

Если система достаточно велика, то статистическую сумму можно заменить ее максимальным членом, т. е. среднюю энергию — ее наиболее вероятным значением E_r . Тогда из (10) и (12) получаем

$$S = k \ln m_r, \quad (13)$$

где индекс r относится к упомянутому максимуму. Это совпадает с (1). Можно рассуждать и по-иному.

Максимальный член статистической суммы (10) при фиксированной температуре может быть определен приравнением нулю производной от общего члена по r , т. е. из уравнения

$$d \ln m_r - \frac{1}{kT} dE_r = 0$$

или

$$dE_r = T d(k \ln m_r). \quad (14)$$

С точки зрения термодинамики этот результат вполне согласуется с (13), и это согласие имеет глубокий смысл. Ибо соотношение (14) между двумя приращениями в окрестности главного члена суммы сохраняет силу для любой заданной температуры.

Следовательно, это же соотношение должно иметь силу и для реальных приращений, когда максимум распределения сдвигается из-за изменений температуры.

ЧЕТЫРЕ ЛЕКЦИИ ПО ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ¹

Лекция первая

1. Вывод основных идей волновой механики из гамильтоновой аналогии между обычной механикой и геометрической оптикой

Если материальная точка m , движущаяся в консервативном силовом поле, описанном потенциальной функцией $V(x, y, z)$ вышла из некоторой точки A с данной скоростью, т.е. с данной энергией, то ее можно заставить пройти через другую точку B , сообщив ей соответствующее начальное «направление». Вообще, существует только одна траектория, ведущая от A к B при данной энергии.

Эта траектория удовлетворяет условию:



Рис. 1

$$\delta \int_A^B 2T dt = 0 \quad (1)$$

и определяется им (принцип Гамильтона в формулировке Мопертюи). Здесь T означает кинетическую энергию материальной точки, а уравнение следует понимать следующим образом. Рассмотрим многообразие *всех* возможных путей, ведущих от A к B и подчиняющихся закону сохранения энергии. Среди них действительно пройденная траектория отличается тем, что для нее и для всех бесконечно близких к ней траекторий многообразия интеграл $\int_A^B 2T dt$ имеет одно и то же значение до

¹Перевод с немецкого под редакцией К. Р. Иршенко.

бесконечно малых величин второго порядка (причем, обозначение «бесконечно близкое» выражает бесконечно малые первого порядка). Если $w = \frac{ds}{dt}$ — скорость материальной точки, то

$$2T = mw^2 = m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 2(E - V) = \frac{ds}{dt} \sqrt{2m(E - V)}.$$

Таким образом, уравнение (1) принимает вид:

$$\delta \int_A^B \sqrt{2m(E - V)} ds = 0. \quad (2)$$

Этот вид уравнения имеет то преимущество, что, во-первых, вариационный принцип применяется к чисто геометрическому интегралу, который не содержит переменной времени, и, во-вторых, автоматически выполняется условие постоянства энергии.

Гамильтон сопоставил уравнение (2) с принципом Ферма, согласно которому в оптически-неоднородной среде действительные световые лучи, т. е. пути, вдоль которых движется энергия, определяются законом кратчайшего распространения света. Если рис. 1 отнести теперь к любой оптически неоднородной среде, например, к земной атмосфере, то можно, поместив в точке A источник света, который дает соответственный луч, осветить произвольно выбранную точку B . Существует определенный световой путь, от A к B , который соответствует уравнению (3) и определяется им однозначно:

$$\delta \int_A^B \frac{ds}{u} = 0. \quad (3)$$

Здесь, как и раньше, ds означает элемент пути, а u — скорость света, зависящую от координат x, y, z .

Оба принципа, уравнения (2) и (3), становятся *идентичными*, если мы потребуем, чтобы

$$u = \frac{C}{\sqrt{2m(E - V)}}, \quad (4)$$

где C не должно зависеть от x, y, z , но зависит от E . Таким образом, мы мысленно сконструировали оптическую среду, где многообразие возможных световых лучей совпадает с динамическими путями

материальной точки m , движущейся с *данной энергией* в силовом поле $V(x, y, z)$. При этом очень важным является тот факт, что скорость света u зависит не только от координат, но также и от E — полной энергии материальной точки. Это дает нам возможность продолжить аналогию, толкуя зависимость от E как дисперсию, т. е. как зависимость от частоты. Для этой цели мы должны допустить, что наши световые лучи имеют строго определенную частоту ν , зависящую от энергии E . Мы полагаем (произвольно):

$$E = h\nu \quad (5)$$

(h — квант действия Планка), не останавливаясь на этом допущении, столь знакомом каждому современному физику. Тогда эта неоднородная дисперсирующая среда даст посредством своих *световых лучей* картину всех динамических путей нашей частицы. Мы можем пойти еще на шаг далее, задавая вопрос: можно ли создать маленький «точкообразный» *световой сигнал*, который двигался бы точно так же, как наша материальная точка? (До сих пор мы определили только геометрическую идентичность путей, вопрос же зависимости движения от времени оставили пока без внимания).

На первый взгляд это кажется невозможным, ибо скорость материальной точки:

$$w = \frac{1}{m} \sqrt{2m(E - V)} \quad (6)$$

(вдоль пути, т. е. при постоянном E) обратно пропорциональна скорости света u (см. уравнение 4; C зависит только от E). Однако нужно помнить, что u — обыкновенная *фазовая* скорость, тогда как маленький световой сигнал распространяется с так называемой *групповой* скоростью g , определяемой уравнением:

$$\frac{1}{g} = \frac{d}{dv} \left(\frac{v}{u} \right)$$

или, в нашем случае, согласно уравнению (5),

$$\frac{1}{g} = \frac{d}{dE} \left(\frac{E}{u} \right). \quad (7)$$

Попробуем теперь допустить, что $g = w$. Для этого нужно только соответственным образом выбрать имеющуюся в уравнении (4) произвольную функцию энергии C . На основании (4), (6) и (7) требование

$g = w$ дает:

$$\frac{d}{dE} \left(\frac{E\sqrt{2m(E-V)}}{C} \right) = \frac{m}{\sqrt{2m(E-V)}} = \frac{d}{dE} \sqrt{2m(E-V)};$$

отсюда следует:

$$\left(\frac{E}{C} - 1 \right) \sqrt{2m(E-V)} = \text{const}$$

относительно E . Так как V содержит координаты и C зависит только от E , то, очевидно, уравнение выполняется, вообще говоря, только в том случае, если выражение в первой скобке равно нулю. Поэтому

$$\left(\frac{E}{C} - 1 \right) = 0 \quad \text{или} \quad C = E,$$

вследствие чего уравнение (4) получает вид:

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}}. \quad (8)$$

Это — единственная формула для фазовой скорости, дающая в нашем воображаемом случае распространения света полное совпадение между динамическими законами движения материальной точки и оптически-ми законами движения светового сигнала. Следует еще указать, что соответственно уравнению (4):

$$u = \frac{\text{энергия}}{\text{импульс}} \text{ материальной точки.} \quad (8a)$$

Определение u имеет, правда, еще следующую произвольность: очевидно, E определено только до произвольной аддитивной постоянной, так как только до этой постоянной определено $V(x, y, z)$. Эта неопределенность не может быть устранена в нерелятивистском толковании проблемы (релятивистская трактовка в этих лекциях излагаться не будет).

Основная идея волновой механики следующая. Явление, которому классическая механика, казалось, дала адекватное описание тем, что изображала движение материальной точки, т. е. рассматривала ее координаты x, y, z как функцию от времени, — это явление по новым представлениям должно быть изображено некоторым волновым движением, состоящим из волн только что описанного вида, т. е. определенной частоты и скорости (и, следовательно, определенной длины

волны), которое мы выше определили как «свет». Математически, волновое движение изображается неограниченным числом функций от одной переменной t , а, так сказать, непрерывным многообразием таких функций, т. е. одной функцией (или, возможно, несколькими функциями) от x , y , z и t . Эти функции удовлетворяют дифференциальному уравнению с частными производными типа *волнового уравнения*.

Если я говорю, что *действительный* процесс может быть точно описан только волновым движением, то это не означает, что такое волновое движение действительно существует. В дальнейшем мы увидим, что при обобщении на любую механическую систему, то, что в ней действительно происходит, описывается волновым процессом в обобщенном координатном пространстве (q -пространстве). Хотя последнее имеет определенное физическое значение, нельзя сказать, что оно «существует», так что и о волновом движении нельзя говорить, что оно «существует» в обычном смысле этого слова. Возможно, что и в рассматриваемом нами случае одной материальной точки не следует буквально говорить о волновом движении, как о чем-то реальном, хотя в этом частном случае координатное пространство случайно совпадает с обыкновенным пространством.

2. Обыкновенная механика — только приближение, не действительное для очень малых систем

Цель, которую мы преследуем, заменяя обычное механическое описание волномеханическим, — установить теорию, охватывающую как обыкновенные механические явления, где квантовые условия не играют заметной роли, так и типичные квантовые явления. Возможность достичь этой цели основана на следующей аналогии. Вышеупомянутая волновая картина Гамильтона содержит нечто, соответствующее обычной механике, а именно: *лучи* соответствуют механическим траекториям, а *световые сигналы* движутся как *материальные точки*. Но описание волнового движения посредством лучей есть лишь приближение (именуемое в случае световых волн «геометрической оптикой»), уместное только в том случае, когда структура рассматриваемого нами волнового явления является грубой по сравнению с длиной волны, и до тех пор, пока мы интересуемся только грубой структурой. Тонкая структура волнового явления никогда не может быть изображена с помощью лучей (геометрической оптики), и всегда существуют волновые

явления, которые так малы на всем своем протяжении, что описание их посредством лучей безрезультатно и не дает о них никакого представления.

Следовательно, заменив обычную механику волновой, мы можем надеяться, с одной стороны, снова получить обыкновенную механику как приближение, описывающее грубые макромеханические явления и, с другой, — получить объяснение для тех тонких «микромеханических явлений» (движение электронов в атоме), для которых старая механика не могла, вообще, дать никакого объяснения; по крайней мере, не могла его дать без очень искусственных дополнительных предложений, составлявших в действительности далеко более существенную часть теории, чем собственно механическое рассмотрение¹.

Путь, ведущий от обычной механики к волновой, аналогичен методу, установленному Гюйгенсом, когда он предложил свою теорию света вместо теории Ньютона. Можно установить следующее символическое соотношение:

$$\frac{\text{обычная механика}}{\text{волновая механика}} = \frac{\text{геометрическая оптика}}{\text{волновая оптика}}.$$

Типичные квантовые явления вполне аналогичны типичным волновым явлениям, как диффракция и интерференция. Для установления этой аналогии важно то, что обычная механика неприменима как раз для очень *малых* систем. Можно непосредственно испытать порядок величины, при которой следует ожидать полной неприемлемости обычной механики. Значение длины λ наших волн следует из уравнений (5) и (8):

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{h}{\sqrt{2m(E - V)}} = \frac{h}{mw},$$

т. е. длина волны равна частному от деления кванта действия Планка на импульс материальной точки. Рассмотрим для простоты круговую орбиту водородного атома с радиусом a , которая не обязательно должна

¹Приведем пример: странным образом фактическому применению квантовых правил к проблеме многих тел не противоречило то, что эти правила нельзя было формулировать для безусловно периодической системы. Просто рассматривали проблему многих тел как условно периодическую, хорошо зная, что она таковой не является. Это, я думаю, показывает, что обычную механику применяли недостаточно строго, в противном случае упомянутое выше примечание было бы также невозможно, как, скажем, распространение уголовных законов на движение планет.

