a}}=1\pm\frac{1}{2}a; \qquad \ln(1+a)=a.$$

Если угол α мал (α<5° или α<0,1рад) и выражен в радианах, то в первом приближении можно принять: $\sin\alpha=\mathrm{tg}\alpha=\alpha,\ \cos\alpha=1$.

2. Правила действия со степенями и корнями.

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n} \qquad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

$$(a^m)^n=a^{m\cdot n} \qquad \sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

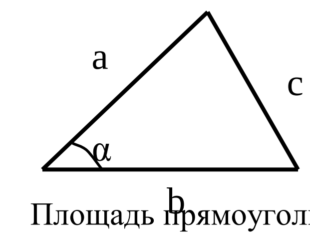
$$a^m\cdot b^m=(a\cdot b)^m \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$a^n=\frac{1}{a^{-n}} \qquad 1/\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

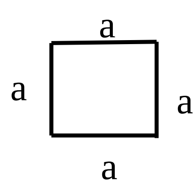
3. Характеристики геометрических фигур

Площадь треугольника



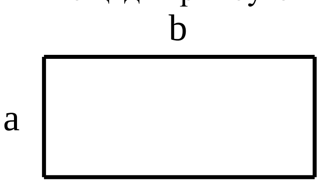
$$S=\frac{a\cdot b}{2}\sin\alpha$$

Площадь квадрата



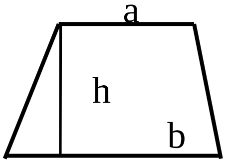
$$S=a\cdot b$$

Площадь прямоугольника



$$S=a\,b$$

Площадь трапеции



$$S=\frac{a+b}{2}h$$

Площадь сферы радиусом R $S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$

Площадь круга радиусом R $S = \pi \cdot R^2$

Длина окружности радиусом R $l = 2 \cdot \pi \cdot R$

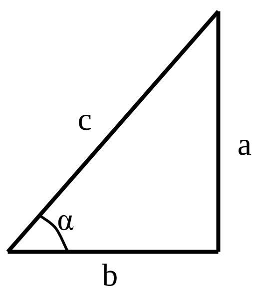
Объем сферы радиусом R $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

Объем цилиндра высотой H с радиусом основания R $V = \pi \cdot R^2 \cdot H$

Объем куба со стороной a $V = a^3$

Объем конуса высотой H с радиусом основания R $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$

4. Тригонометрические функции острого угла.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{a}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

$$ctg\alpha = \frac{b}{a}$$

Теорема Пифагора

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Теорема косинусов

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha$$

5. Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

6. Основные производные.

$y = u + \upsilon - \omega$	$y' = u' + \upsilon' - \omega'$
$y = u\,\upsilon$	$y' = u'\,\upsilon + u\,\upsilon'$
$y = \frac{u}{\upsilon}$	$y' = \frac{u' \cdot \upsilon - u \cdot \upsilon'}{\upsilon^2}$
$y = const$	$y' = 0$
$y = Ax$	$y' = A$, *где* $A - const$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$

$y = \sin Ax$	$y' = A\cos Ax, \;\; A - const$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \cos Ax$	$y' = -A\sin Ax$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = tg\;x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

7. Некоторые интегралы

$$\int x^m \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \;\; m = const \neq 1 \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} \cdot dx = -\frac{1}{x} \qquad \int \sin x \cdot dx = -\cos x$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx \qquad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left(tg\,\frac{x}{2}\right)$$

Литература

1. Митлина Л.А. Курс физики: Механика. Молекулярная физика и термодинамика: учеб. пособ. [текст] / Л.А. Митлина; Самар. гос. техн. ун-т. Самара, 2004. – 186с.
2. Открытая физика 2.6. Часть I [электронный ресурс]: http://physics.ru/courses/op25part1/design/index.htm
3. Трофимова Т.И. Физика в таблицах и формулах: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений и образоват. Учреждений сред. проф. образования [текст] / Т.И. Трофимова. – 3-е изд., испр. – М.: «Академия», 2006. – 448с.