быть «квантованной». Тогда по обычной механике получается соотношение (без каких-либо квантовых условий):

$$mva = n \frac{h}{2\pi}, \quad (9)$$

где n — произвольное вещественное положительное число (которое приняло бы для квантованных боровских орбит значения 1, 2, 3, ..., наличие h в последнем уравнении является в данный момент лишь удобным способом выражения порядка величины). Объединение последних двух уравнений дает:

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{2\pi}{n}.$$

Обычная механика применима, если размеры вычисленных таким образом траекторий велики по сравнению с длиной волны. Из последнего равенства видно, что это будет в том случае, если квантовое число n велико по сравнению с единицей. С уменьшением n отношение $\frac{\lambda}{a}$ становится все менее благоприятным. Обычная механика должна, таким образом, оказаться несостоятельной как раз в той области, которой мы заняты, а именно: если n принимает значения порядка единицы, что бывает при атомных орбитах нормальной величины (10^{-8} см).

3. Боровские стационарные энергетические состояния как собственные частоты колебания волн

Рассмотрим теперь с помощью волновой механики случай, недоступный обычной механике, а именно случай, который характеризовался как движение электрона в атоме водорода. Как нам приступить к такой проблеме? — Таким же образом, как мы рассматривали бы проблему определения всевозможных движений (колебаний) упругого тела, с той лишь разницей, что последняя проблема, благодаря существованию двух видов волн — продольных и поперечных, принимает более сложную форму. Чтобы обойти это затруднение, представим себе упругую жидкость в замкнутом сосуде. Для давления p получится волновое уравнение

$$\Delta p - \frac{1}{u^2} \ddot{p} = 0, \quad (10)$$

где u — постоянная скорость распространения продольных волн, единственно возможных в случае жидкости. Нужно найти общее решение этого дифференциального уравнения с частными производными, удовлетворяющее известным граничным условиям на поверхности сосуда.

Обычный способ решения дается подстановкой:

$$p(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \cdot e^{2\pi i \nu t},$$

откуда для ψ получается следующее уравнение:

$$\Delta \psi + \frac{4\pi^2 \nu^2}{u^2} \psi = 0, \quad (10a)$$

причем ψ подчиняется тем же граничным условиям, что и p . Здесь мы встречаемся с известным фактом, что не для всех значений коэффициента при ψ , т. е. не для всех частот ν , существует регулярное, однозначное решение, удовлетворяющее уравнению и граничным условиям, но только для дискретной бесконечной последовательности частот $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$, называемых характеристическими или собственными частотами проблемы или тела. Пусть ψ_k будет решением, относящимся к ν_k (в общем случае, для каждого ν_k существует с точностью до некоторого произвольного множителя только одно ψ_k). Так как уравнение и граничные условия однородны, то более общее решение равно:

$$p = \sum_k c_k \psi_k \cdot e^{2\pi i (\nu_k t + \vartheta_k)}, \quad (11)$$

где c_k, ϑ_k — произвольные постоянные; (11) является общим решением, если последовательность ψ_k, ν_k — полная. (Для физических применений пользуются, конечно, вещественной частью выражения 11).

В случае волн, которые должны заменить движение электрона, также встретится величина p , подчиненная волновому уравнению вида (10), хотя мы еще ничего не можем сказать о физическом значении p . Оставим на момент этот вопрос в стороне. В уравнении (10) мы должны положить для u значение [см. уравнение (8)]:

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}};$$

u теперь не является постоянной, а зависит, во-первых, от E , т. е. в сущности от частоты $\nu = \left(\frac{E}{h}\right)$, и, во-вторых, от координат x, y, z , через

потенциальную энергию V . Это те усложнения, которые появляются по сравнению с простым вышерассмотренным случаем колеблющегося жидкого тела. Ни одно из них не является существенным. Зависимостью u от E мы ограничены в том, что можем применить волновое уравнение только к такой функции p , зависимость которой от времени дана в виде:

$$p \sim e^{2\pi i Et/h}$$

так что

$$\ddot{p} = -\frac{4\pi^2 E^2}{h} p. \quad (12)$$

Но это то же допущение, которое вводится и при обычном методе решения. Если мы подставим (12) и (8) в (10) и букву p заменим на ψ (чтобы выразить, что здесь точно также, как и раньше, мы исследуем лишь функцию координат), то найдем:

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V)\psi = 0. \quad (13)$$

Итак, мы видим, что второе усложнение уравнения (10) (зависимость скорости u от V и, следовательно, от координат) придает уравнению (10а) только более интересную форму [(ср.(13) с (10а)], выражающуюся в том, что коэффициент при ψ уже не *постоянный*, а зависит от координат. Этого действительно можно было ожидать, так как уравнение, выражающее механическую проблему, должно в сущности содержать потенциальную функцию. Упрощение в случае волномеханической проблемы (по сравнению с рассмотренной проблемой жидкости) заключается в отсутствии граничных условий.

Когда я впервые занялся этим вопросом, мне это упрощение казалось неблагоприятным, так как я не был достаточно математически подготовлен и не мог себе представить, каким образом могут получиться собственные частоты без граничных условий. Позже я понял, что более сложная форма коэффициентов, а именно, появление $V(x, y, z)$ до известной степени дает то, что обычно достигается граничными условиями — отбор определенных значений E .

Я здесь не могу углубляться в эту несколько длительную математическую дискуссию, а также не могу останавливаться подробно на том, как находятся эти решения. Скажу только, что метод практически тот же, как и в обычной проблеме колебания: вводят соответствующие координаты (сферические, эллиптические, смотря по форме функции V) и полагают ψ равным произведению функций, из которых

каждая содержит лишь одну координату. Сообщу лишь результаты для случая атома водорода.

Здесь нужно положить:

$$V = -\frac{e^2}{r} + \text{const}, \quad (14)$$

где r — расстояние от ядра. Тогда находим, что простые, регулярные и конечные решения ψ существуют не для всех, а только для следующих значений E :

$$1) E_n = \text{const} - \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 n^2}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$2) E > \text{const}.$$

Константа та же, что и в (14), и в нерелятивистской волновой механике не имеет определенного значения. Правда, ее нельзя принять равной нулю, как это обычно делается ради простоты, — в этом случае все значения в 1) были бы отрицательны, а отрицательная частота означает (если она, вообще, что-нибудь означает) то же, что и положительная частота того же абсолютного значения. Тогда было бы непонятно, почему допускаются все положительные частоты, а из отрицательных — только дискретный ряд. Однако вопрос об этих постоянных здесь несущественен.

Видите, таким образом, что наше дифференциальное уравнение автоматически отбирает следующие допустимые значения E :

1) энергетические уровни квантованных по теории Бора эллиптических орбит;

2) все энергетические уровни, относящиеся к гиперболическим орбитам.

Это весьма замечательно, ибо показывает, что, независимо от физического значения волн, теория дает метод квантования, совершенно свободный от необходимости постулирования целочисленности той или иной величины. Для того, чтобы дать представление о том, как здесь выступают целые числа, приведу пример.

Если ψ — азимутальный угол, а амплитудная функция содержит множитель $\cos m\psi$, где m — произвольная константа, то последняя должна быть целым числом, иначе волновая функция не была бы *однозначной*.

Теперь вам интересно, какой вид имеют волновые функции, относящиеся к характеристическим значениям E , и способны ли они объяснить какие-либо экспериментальные факты. Это, действительно, имеет место, хотя представляется несколько сложным делом.

Лекция вторая

4. Краткое описание волновой системы водородного атома. Вырождение. Возмущение

Главная особенность амплитудных функций состоит в том, что те из них, которые относятся к дискретному ряду значений E_n (эллиптические орбиты), очень быстро убывают с удалением от ядра, а именно: как $e^{-\text{const}\cdot r}$; поэтому они практически ограничиваются областью, имеющей точно такой же порядок величины, как соответствующие орбиты Бора. Амплитудные функции, соответствующие гиперболическим орбитам, убывают гораздо медленнее, а именно, лишь как r^{-1} .

Точное поведение «функции эллипсов» нельзя описать однозначным способом по следующей причине: одному значению E_n соответствует, вообще, не одно, а ровно n^2 независимых решений волнового уравнения. С математической точки зрения это есть исключение, обусловленное особой формой потенциальной энергии, а именно: ее сферической симметрией. Мнозначность решений, относящихся к одному собственному значению, соответствует хорошо известной многозначности орбит в теории Бора, относящихся к тому же энергетическому уровню. Там это явление называется «вырождением». Мы перенесем это название в волновую механику. Так как волновое уравнение является линейным и однородным, то решением, соответствующим одному собственному значению, может быть каждая линейная функция указанных n^2 решений с произвольными коэффициентами. В таком случае, как известно, никакой ряд решений не имеет преимуществ перед другим, получающимся из первого путем образования стольких же независимых линейных выражений. Этим процессом образования линейных выражений можно получить решения, обладающие различными свойствами.

Например, из ряда решений, узловыми поверхностями которых являются: 1) концентрические шары, 2) коаксиальные конусы и 3) плоскости, проходящие через оси конусов, можно образовать другие решения, где на месте концентрических шаров и коаксиальных конусов возникают два рода конфокальных параболоидов. Это — только один из

простейших случаев. Вообще же, если взять произвольные коэффициенты, то система узловых поверхностей намного усложняется.

Эта многозначность решений, или, как обычно говорят, собственных значений (которые, между прочим, известны из обычной проблемы колебания), имеет для случая атома очень большое значение.

Если многозначности нет (как, например, для самой малой частоты, $n = 1$), то небольшое изменение потенциальной энергии V , которое может быть вызвано слабым внешним электрическим полем, вызывает ни что иное, как небольшой сдвиг собственного значения и собственной функции, точно также, как небольшой кусочек металла, прикрепленный к камертону, изменил бы высоту его тона и форму его колебаний. Но многократно вырожденное (скажем, α -кратное) собственное значение проявляет в данном случае свою многократность тем, что оно расщепляется на α собственных значений, которые мало отличаются друг от друга. Каждому из них соответствует вполне определенная собственная функция, мало отличная от определенного линейного выражения из собственных функций, соответствующих многократно вырожденному собственному значению. Это расщепление теоретически может быть вызвано самым малым возмущением, однако может сильно отличаться для двух, разных по своему характеру, возмущений. Например, однородное электрическое поле создает вышеупомянутые параболические поверхности, а магнитное поле — шаровые и конусные поверхности.

Расщепление в этих двух случаях соответствует расщеплению спектральных линий водорода в эффектах Зеемана и Штарка. Количественно сдвиг линии описывается новой теорией также, как и старой. Однако получается также то, что было невозможно для классической теории: состояние *поляризации* спектральных линий, их *интенсивность* и, в особенности, *отсутствие* известных линий, которые ожидалось бы, если бы образовать все возможные разности расщепленных энергетических уровней. Сейчас мы это рассмотрим ближе.

5. Физическое значение волновой функции. Вывод правила отбора и правил поляризации спектральных линий

Большое значение эффекта возмущения заключается в том, что он дает возможность иметь дело с однозначно определенными собственными функциями ψ_k , и что теперь мы легче можем испытать гипотезу о физическом значении величины ψ .

Обозначим через

$$E_k = h\nu_k \quad \text{и} \quad \psi_k(x, y, z)$$

соответственно собственные значения, частоты и функции проблемы, потенциальную энергию которой полагаем настолько несимметричной, что никакого вырождения нет.

Тогда выражение

$$\psi = \sum_k c_k \psi_k e^{2\pi i(\nu_k t + \vartheta_k)} \quad (15)$$

с произвольными постоянными c_k и ϑ_k представляет самое общее «колебание» системы¹.

Так как каждое ψ_k определено только до произвольного множителя, то, во избежание неопределенности, подчиним ψ_k нормирующему условию:

$$\iiint \psi_k^2 dx dy dz = 1. \quad (16)$$

Пожалуй, здесь уместно упомянуть об очень важном свойстве, которое автоматически выполняют ψ_k — они ортогональны друг к другу:

$$\iiint \psi_k \psi_l dx dy dz = 0 \quad \text{для} \quad k \neq l \quad (17)$$

и образуют полную ортогональную систему, т. е. функция, которая ортогональна ко всем функциям, должна равняться нулю (эти свойства важны при разложении любой функции в ряд по ψ_k , но нам на этом пока нет нужды останавливаться).

Вернемся теперь к общей функции (15) и спросим, можно ли величине ψ приписать определенное физическое значение, чтобы объяснить световое излучение частоты $\nu_{kk'} = \nu_k - \nu'_k$. Это, действительно, можно сделать, правда, только в том случае, если применить комплексную ψ -функцию, а не ее вещественную часть, к чему мы привыкли в обычных проблемах колебаний.

¹Мы здесь оставили без рассмотрения «непрерывный спектр», соответствующий гиперболическим орбитам. Мы можем положить, что его колебания не возбуждены или что \sum уже содержит интеграл, как предельный случай, который, собственно говоря, следовало бы добавить, чтобы принять во внимание непрерывную область собственных функций. Я не хотел сверх необходимости усложнять формулы.

Гипотеза, которую нужно сделать, очень проста. Именно, нужно постулировать, что квадрат абсолютной величины ψ пропорционален электрической плотности заряда, который, согласно с законами обычной электродинамики, выбивает излучение. Так как квадрат абсолютного значения ψ получается умножением ψ на ее комплексно сопряженное значение (которое мы обозначим через $\bar{\psi}$), то из уравнения (7) видно, что ψ действительно составлено из выражений, временная зависимость которых дана косинус функциями желаемых частот $\nu_k - \nu_{k'}$. Представим теперь точнее плотность заряда в виде

$$\rho = -e\psi\bar{\psi} = -e \sum_k \sum_{k'} c_k c_{k'} \psi_k \bar{\psi}_{k'} e^{2\pi i[(\nu_k - \nu_{k'})t + (\vartheta_k - \vartheta_{k'})]}, \quad (18)$$

где e означает абсолютное значение электрического заряда. Интегрируя это выражение по всему пространству и используя уравнения (17) и (16), находим для всего заряда:

$$-e \sum_k c_k^2.$$

Это показывает, что надо положить $\sum_k c_k^2 = 1$, чтобы достигнуть равенства полного заряда заряду электрона, чего мы и добиваемся.

Еще раньше было отмечено, что ψ , а вместе с ней и ρ , практически ограничены в очень малой области в несколько $A - E$. Так как длины волн световых лучей по сравнению с этой областью очень велики, то можно приближенно рассматривать излучение колеблющейся плотности заряда как излучение электрического диполя, электрический момент которого имеет z -компоненту:

$$M_z = \iiint z_\rho dx dy dz$$

(и соответственно составленные x , y -компоненты). Для M_z получается из (18) после простого преобразования:

$$M_z = - \sum_k c_k^2 \alpha_{kk'} - 2 \sum_{kk'} c_k c_{k'} \alpha_{kk'} \cos 2\pi[(\nu_k - \nu_{k'})t + (\vartheta_k - \vartheta_{k'})]. \quad (19)$$

Здесь $\alpha_{kk'}$ есть сокращенное обозначение для следующей постоянной:

$$\alpha_{kk'} = e \iiint z \psi_k \bar{\psi}_{k'} dx dy dz, \quad (20)$$

а $\sum_{kk'}$ берется по всем парам (k, k') . Квадраты этих интегралов (соответствующие выражения для направлений x, y) определяют, следовательно, интенсивность светового излучения частоты $\nu - \nu_{k'}$. Правда, оно определяется не только ими одними, но, как нужно ожидать, играют роль и амплитудные постоянные c_k . Это вполне понятно, потому что интегралы $\alpha_{kk'}$ определяются *механической природой* системы, т. е. ее соответственными функциями, не учитывая ее *состояния*. $\alpha_{kk'}$ есть амплитуда соответствующего диполя, которая была бы вызвана собственными колебаниями $\psi_k, \psi_{k'}$, если бы возбуждались только они и с одинаковой силой $\left(c_k = c_{k'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Для исследования излучения первая сумма (19) несущественна, ибо она представляет составляющую постоянного во времени электрического момента. Правильность нашей гипотезы $\bar{\psi}$ была проверена тем, что были вычислены $\alpha_{kk'}$ в таких случаях, где ψ_k определено с достаточной степенью точности, а именно, в Зееман- и Штарк-эффектах. Так называемые правила отбора, поляризации и распределения интенсивности в явлениях расщепления описываются путем $\alpha_{kk'}$ следующим образом, в полном согласии с опытом.

Отсутствие ожидаемых спектральных линий («правило отбора») описывается обращением в нуль соответствующего $\alpha_{kk'}$ и двух других, постоянных для направлений x, y .

Линейная поляризация линии в определенном направлении выражается тем, что только постоянная, соответствующая этому направлению, отлична от нуля, тогда как обе другие постоянные исчезают. Подобным образом характеризуется и круговая поляризация, скажем, в $xу$ -плоскости: 1) исчезновением z -постоянной; 2) равенством $xу$ -постоянных и 3) разностью фаз на $\frac{\pi}{2}$ между соответствующими косинус-функциями в уравнении (19).

Наконец, отношение интенсивностей между неисчезающими компонентами Штарк-эффекта или Зееман-эффекта атома водорода выражается отношением квадратов, соответствующих $\alpha_{kk'}$. Этого достаточно, так как весьма правдоподобно предположение, что c_k компонентов тонкой структуры уровня равны, несмотря на наши в общем недостаточные знания c_k .

Конечно, невозможно дать в этой лекции все расчеты, ведущие к описанным результатам. Они заполнили бы большое количество страниц и были бы, хотя и не трудны, но очень утомительны. Несмотря на

это, прямо поражает, когда видишь, как все хорошо известные, однако непонятные «правила» одно за другим оказываются результатом хорошо известного, очень элементарного и абсолютно убедительного вычисления, вроде того, что $\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi \cos d\varphi$ исчезает во всех случаях, кроме $n = m$.

Если однажды установить гипотезу $\psi\bar{\psi}$, то тут невозможно и не нужно никаких дополнительных допущений. Ни одно из них не могло бы помочь, если бы «правила» точно не оправдались. К счастью, они оправдываются.

Я бы хотел еще обратить внимание ваше на другой пункт, о котором говорилось только вкратце в начале лекции, а именно на тот факт, что и основное условие частот Бора

$$\nu_{kk'} = \nu_k - \nu_{k'} = \frac{1}{h}(E_k - E_{k'})$$

объясняется гипотезой $\psi\bar{\psi}$. Есть нечто в атоме, что колеблется точно с *наблюдаемой* частотой, а именно известная часть распределения электрической плотности, или, если угодно, $\psi\bar{\psi}$.

Это могло бы привести к предположению, что реальное значение имеют не ψ -функции сами по себе, а только квадрат их абсолютного значения. А это предположение могло бы снова вызвать желание заменить волновое уравнение другим, непосредственно описывающим поведение $\psi\bar{\psi}$. Чтобы не возбуждать у вас этого желания, я вам напомню другой случай, где вы по подобным причинам могли бы выразить аналогичное желание, в то время как вы все должны согласиться, что это было бы невыполнимо.

Уравнения Максвелла описывают поведение электромагнитных векторов. Однако последние недоступны наблюдению. Единственно, что поддается наблюдению, — это пондеромоторные силы или, если угодно, энергия, потому что силы вызываются разностью энергии при возможном перемещении. Но все эти величины (энергия, максвелловские напряжения) суть *квадратичные* функции векторов поля. Поэтому может возникнуть желание заменить уравнения Максвелла другими, непосредственно определяющими квадратичные функции векторного поля, поддающиеся наблюдению. Но всякий согласится, что это, во всяком случае, означало бы громадное усложнение и что в действительности невозможно было бы обойтись без уравнений Максвелла.

6. Вывод собственного временного волнового уравнения

Уравнение

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V)\psi = 0, \quad (13)$$

которым мы воспользовались для исследования атома водорода, дает только пространственное распределение амплитуд колебания, причем зависимость от времени всегда задана в виде:

$$\psi \sim e^{2\pi i Et/h}. \quad (21)$$

Частотный параметр E явно содержится в уравнении, так что мы в действительности имеем дело с рядом уравнений, из которых каждое действительно только для определенной частоты. Дело обстоит точно так же, как и в обыкновенных проблемах колебания, наше уравнение соответствует так называемому амплитудному уравнению [см. § 3, уравнение (10а)]:

$$\Delta\psi + \frac{4\pi^2\nu^2}{u^2}\psi = 0, \quad (10a)$$

а не уравнению

$$\Delta p - \frac{1}{u^2}\ddot{p} = 0, \quad (10)$$

из которого предыдущее выведено вышеуказанным способом (а именно, тем, что p рассматривается как синус-функция времени). В нашем случае остается сделать соответствующий шаг в обратном смысле, а именно, удалить параметр E из амплитудного уравнения и на его место ввести производные по времени. Это легко сделать. Берут одно из уравнений (13) с определенным значением E и получают из (21):

$$\dot{\psi} = \frac{2\pi i E}{h}\psi \quad \text{или} \quad E\psi = \frac{h}{2\pi i}\dot{\psi}.$$

Применяя это выражение, получаем из (13):

$$\Delta\psi - \frac{4\pi m i}{h}\dot{\psi} - \frac{8\pi^2 m V}{h^2}\psi = 0. \quad (22)$$

Получается всегда одно и то же уравнение, независимо от того, какое значение имеет при этом E (так как E исключено). Следовательно, уравнение (22) действительно также для произвольного линейного

агрегата собственных колебаний, а, стало быть, и для самого общего волнового движения, которое является решением проблемы.

Пойдем еще дальше и попытаемся использовать уравнение для случая, когда потенциальная энергия V явно содержит время. Вовсе не очевидно, что это обобщение правильное, потому что выражения с V и т. д. могли от нас ускользнуть — они могли бы не войти в уравнение (22) при таком способе, каким мы его вывели. Но результат оправдывает наше предприятие. Конечно, было бы бессмысленным предположить, что уже в уравнении (13) V явно содержит время, так как условие (21), которым это уравнение ограничено, сделало бы невозможным удовлетворить его в случае произвольной переменной функции V .

7. Возмущение атома переменным электрическим полем

Это обобщение дает нам возможность ответить на следующий вопрос: как ведет себя атом под влиянием внешнего переменного поля, т. е. под влиянием падающей световой волны? Это очень важный вопрос, потому что он охватывает не только механизм вторичного излучения и, в частности, резонансного излучения, но и теорию изменения состояний в атоме под влиянием падающего излучения соответственной частоты, а также теории преломления и дисперсии, ибо, как известно, дисперсия (я имею в виду показатель преломления) вызывается наложением на первичное излучение всех тех вторичных элементарных волн, которые излучают каждый отдельный атом тела под влиянием первичного излучения и в связи с его фазой. Если электрический вектор падающего света \mathfrak{E} заставляет каждый атом излучать вторичную волну так, как она излучалась бы диполем с электрическим моментом

$$\mathbf{M} = \alpha \mathfrak{E} \quad (23)$$

(где α — константа), и если в единице объема имеется Z атомов, то они вызывают увеличение показателя преломления на величину

$$2\pi Z\alpha. \quad (24)$$

Поэтому изучение значения α (которая обычно является функцией частоты) означает изучение явлений преломления и дисперсии.

Чтобы исследовать поведение атома во внешнем электрическом переменном поле, предположим, что V в (22) состоит из двух частей, из

которых одна — V_0 — описывает внутреннее электростатическое поле атома, а вторая изображает световое поле $Aez \cos 2\pi\nu t$; A и ν — амплитуда и частота светового поля, которое мы предположим поляризованным в направлении z (отрицательный знак электронного заряда учтен; наше e — положительное число). Тогда из (22) следует:

$$\Delta\psi - \frac{4\pi mi}{h} \dot{\psi} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} \cdot (V_0 + Aez \cos 2\pi\nu t)\psi = 0. \quad (25)$$

Положим A малым сравнительно с внутренним полем (описываемым через V_0) и решим уравнение приближенно. Если бы $A = 0$, мы получили бы, учитывая (21), уравнение (13) (только с V_0 вместо V). Предположим, что задача невозмущенного атома вполне разрешена. Пусть его нормированные собственные функции и собственные значения энергии соответственно равны:

$$\psi_k \quad \text{и} \quad E_k (= h\nu_k),$$

тогда для $A = 0$ самым общим решением уравнения (25) является

$$\psi = \sum_k c_k \psi_k e^{2\pi i \nu_k t}, \quad (26)$$

причем c_k — произвольные комплексные постоянные.

Попытаемся решить уравнение (25) также для случая $A \neq 0$ с помощью формулы (26), причем предположим, что c_k медленно изменяется со временем (метод вариации постоянных). Если это сделать и одновременно принять во внимание, что ψ_k , $h\nu_k$ — собственные функции и собственные значения невозмущенного уравнения, то при подстановке (26) в (25) легко получается:

$$\sum_k c_k \psi_k e^{2\pi i \nu_k t} = \frac{2\pi i}{h} Aez \cos 2\pi\nu t \sum_k c_k \psi_k e^{2\pi i \nu_k t}. \quad (27)$$

Это уравнение выполняется при условии, что при одинаковых значениях времени все коэффициенты разложения левой части по функциям ψ_k равны соответствующим коэффициентам разложения правой части. Если обе части умножить на ψ_l и проинтегрировать по всему пространству, положив для сокращения (см. § 5):

$$\alpha_{kl} = e \iiint \psi_k \psi_l z \, dx \, dy \, dz, \quad (20)$$

то, учитывая нормировку и ортогональность функций ψ_k , получаем:

$$c_l e^{2\pi i \nu_l t} = \frac{2\pi i}{h} A \cos 2\pi \nu t \sum_k a_{kl} c_k e^{2\pi i \nu_k t}, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (28)$$

Этот бесконечный ряд обыкновенных дифференциальных уравнений эквивалентен уравнению (27). Исключая \dot{c}_l и заменяя конусы экспоненциальными функциями, получим:

$$\dot{c}_l = + \frac{\pi i A}{h} \sum_k a_{kl} c_k [e^{2\pi i (\nu_k - \nu_l + \nu) t} + e^{2\pi i (\nu_k - \nu_l - \nu) t}]. \quad (28a)$$

До сих пор мы еще не приступили к непосредственной задаче возмущения. Сделаем это теперь двумя различными способами: один из них ведет к теории вторичного излучения (кроме случая резонанса) и к дисперсии, другой дает процесс резонанса и изменения атомных состояний.

Лекция третья

8. Теория вторичного излучения и дисперсии

Предположим, что все выражения $\nu_k - \nu_l \pm \nu$, встречающиеся в показателях уравнения (28a), велики по сравнению с величиной:

$$\frac{A a_{kl} c_k}{\hbar}.$$

Это означает, что разность между поглощенной частотой и какой-либо частотой спонтанного излучения велика по сравнению с частотой, соответствующей потенциальной энергии атома во внешнем поле (исключение для случая сильного или приближенного резонанса). При этом предположении уравнения (28a) показывают, что *все* производные по времени от c_l малы по сравнению с производными экспоненциальных функций. Рассмотрим для этого случая одну из экспоненциальных функций в правой части одного из уравнений (28a). Ее коэффициент c_k можно рассматривать как постоянный во время периода экспоненциальной функции. Тогда этот член суммы вызовет лишь небольшое периодическое колебание c_l (в левой части), которое через период экспоненциальной функции точно или с достаточной точностью снова вернется к исходному значению. То же действительно для *всех* экспоненциальных функций. Поэтому все c производят большое число малых колебаний вокруг своего среднего значения — колебаний, которые, конечно, исчезают с исчезновением A . Поэтому можно в правой части уравнения (28a) заменить c постоянными, а именно — их средними значениями, так как если здесь пренебречь малыми колебаниями, то отпадают только выражения с A^2 . Введем для упомянутых постоянных обозначение c_k^0 . Тогда уравнения легко интегрировать.

Получается:

$$c_l = c_l^0 + \frac{A}{2\hbar} \sum_k a_{kl} c_k^0 \left[\frac{e^{2\pi i(\nu_k - \nu_l + \nu)t}}{\nu_k - \nu_l + \nu} + \frac{e^{2\pi i(\nu_k - \nu_l - \nu)t}}{\nu_k - \nu_l - \nu} \right].$$

Следовательно, l -й член в нашем решении (26) будет:

$$c_l \psi_l e^{2\pi i \nu_l t} = c_l^0 \psi_l e^{2\pi i \nu_l t} + \frac{A \psi_l}{2\hbar} \sum_k a_{kl} c_k^0 \left[\frac{e^{2\pi i (\nu_k + \nu) t}}{\nu_k - \nu_l + \nu} + \frac{e^{2\pi i (\nu_k - \nu) t}}{\nu_k - \nu_l - \nu} \right]. \quad (29)$$

Хотя мы еще не достигли результатов, которые можно было бы сравнить с опытом, все же, руководствуясь уравнением (29), дадим описание того, что происходит под влиянием подающей световой волны. Каждое собственное колебание ψ_l , будет ли оно сначала возбуждено, или нет, должно совершить много малых вынужденных колебаний, а именно, два, так сказать, «в честь» каждого заметно возбужденного собственного колебания ψ_k , ($c_k^0 \neq 0$). Частоты обоих вынужденных колебаний, которые ψ_l совершает, как мы сказали, «в честь» ψ_k , равны $\nu_k \pm \nu$, т.е. сумме и разности поглощенной частоты и частоты свободного собственного колебания. Их амплитуды пропорциональны, во-первых, амплитуде внешнего поля и, во-вторых, амплитудам свободных колебаний ψ_k ; кроме того, они содержат в качестве множителя константу a_{kl} , т.е. ту самую постоянную, которая определяет интенсивность спонтанного испускания частоты $|\nu_k - \nu_l|$. Далее, в обеих вынужденных амплитудах встречаются два «резонансных знаменателя», которые вызывают быстрое увеличение одной из амплитуд, если частота падающего света приближается к частоте спонтанного излучения $|\nu_k - \nu_l|$.

Прежде, чем составить из (26) и (29) полное решение, ограничимся важным случаем, когда возбуждено только одно собственное колебание, скажем ψ_k :

$$c_k^0 = 1; \quad c_l^0 = 0 \quad \text{при} \quad l \neq k.$$

Мы можем предположить, что ψ_k соответствует нормальному состоянию. Тогда в правой части уравнения (29) отпадает первое: выражение (кроме случая $l = k$) и знак суммы, и мы для полного решения получаем [уравнение (6), где k нужно заменить через l]:

$$\psi = \psi_k e^{2\pi i \nu_k t} + \frac{A}{2\hbar} \sum_l a_{kl} \psi_l \left[\frac{e^{2\pi i (\nu_k + \nu) t}}{\nu_k - \nu_l + \nu} + \frac{e^{2\pi i (\nu_k - \nu) t}}{\nu_k - \nu_l - \nu} \right]. \quad (30)$$

(Обратите внимание, что теперь экспоненты независимы от суммационных индексов l ; имеется только две частоты вынужденного колебания.) Чтобы определить вторичное излучение, образуем из (30) компоненту¹ M_z результирующего электрического момента. Если пренебречь

¹Вообще, для анизотропного атома будут еще M_y и M_x , перпендикулярные к направлению поляризации поглощенного излучения. Сейчас мы ими не занимаемся.

малыми выражениями второго порядка (пропорциональными A^2), то после приведения находим:

$$M_z = -e \iiint \psi \bar{\psi} z \, dx \, dy \, dz = -a_{kk} + \frac{2}{\hbar} A \cos 2\pi\nu t \sum_l \frac{(\nu_l - \nu_k) a_{kl}^2}{(\nu_l - \nu_k)^2 - \nu^2}. \quad (31)$$

Первый член ($-a_{kk}$) независим от времени. Он равен постоянному электрическому моменту, соответствующему возбуждению свободного колебания ψ_k . Этот постоянный момент нас здесь не интересует. Второе выражение определяет вторичную волну. Видно, что ее частота совпадает с частотой электрического вектора поглощаемого колебания ($A \cos 2\pi\nu t$). Обе имеют равные или противоположные фазы в зависимости от того, имеет ли место $\nu > \nu_l - \nu_k$ или $\nu < \nu_l - \nu_k$ — точно как в классической механике. Это имеет место в том случае, если ψ_k соответствует нормальному состоянию, так что $\nu_l - \nu_k$ всегда положительны. Если же они становятся отрицательными, то справедливо обратное (члены Крамера в формуле дисперсии). Величина α в уравнении (26), определяющая по (24) увеличение показателя преломления, получится из второго члена (31), если отбросить $A \cos 2\pi\nu t$. Знаменатели $(\nu_l - \nu_k)^2 - \nu^2$ дают явление аномальной дисперсии вблизи всех тех эмиссионных (или абсорбционных) частот, где имеет место k -е собственное колебание. (Вспомним наше предположение о том, что возбуждено только это единственное свободное колебание). Величина a_{kl}^2 в числителе та же, которая определяет интенсивность спонтанного испускания $|\nu_k - \nu_l|$. Во всех этих пунктах формула является точным отображением старой формулы Гельмгольца (дополненной «отрицательными» членами Крамера), и, как полагают, находится в полном согласии с экспериментом.

Следует упомянуть о двух дальнейших обстоятельствах. Известно, что Томас и Кун выдвинули гипотезу, согласно которой *сумму* всех коэффициентов формулы дисперсии, в нашем случае

$$\frac{2}{\hbar} \sum (\nu_l - \nu_k) a_{kl}^2,$$

следует приравнять значению коэффициента для *одного* квазиупруго связанного электрона, т. е. положить равной:

$$\frac{e^2}{4\pi^2 m}$$

(в нашем случае, значению для *одного* электрона, ибо мы занимаемся атомом с одним электроном; в общем случае — целому кратному этого значения). Равенство обеих упомянутых величин может быть доказано для нашей дисперсионной формулы. Но доказательство несколько кропотливо, поэтому я здесь его не приведу.

Второе обстоятельство следующее. Вы, вероятно, помните допущение, впервые сделанное *Смекалем*, что существует и такое вторичное излучение, частоты которого отличны от частоты ν поглощаемых лучей (так что отсутствует связь между фазами, а с ней и влияние на показатель преломления). Частоты, которые можно было бы ожидать, следующие:

$$\nu \pm (\nu_k - \nu_{k'}).$$

Вторичное излучение точно таких же частот дает и настоящая теория, если отказаться от нашего упрощающего предположения, что возбуждено только *одно* свободное колебание, а имеется, по меньшей мере, два таких колебания, скажем, ψ_k и $\psi_{k'}$.

9. Теория резонансного излучения и изменения атомных состояний под влиянием падающего света, частота которого точно или почти совпадает с частотой естественного излучения

В начале предыдущего раздела мы должны были сделать предположение, что все выражения вида $\nu_k - \nu_l \pm \nu$ имеют значительную величину. Это означает, что частота поглощаемого света ν не находится в непосредственном соседстве с каждой естественной частотой излучения атома. Предположим теперь, что частота падающего света лежит очень близко к одной из естественных частот. Пусть для определенности $\nu_l > \nu_k$ и пусть $\nu_k - \nu_l + \nu$ очень мало (т. е. порядка величины $\frac{Aa_{kl}}{\hbar}$ или менее, или равно нулю). Возвратимся к уравнениям (28а). В правой части этой системы уравнений найдем две медленно изменяющиеся экспоненциальные функции, а именно:

$$e^{2\pi i(\nu_k - \nu_l + \nu)t} \quad \text{и} \quad e^{2\pi i(\nu_k - \nu_l - \nu)t}.$$

Первая появляется в l -м уравнении, вторая — в k -м. Эти выражения обуславливают, как мы сейчас увидим, весьма значительные «вековые»

изменения обеих величин c_k и c_l , как бы ни была мала амплитуда A падающей волны. Все другие экспоненциальные функции вызывают, как и раньше, только небольшие периодические возмущения. Поэтому можно оставить их без внимания, так как мы здесь заняты более грубым явлением (именно, значительными «вековыми» изменениями c_k и c_l). Мы могли бы даже принять равными нулю все другие c ; это не повредило бы, так как в пределах той точности, к которой мы здесь стремимся, они, наверное, постоянны.

Для определения c_k и c_l из (28a) получаем два простых уравнения:

$$\dot{c}_l = i\sigma c_k e^{i\epsilon t}; \quad \dot{c}_k = i\sigma c_l e^{-i\epsilon t} \quad (32)$$

с сокращенными обозначениями:

$$\sigma = \frac{\pi A a_{kl}}{h}; \quad \epsilon = \nu_k - \nu_l + \nu. \quad (33)$$

Чтобы их решить, мы вводим новые переменные x , y , полагая

$$c_l = x e^{i\epsilon t/2}; \quad c_k = y e^{-i\epsilon t/2}. \quad (34)$$

Результат преобразования мы можем написать в виде:

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{i\epsilon}{2}\right)x = i\sigma y; \quad \left(\frac{d}{dt} - \frac{i\epsilon}{2}\right)y = i\sigma x.$$

Эти уравнения имеют постоянные коэффициенты и легко могут быть решены известным методом. Решение можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= \rho e^{i(\gamma t + \varphi)} + \mu \rho' e^{-i(\gamma t - \varphi')}, \\ y &= \mu \rho e^{i(\gamma t + \varphi)} + \rho' e^{-i(\gamma t - \varphi')} \end{aligned} \quad (35)$$

с сокращениями:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \sigma^2}; \quad \mu = \frac{\gamma + \frac{\epsilon}{2}}{\sigma}, \quad (36)$$

где ρ , ρ' , φ , φ' — произвольные вещественные положительные постоянные. Мы можем (35) придать форму:

$$\begin{cases} x = e^{i(\varphi - \varphi')/2} [(\rho + \mu \rho') \cos \vartheta + i(\rho - \mu \rho') \sin \vartheta] \\ y = e^{i(\varphi - \varphi')/2} [(\mu \rho - \rho') \cos \vartheta + i(\mu \rho + \rho') \sin \vartheta] \end{cases} \quad (37)$$

с сокращенным обозначением:

$$\vartheta = \gamma t + \frac{\varphi + \varphi'}{2}. \quad (38)$$

Из (37) можно легко образовать квадраты абсолютных значений x и y , т. е. [см. уравнение (34)] c_l и c_k , и, таким образом, выяснить изменяющееся распределение интенсивности двух рассматриваемых колебаний, что интересует нас в первую очередь. Имеем:

$$\begin{cases} |c_l|^2 = |x|^2 = |\rho - \mu\rho'|^2 + 4\mu\rho\rho' \cos^2 \vartheta, \\ |c_k|^2 = |y|^2 = |\mu\rho - \rho'|^2 + 4\mu\rho\rho' \sin^2 \vartheta. \end{cases} \quad (39)$$

Сумма интенсивностей, как и следовало ожидать, *постоянна*. Можно себе представить ее состоящей из трех частей: две из них тесно связаны с обоими состояниями колебания, а третья (именно $4\mu\rho\rho'$) медленно осциллирует между ними. Чтобы сделать это положение вещей более ясным, рассмотрим случай, когда в определенное время вся интенсивность сконцентрирована в *одном* колебании, скажем, в нижнем, c_k . Выберем значение времени t так, чтобы $\cos \vartheta = 0$; тогда $\rho' = \frac{\rho}{\mu}$, и для отношения между осциллирующей частью интенсивности и полным ее значением имеем:

$$\frac{4\mu\rho\rho'}{(\mu\rho + \rho')^2} = \frac{4}{(\mu + 1/\mu)^2} = \frac{\sigma^2}{\gamma^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2/4}, \quad (40)$$

используя ясное из (36) обстоятельство, что

$$\mu = \frac{\gamma + \varepsilon/2}{\sigma} = \frac{\sigma}{\gamma + \varepsilon/2}.$$

Мы видим, что при $\varepsilon = 0$ полное значение интенсивности осциллирует. Но $\varepsilon = 0$ означает согласно (33) сильный резонанс. Если резонанс неполный, то (40) показывает, что колеблется лишь определенная часть интенсивности, которая уменьшается, если отклонение от резонанса велико по сравнению с величиной σ , определяемой уравнением (33). Величина σ такого же порядка, как и деленная на h потенциальная энергия, которую атом получает в световом волновом поле посредством электрического момента, соответствующего взаимодействию k -го и l -го колебаний. Эта величина дала бы некоторым образом меру естественной

резкости резонансной линии, если бы можно было найти общую, действительную для всех случаев, формулу для амплитуды A падающего света. На этом мы не будем останавливаться.

Теория, которую я здесь изложил в общих чертах, описывает как изменение атомного состояния, вызванное поглощением излучения соответствующей частоты, так и появление резонансного излучения, потому что одновременное наличие обоих колебаний ψ_k и ψ_l вызывает спонтанное излучение. Следует еще отметить, что в виду наличия в уравнении (34) экспоненциальных функций это излучение имеет не частоты $\nu_l - \nu_k$, а точно частоту ν поглощенной световой волны.

10. Распространение волновой механики на системы с несколькими материальными точками

До сих пор мы применяли метод волновой механики только к очень простой системе, а именно, к единственной материальной точке, движущейся в постоянном или переменном во времени силовом поле. Перейдем теперь к любой механической системе. Это можно было сделать и раньше: все сказанное о влиянии переменного поля — с небольшими изменениями было бы действительно и для любой системы, например, для многоэлектронного атома. Но я считал, что лучше предложить вам сперва простой и ясный случай.

Вывод основного волнового уравнения, который я изложил в первой лекции, легко обобщить на любую систему. Единственная разница заключается в том, что «пространство», в котором распространяется волна, уже не обычное трехмерное, а «пространство обобщенных координат» (q — пространство).

Вспомним принцип Гамильтона–Мопертюи, из которого мы исходим:

$$\delta \int_A^B 2T dt = 0. \quad (1)$$

Приравняв

$$2T = mw^2 = m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 2(E - V) = \frac{ds}{dt} \cdot \sqrt{2m(E - V)},$$

мы привели m к виду:

$$\delta \int_A^B \sqrt{2m(E - V)} ds = 0 \quad (2)$$

и затем сравнили с принципом распространения волн Ферма:

$$\delta \int_A^B \frac{ds}{u} = 0, \quad (3)$$

благодаря чему мы пришли к уравнению:

$$u = \frac{C}{\sqrt{2m(E - V)}}. \quad (4)$$

В общем случае T не имеет такого простого выражения:

$$\frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2,$$

а приобретает вид:

$$2T = \sum_l \sum_k b_{lk} q_l q_k, \quad (41)$$

где b_{lk} — некоторые функции обобщенных координат q_l .

Элемент длины ds в q -пространстве мы определяем из выражения:

$$2T = \sum_l \sum_k b_{lk} q_l q_k = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

или

$$ds^2 = \sum_l \sum_k b_{lk} dq_l dq_k. \quad (42)$$

Обобщенная неевклидова геометрия, определенная последней формулой, — это та самая геометрия, которой пользовался в своей знаменитой механике Г. Герц, формально рассматривая движение любой системы как движение одной материальной точки (в неевклидовом многомерном пространстве). Если ввести ее здесь, то, очевидно, все наши соображения первой лекции, приведшие к основному волновому уравнению, могут быть перенесены сюда даже с небольшим формальным

упрощением, а именно: можно положить $m = 1$. Так же, как и там, мы получаем:

$$u = \frac{E}{\sqrt{2(E - V)}},$$

и, наконец, для волнового или (лучше) амплитудного уравнения имеем:

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2}{h^2}(E - V)\psi = 0. \quad (43)$$

Для собственно волнового уравнения мы, как и раньше (§ 6), получаем:

$$\Delta\psi - \frac{4\pi i}{h}\dot{\psi} - \frac{8\pi^2 V}{h^2}\psi = 0. \quad (44)$$

Δ теперь, конечно, не просто трехмерный оператор Лапласа и не обычный оператор в многомерном евклидовом пространстве (т. е. сумма вторых производных по координатам) — теперь его нужно рассматривать как хорошо известное обобщение оператора Лапласа для общего линейного элемента вида (42).

При решении общих проблем мы обходимся без явного выражения для этого оператора — нам нужно знать только, что он является самосопряженным дифференциальным оператором второго порядка (впрочем, в данный момент неважно, если вы и не знаете, что означает самосопряженный). Ради полноты я все же дам обобщенное выражение оператора. Пусть a_{lk} будет соответствующий b_{lk} минор, деленный на определитель $\sum \pm b_{lk}$ и далее пусть a будет детерминант матрицы a_{lk} . Тогда

$$\Delta = a^{1/2} \sum_l \frac{\partial}{\partial q_l} \left(a^{-1/2} \sum_k a_{lk} \frac{\partial}{\partial q_k} \right). \quad (45)$$

В случае единственной материальной точки массы m и при евклидовых координатах Δ сводится к произведению $\frac{1}{m}$ на элементарный оператор Δ (именно, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$). Или, если вы предпочитаете выразить движение отдельной материальной точки в других координатах, например, эллиптических или полярных, то вы получите произведение $\frac{1}{m}$ на выражение элементарного оператора Δ , соответствующего взятым координатам. Если система состоит из n свободных материальных точек, то получается сумма их элементарных Δ операторов, каждый из которых делится на соответствующую массу. В такой форме

теорию можно применить к системам с любым числом степеней свободы — большим, меньшим или равным трем. Я дам несколько примеров, не приводя подробных вычислений, разве только том случае, если они представляют какой-нибудь физический интерес.

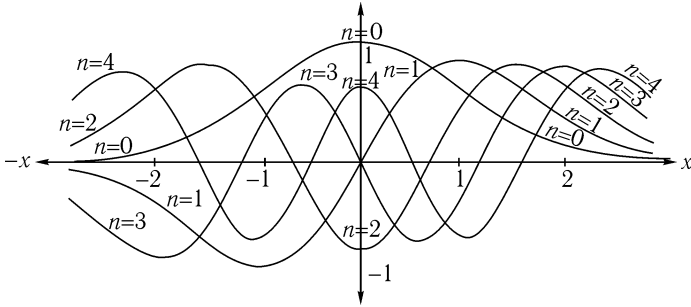


Рис. 2

11. Примеры: осциллятор, ротатор

Рассмотрим одномерный гармонический осциллятор. В обычной механике выражение для его энергии гласит:

$$T + V = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + 2\pi\nu_0^2 m q^2.$$

(Мы выразили коэффициент потенциальной энергии через классическую собственную частоту ν_0). Это легко приводит к амплитудному уравнению:

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{d^2\psi}{dq^2} + \frac{8\pi^2}{h^2} (E - 2\pi^2\nu_0^2 q^2) \psi = 0.$$

Можно показать, что решения этого уравнения — непрерывные и конечные для всей вещественной q -оси — существуют только для следующих значений E :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu_0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (46)$$

Собственными функциями здесь являются так называемые ортогональные функции Эрмита:

$$\psi_n = (2^n n!)^{-1/2} e^{-x^2/2} H_n(x), \quad (47)$$

где

$$x = q \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m\nu_0}{h}}.$$

$H_n(x)$ представляет так называемый n -й полином Эрмита. Графическое изображение первых пяти функций (47) дано на рис. 2. Хотя теоретически ψ_n простираются до бесконечности, практически они ограничены экспоненциальными функциями в области такого же порядка величины, как амплитуда соответствующей классической материальной точки (что очень легко доказать).

Мы еще ничего не сказали о физическом значении нашей обобщенной функции ψ . Прежде всего интересно следующее соображение: если ψ_n — собственные функции одноэлектронной проблемы, а q — одна из прямоугольных координат, то интенсивность эмиссии частоты $\frac{1}{h}|E_n - E_k|$, поляризованной в q -направлении, можно выразить (сообразно нашей гипотезе $\psi\bar{\psi}$) квадратом интеграла:

$$\int q\psi_k\psi_n dq.$$

Применив это здесь, мы получим весьма удовлетворительный результат, а именно: интеграл исчезает, кроме случая $(k - n) = 1$. Это означает, что все частоты испускания света, кроме $1 \cdot \nu_0$, исключены. Мы в дальнейшем вернемся к вопросу о физическом значении ψ для общего случая.

В качестве второго примера возьмем снова одномерную проблему: простой ротатор с неподвижной пространственной осью. Здесь полная энергия состоит только из кинетической, а именно:

$$\frac{A}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2,$$

где A — момент инерции, а φ — угол вращения. Амплитудное уравнение получает вид:

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{d^2\psi}{d\psi^2} + \frac{8\pi^2 E}{h^2} \varphi = 0,$$

и решениями будут:

$$\psi = \frac{\sin}{\cos} \left[\sqrt{\frac{8\pi^2 EA}{h^2}} \varphi \right].$$

Очевидно, ψ должно быть периодическим в φ с периодом, равным 2π , вследствие чего квадратный корень должен быть целым числом. Это дает собственные значения

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 A} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (48)$$

в полном согласии со старой квантовой теорией. Попытаемся таким же формальным способом, как и раньше, вычислить интенсивность излучения. Если в обычной механике электрическая частица тесно связана с ротатором, находясь на расстоянии a от центра тяжести, то ее прямоугольные координаты будут:

$$\left. \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right\} = a \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \varphi.$$

Составим выражение:

$$\int_0^{2\pi} \psi_n \psi_k \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right\} d\psi = a \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \sin \\ \cos \end{array} \right\} n\varphi \left\{ \begin{array}{l} \sin \\ \cos \end{array} \right\} k\varphi \left\{ \begin{array}{l} \sin \\ \cos \end{array} \right\} \varphi dq.$$

Так как произведение первых двух $\left. \begin{array}{l} \sin \\ \cos \end{array} \right\}$ функций всегда можно выразить суммой или разностью $\left. \begin{array}{l} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (n \pm k)\varphi$, то, очевидно, восемь выражений, изображенных данной формулой, отличны от нуля только в том случае, если $|n + k|$ или $|n - k| \neq 1$. Это хорошо известное для ротатора правило отбора.

Интересно еще раз рассмотреть ротатор без ограничения, что его ось неподвижна в определенном направлении. Для амплитудного уравнения находим:

$$\Delta_{\vartheta, \varphi} \psi + \frac{8\pi^2 AE}{h^2} \psi = 0.$$

Здесь $\Delta_{\vartheta, \varphi}$, представляет ту часть элементарного Δ -оператора (выраженного в полярных координатах), которая содержит дифференцирование только по углам ϑ и φ . Как известно, настоящее уравнение имеет конечные и однозначные решения только в том случае, если ψ является произведением двух последовательных целых чисел:

$$\frac{8\pi^2 AE}{h^2} = n(n + 1),$$

а решением является поверхностная шаровая функция n -й степени [собственное значение E_n вырождено $(2n + 1)$ раз, ибо имеется $(2n + 1)$ независимых шаровых функций n -й степени]. Это дает собственные значения:

$$E_n = \frac{n(n + 1)h^2}{8\pi^2 A}. \quad (49)$$

Последнее означает, в сущности, что n входит в классическую формулу (48) половинным числом. [Так как $n(n + 1) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, а общая постоянная, прибавленная ко всем E_n при образовании разности выпадает]. Как известно, рассмотрение полосатых спектров часто неизбежно приводило к применению «половинных» квантовых чисел. Все эти спектры, по-видимому, совместимы с новой формулой. [Само собой разумеется, что нужно применять формулу (49), а не (48), так как ось молекулы не может быть искусственно закреплена]. Правило отбора получается точно так же, как и раньше, но путем немного более сложных вычислений.

Лекция четвертая

12. Учет движения ядра водородного атома

В первой лекции мы рассматривали атом водорода как задачу одного тела, предполагая ядро неподвижным в пространстве. Как известно, в обычной механике проблема двух тел с массами M и m распадается на две части, а именно, на:

1) прямолинейное движение центра тяжести (центра инерции),

и

2) кеплерово движение тела с результирующей массой μ вокруг неподвижного центра, причем μ удовлетворяет соотношению:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}. \quad (50)$$

По теории Бора, эта поправка к уравнению для атома водорода количественно подтверждается небольшой разностью частот между линиями иона гелия и линиями водорода, которые точно совпали бы, если бы ядро имело бесконечно большую массу. (Иными словами, количественно получается разница между постоянными Ридберга для He^+ и H , если учесть незначительное движение ядра. — Зоммерфельд.) Такое же положение вещей встречается и в волновой механике. Шестимерное амплитудное уравнение для проблемы двух тел гласит:

$$\frac{1}{m} \Delta_1 \psi + \frac{1}{M} \Delta_2 \psi + \frac{8\pi^2}{h^2} (E - V) \psi = 0. \quad (51)$$

Под Δ_1 и Δ_2 разумеется элементарный оператор Лапласа в отношении координат электрона (x_1, y_1, z_1) или ядра (x_2, y_2, z_2) . Относительно V следует предположить, что она зависит только от r , причем

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Введем теперь на место x_1, \dots, z_2 координаты центра тяжести (ξ, η, ζ) и относительные координаты m относительно M (назовем их x, y, z). Тогда простое вычисление показывает, что

$$\frac{1}{m} \Delta_1 \psi + \frac{1}{M} \Delta_2 \psi = \frac{1}{m + M} \Delta_{\xi, \eta, \zeta} \psi + \frac{1}{M} \Delta_{x, y, z} \psi.$$

Значение Δ ясно, μ определяется уравнением (50). Подставим его в (51). Полученное уравнение распадается на два, если представить ψ в виде произведения двух функций (скажем φ и χ), каждая из которых соответственно зависит только от ξ, η, ζ и x, y, z . При разделении переменных появляется произвольная постоянная, которая в нижеследующих уравнениях обозначается через E . Для φ получается:

$$\frac{1}{m+M} \Delta_{\xi, \eta, \zeta} \varphi + \frac{8\pi^2 E_l}{h^2} \varphi + 0 \quad (52)$$

и для χ :

$$\frac{1}{\mu} \Delta_{x, y, z} \chi + \frac{8\pi^2}{h^2} (E - E_t - V) \chi = 0. \quad (53)$$

Первое уравнение волномеханически описывает свободное движение центра тяжести. Постоянная E_t соответствует его энергии поступательного движения и может принимать любое положительное значение. $E - E_t$ соответствует внутренней энергии. Второе уравнение точно представляет проблему одного тела для материальной точки массы μ , движущейся в постоянном силовом поле V . Единственным отличием в собственных значениях, соответствующих внутренней энергии, является, следовательно, то, что в постоянную Ридберга входит μ вместо m . Таким образом, упомянутый выше важный результат Зоммерфельда опять достигается волновой механикой. Так как вывод этого результата очень прост, то в литературе на нем много не останавливались. Но это является одним из непосредственных подтверждений того, что существует доля истины в методе многомерных волн, каким бы неприятным на первый взгляд не казалось такое многомерное толкование.

13. Возмущение произвольной системы

Теория возмущения любой системы не имеет существенных новых черт по сравнению с теорией возмущения атома с одним электроном, частный случай которого мы рассмотрели в § 7–9. Однако для ясности представим ее еще раз в сжатом виде. Общее волновое уравнение по § 10 можно написать в виде:

$$\dot{\psi} = \frac{2\pi i}{h} \left(-\frac{h^2}{8\pi^2} \Delta \psi + V \psi \right). \quad (54)$$

Введем оператор

$$H = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2}\Delta + V.$$

(V в качестве оператора означает «умножение на V ».) Тогда по уравнению (43) собственными функциями ψ_k являются те же самые собственные функции и воспроизводятся до постоянного множителя применением к ним оператора H . Эта постоянная равна соответственному собственному значению; следовательно:

$$H[\psi_k] = E_k\psi_k. \quad (55)$$

При этом уравнение (54) принимает простой вид:

$$\dot{\psi} = \frac{2\pi i}{\hbar}H[\psi]. \quad (56)$$

Приложение к V небольшого возмущения, независимо от того, содержит ли оно явно время или нет, означает небольшое изменение оператора H . (Конечно, изменение H можно получить и иным путем, например, изменением одной из масс и т. п. Этот общий случай можно включить в наше рассмотрение.) Обозначим возмущенный оператор через $H + H'$, учтя при этом, что H' должно быть «малым» оператором. Нам нужно, следовательно, решить уравнение:

$$\dot{\psi} = \frac{2\pi i}{\hbar}(H[\psi] + H'[\psi]). \quad (57)$$

Если ввести:

$$\psi = \sum_k c_k \psi_k e^{2\pi i \nu_k t}; \quad \nu_k = \frac{E_k}{\hbar}, \quad (58)$$

где c_k — медленно изменяющиеся со временем функции, то получим:

$$\sum_k \dot{c}_k \psi_k e^{2\pi i \nu_k t} = \frac{2\pi i}{\hbar} \sum_k c_k H'[\psi_k] e^{2\pi i \nu_k t}.$$

Это уравнение удовлетворяется, если оно ортогонально ко всем $\bar{\psi}_l$.¹ Умножая на ψ_l и интегрируя по всему координатному пространству,

¹Мы принимаем, что относительно полноты и ортогональности собственных функций общий случай ведет себя аналогично простому случаю с водородом. Так же, как и там, мы избегаем усложнения наших формул непрерывным спектром собственных значений.

имеем:

$$\dot{c}_l = \frac{2\pi i}{h} \sum_k c_k a_{lk} e^{2\pi i(\nu_k - \nu_l)t}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad (59)$$

где

$$a_{lk} = \int dq H'[\psi_k] \psi_l \quad (60)$$

и $\int dq$ — многократный интеграл по всему координатному пространству, a_{kl} — малые величины. Предположим, что возмущение консервативно; тогда a_{kl} постоянны. Так же, как и в рассмотренных частных случаях, заметное изменение c_l вызывают только экспоненциальные функции с исчезающими показателями. Предположим сперва, что система невырождена. Тогда, отбросив остальные члены, дающие только небольшие колебания, получим для каждого c_l :

$$\dot{c}_l = \frac{2\pi i a_{ll}}{h} c_l; \quad c_l = c_l^0 e^{2\pi i a_{ll} t / h}, \quad (61)$$

что, будучи введено в (58), означает ничто иное, как небольшое изменение частоты — на величину $\frac{a_{ll}}{h}$. Рассмотрите теперь случай вырождения. Тогда одному собственному значению E_l и частоте ν_l соответствуют амплитуды $c_l, c_{l+1}, \dots, c_{l+\alpha-1}$ разных собственных функций, и в каждом из соответствующих уравнений получается не один, а α исчезающих экспонентов, являющихся причиной вековых изменений. Эти α амплитуд определяются следующим рядом уравнений:

$$\dot{c}_{l+\rho} = \frac{2\pi i}{h} \sum_{\lambda=0}^{\alpha-1} c_{l+\lambda} a_{l-\rho, l+\lambda}, \quad \rho = 0, 1, 2, \dots \quad (62)$$

Они показывают, что под влиянием незначительного возмущения обычно происходит обмен между амплитудами вырожденных колебаний, относящихся к одному и тому же собственному значению. Следует говорить об обмене, так как из уравнения (62) можно легко показать, что

$$\sum_{\rho=0}^{\alpha-1} (c_{l+\rho})^2 = \text{const.}$$

Однако, говоря об обмене, не нужно забывать, что ряд собственных функций

$$\psi_{l+\rho} \quad (\rho = 0, 1, \dots, \alpha - 1)$$

является произвольным вплоть до ортогональной линейной подстановки с детерминантом 1. Последняя приводит к подобной замене амплитуд c_l . Если задано определенное возмущение, т.е. определенные

Умножая первое уравнение на φ , а второе на ψ и складывая их почленно, получим:

$$\frac{d}{dt}(\varphi\psi) = \frac{2\pi i}{h}(H + L)[\varphi\psi],$$

так как оператор H не действует на φ , а L не действует на ψ . Последнее выражение является волновым уравнением «комбинированной» системы, образованной мысленным соединением обеих систем. (Этот процесс обратен тому, который так часто делают при разделении уравнения, допуская, что решением является произведение двух функций, зависящих от различных частей системы.) Собственными функциями комбинированной системы являются произведения каждой из собственных функций системы на каждую собственную функцию второй системы. Легко видеть, что собственное значение такого произведения и системы равно сумме собственных значений отдельных уравнений. (Это отвечает в обычной механике факту аддитивности энергии.)

Сложение собственных значений может вызвать новое вырождение комбинированной системы даже в том случае, если отдельные системы не были вырождены (последнее мы предположим для простоты).

Пусть теперь E и E' — два собственных значения первой системы, а F и F' — собственные значения второй системы, имеющие то свойство, что

$$E + F = E' + F' = G$$

или

$$E - E' = F - F'.$$

Следовательно, если в обеих системах существует такая *одинаковая разность* собственных значений, это ведет к дважды вырожденному собственному значению G комбинированной системы. Предположим, для простоты, что другие соотношения подобного рода отсутствуют и имеется слабое взаимодействие обеих систем, которое оператор $H + L$ превратит в $H + L + J$, где J , конечно, содержит переменные первой и второй системы. Тогда амплитуды, соответствующие $E + F'$ и $E' + F$ проявят медленный «вековой» обмен, тогда как остальные останутся в основном постоянными. Сумма квадратов обеих рассматриваемых амплитуд тоже постоянна.

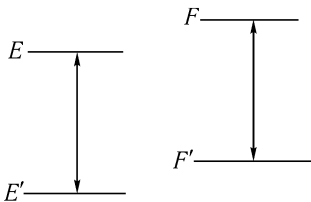


Рис. 3

В отношении отдельных систем это может означать лишь то, что амплитуда F возрастает за счет амплитуды F' , и, так сказать, для компенсации этого амплитуда E' увеличивается за счет E .

Это кажется подходящим волномеханическим описанием того, что в старой форме квантовой теории называлось перенесением кванта энергии $E - E' = (F - F')$ от одной системы к другой.

15. Физическое значение обобщенной ψ -функции

Полному выяснению изложенного мешает, вероятно, то обстоятельство, что мы избегали до сих пор делать какое-либо определенное предположение о физическом значении функции $\psi(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, принадлежащей к системе, описываемой в обычной механике обобщенными координатами q_1, \dots, q_n . Эта интерпретация представляет, действительно, щепетильный вопрос. «Размазывание» заряда электрона соответственно функции $\psi\bar{\psi}$, приведшее в проблеме одного электрона к удовлетворительным результатам (см. § 5), позволяет, в случае любой механической системы сделать следующее естественное обобщение: действительно, существующая в природе система не ведет себя так, как классическое механическое изображение (например, не так, как система материальных точек в определенной конфигурации), но скорее как образ этой системы, который получится, если распространить («размазать») классическую систему, описанную через q_1, q_2, \dots, q_n , на все ее координатное пространство, причем $\psi\bar{\psi}$ снова будет функцией плотности или весовой функцией.

Это означало бы, если вообще воспользоваться классической картиной, что поведение действительной системы описывается классической механической картиной, которая мыслится одновременно существующей во всех вообще возможных конфигурациях, однако в одних «сильнее», в других «слабее».

Этого объяснения я некоторое время придерживался. Что оно может быть полезным, видно из проблемы одного электрона (см. § 5). Никакая иная интерпретация ψ -функции не способна дать понять нам, почему постоянные a_{kl} дают такое полное объяснение интенсивности и поляризации излучения. Несмотря на это, такое понимание не вполне удовлетворительно. Ибо, что означает в предыдущем предложении выражение «вести себя»? «Поведение» ψ -функции, т. е. зависимость от времени t , никоим образом не определяется законами классической механики, а только волновым уравнением.

Была предложена близкая к истине *статистическая* интерпретация функции ψ , а именно, что ψ распространяется не на отдельную систему, а на сумму систем, определяя ту часть из них, которая в данном случае находится в определенной конфигурации¹.

¹Статистическое понимание функции ψ считается в настоящее время общепризнанным, но оно несколько сложнее, чем в краткой формулировке автора. (*Ред.*)

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ИДЕЯ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ¹

Нобелевская лекция, 12 декабря 1933 г.

Когда луч света проходит через оптический прибор, например трубу или фотографический объектив, он испытывает на каждой преломляющей или отражающей поверхности изменение направления. Мы можем построить ход луча, если известны оба простых закона, которые управляют этими изменениями направления: закон преломления, открытый двести лет назад Снеллиусом, и закон отражения, известный уже больше чем две тысячи лет назад Архимеду. На рис. 1 показан простой пример луча $A - B$, который испытывает преломление, подчиняющееся закону Снеллиуса на каждой из четырех граничных поверхностей двух линз.

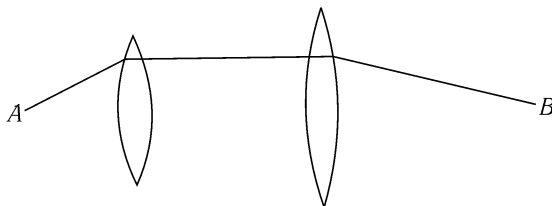


Рис. 1

Ферма сформулировал закон распространения луча света с гораздо более общей точки зрения. Свет распространяется в различных средах с различной скоростью, и путь луча определяется так, как будто бы лучу было важно *возможно быстрее* достигнуть той точки, в которую он приходит. (Заметим при этом, что за начальную и конечную точки можно взять *любые две* точки вдоль луча.) Малейшее отклонение от действительного пути означало бы замедление. В этом заключается знаменитый принцип *кратчайшего оптического пути* Ферма, замечательным образом определяющий всю судьбу светового луча в одном единственном положении, даже и в том случае, если свойства среды

¹Перевод с английского Д. Иваненко.

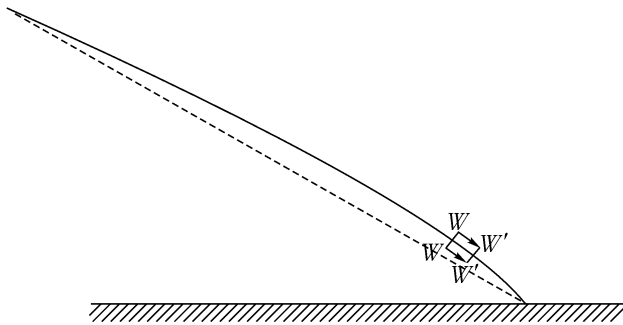


Рис. 2

изменяются не скачком на какой-либо поверхности, а постепенно, от точки к точке. Примером последнего является земная атмосфера. Чем глубже проникает в нее падающий извне луч света, тем медленнее распространяется он во все более и более плотном воздухе; хотя разница в скорости распространения и будет чрезвычайно незначительной, принцип Ферма все же требует при этом, чтобы путь луча света был вогнутым по отношению к земле (см. рис. 2), ибо тогда луч несколько дольше будет задерживаться в высших, «более быстрых» слоях и придет к цели скорее, чем на более коротком прямом пути (на рисунке нанесен пунктиром; небольшой четырехугольник $WW'W''W'$ пока не играет роли).

Я думаю, вы все замечали, что солнце, находясь у горизонта, кажется не круглым, а сплюснутым, так что его вертикальный диаметр представляется укороченным. Это также следствие искривления лучей. Согласно волновой теории света лучи имеют, собственно говоря, только фиктивное значение. Они не являются физическими траекториями каких бы то ни было световых частиц, но лишь математическим вспомогательным построением, так называемыми ортогональными траекториями волновых поверхностей, т. е. также воображаемыми линиями; последние направлены в каждой точке перпендикулярно волновой поверхности в ту сторону, в которую двигается последняя (см. рис. 3, на котором изображен простейший случай концентрических шаровых волновых поверхностей, и, следовательно, прямых лучей, тогда как рис. 4 разъясняет случай криволинейных лучей). Представляется удивительным, что столь важный всеобщий принцип относится непосредственно к этим математическим вспомогательным линиям,

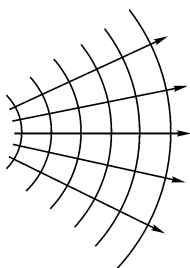


Рис. 3.

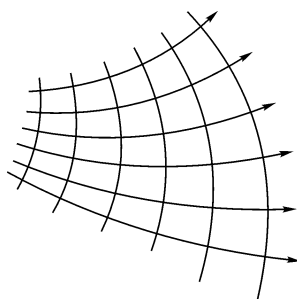


Рис. 4.

а не к волновым поверхностям, в виду чего принцип Ферма можно было бы рассматривать как некоторый математический курьез. На самом деле все обстоит совершенно иначе. Только с точки зрения волновой теории принцип Ферма становится вполне понятным и перестает быть чудом. Действительно, с волновой точки зрения так называемая *кривизна* луча света является гораздо более понятной, чем *поворот* волновой поверхности, который тривиальным образом должен иметь место, если соседние части волновой поверхности распространяются с различной скоростью; точно также, например, если рота солдат выполняет команду «захождения направо», то солдаты делают шаги различной величины: правифланговый — наименьший, левифланговый — наибольший шаг. В нашем примере с преломлением луча в земной атмосфере (рис. 2) кусочек волновой поверхности WW должен обязательно проделать поворот направо к $W'W'$, так как его левая часть лежит в более высоком слое менее плотного воздуха и поэтому движется быстрее, чем правая часть, лежащая ниже¹.

При ближайшем рассмотрении оказывается, что принцип Ферма по своему содержанию совершенно эквивалентен тривиальному и само собой разумеющемуся утверждению, что при заданной переменной от точки к точке скорости света фронт волны должен загибаться указанным образом. Я не имею возможности доказывать это здесь, но попытаюсь сделать указанное утверждение правдоподобным. Вернемся

¹Укажем, кстати, здесь на случай, для которого представление Снеллиуса оказывается неприменимым. Направленный горизонтально луч света, казалось, должен был бы оставаться горизонтальным, ибо ведь в горизонтальном направлении показатель преломления не меняется. В действительности же горизонтальный луч искривляется больше всякого другого, что непосредственно видно из представления о загибающемся волновом фронте.

опять к примеру марширующего отряда солдат. Пусть для того, чтобы сохранить полную правильность фронта, солдаты соединены длинной палкой, которую каждый твердо держит в руках. Сейчас ничего не будет говориться о захождении, команда гласит просто: «пусть каждый идет или бежит как можно быстрее». Если характер рельефа почвы медленно меняется от точки к точке, то сначала, скажем, правое, затем левое крыло фронта будет двигаться быстрее, и сами собой будут осуществляться повороты фронта. Через некоторое время мы заметим, что пройденный путь не является прямолинейным, а был как-то искривлен. Тот факт, что этот криволинейный путь в точности совпадает с *кратчайшим* в смысле времени прибытия в данный пункт при заданном рельефе, является по меньшей мере весьма правдоподобным, так как каждый солдат старался двигаться как можно быстрее. Отметим также, что поворот фронта всегда происходит в том направлении, в котором рельеф становится более тяжелым, поэтому в конце концов все выглядит так, как будто солдаты нарочно «обошли кругом» то место, где они должны были бы двигаться медленнее.

Таким образом, принцип Ферма представляется просто *тривиальной квинтэссенцией* волновой теории. Поэтому совершенно удивительным показалось открытие, сделанное в один прекрасный день Гамильтоном, что и действительное движение материальных точек в силовом поле (например, планет вокруг Солнца или брошенного камня в поле тяжести Земли) подчиняется совершенно такому же общему принципу, получившему имя своего автора и сделавшему последнего знаменитым. Хотя принцип Гамильтона и не говорит совсем точно, что материальная точка выбирает наиболее быстрый путь, но его утверждение *столь* близко, аналогия с принципом кратчайшего оптического пути *столь* непосредственна, что является загадочной. Казалось, что природа как будто осуществила одну и ту же закономерность двумя различными способами. Один раз, в случае света, при помощи довольно ясной игры волн, другой раз, в случае материальных точек, где положение вещей было непонятно, если только не стараться и здесь также говорить о волновой природе. Последнее предположение казалось сперва совершенно исключенным, ибо «материальные точки», на которых были подтверждены законы механики, в то время были просто большими видимыми телами, частью *очень* большими, например, планетами, и говорить о чем-то вроде их «волновой природы» вовсе не представлялось возможным.

Мельчайшие последние частицы материи, которые мы сейчас с гораздо большим правом называем «материальными точками», казались тогда еще чем-то совершенно гипотетическим. Только после открытия радиоактивности развитие экспериментальной техники привело к тому, что оказалось возможным изучать свойства отдельных корпускул или частиц; в настоящее время возможно даже остроумным способом Вильсона фотографировать и (при помощи стереофотографии) весьма точно измерять пути отдельных частиц. В пределах точности этих измерений для движения корпускул подтверждаются те же механические законы, что и для больших тел, планет и т. д. Впрочем, выяснилось, что, конечно, ни молекула, ни отдельный атом не могут считаться «последними камнями» материи, но что и атом является весьма сложной системой. В нашем представлении возникли картины строения атомов из частиц, по-видимому, аналогичные картине планетной системы. Вполне естественно было попытаться сперва сохранить здесь те же законы движения, которые столь замечательно оправдались для больших тел. Это значит, что к внутреннему поведению атома также была применена механика Гамильтона, которая, как я указал выше, формулируется в гамильтоновом принципе. То обстоятельство, что этот принцип весьма аналогичен оптическому принципу Ферма, было почти совсем забыто. Если об этом и вспоминали, то усматривали здесь только забавную случайность математической теории.

Весьма трудно, не вдаваясь в детали, составить правильное представление о том, насколько успешно или неуспешно было применение этой классически-механической картины к атому. С одной стороны, принцип Гамильтона оказался надежнейшим и лучшим проводником, без которого просто нельзя было обойтись; с другой стороны, для правильного описания опытных фактов необходимо было допустить вмешательство совершенно новых, непонятных требований, так называемых квантовых условий и квантовых постулатов. Они звучали как грубые диссонансы в симфонии классической механики и все же странным образом казались созвучными ей.

Математически можно выразить это положение вещей следующим образом: в то время как принцип Гамильтона требует только, чтобы некоторый интеграл был минимумом, но не определяет значений этого минимума, квантовые условия ограничивают значение минимума целыми кратными универсальной мировой постоянной, именно планковской постоянной действия. Но это только побочное замечание. По-

ложение вещей было довольно безнадежным. Если бы старая механика была совсем отброшена, дело не обстояло бы еще столь скверно, у нас были бы открыты возможности для создания новой механики. Мы же стояли перед трудной задачей спасти *сущность* механики, чье дыхание ясно чувствовалось в микрокосме, и в то же время, так сказать, выпросить у нее признания квантовых условий в качестве вытекающих из ее оснований положений, а не грубых внешних требований.

Выход был найден в упоминавшейся уже возможности усмотреть в принципе Гамильтона такой же результат игры волн, который собственно и лежит в основе движения материальных точек, точно так же, как мы уже давно привыкли видеть волны в явлениях света с их принципом Ферма. Отдельная траектория материальной точки теряет, впрочем, вследствие этого свой непосредственный физический смысл и становится чем-то фиктивным, вроде отдельного изолированного луча света. Но сущность теории, минимальный принцип, не только остается незатронутым, но лишь при волновом способе рассмотрения раскрывает свое истинное простое значение, как уже указывалось выше. Новая теория, собственно говоря, вовсе не является *новой*; она представляет собой органическое продолжение, хотелось бы сказать, более тонкое толкование старой теории.

Но каким же образом могло привести это новое, более «тонкое» толкование к заметно иным результатам, как смогло оно устранить трудности, встретившиеся в атоме, с которыми старая теория не могла справиться? Каким образом прежнее «грубое вмешательство» квантовых условий стало терпимым или даже оказалось связанным с развитием новых идей?

Эти вопросы лучше всего разъяснить также путем оптической аналогии. Я назвал выше с полным правом принцип Ферма квинтэссенцией волновой теории света. Несмотря на это, он не может избавить нас от более точного изучения самого волнового процесса. Так называемые явления дифракции и интерференции можно понять, только проследив в деталях движение волн, так как при этом речь идет не только о том, куда в конце концов придет волна, но также о том, в какой фазе придет она туда в данный момент времени. При старых, более грубых экспериментах эти явления играли роль только незначительных деталей и ускользали от наблюдения. Как только, однако, на них было обращено внимание и они были правильно, волновым образом, истолкованы, оказалось нетрудным придумать опыты, в которых волновая природа

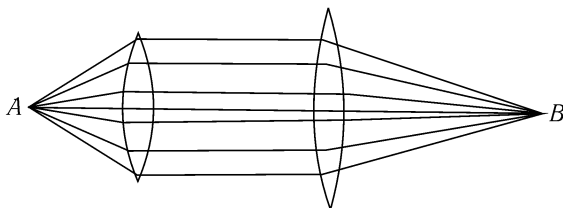


Рис. 5

света проявляется не только в деталях, но совсем ясно во всем характере явления.

Позвольте мне разъяснить это на двух примерах таких оптических инструментов, как телескоп, микроскоп и т. д. Мы хотим получить при помощи последних резкое изображение, т. е. стремимся заставить сойтись в одной точке, так называемом фокусе, все лучи, исходящие из некоторой точки рассматриваемого объекта (см. рис. 5). Сначала казалось, что здесь имеются только трудности геометрической оптики, впрочем, достаточно серьезные. Позднее выяснилось, однако, что даже у лучше сконструированных оптических приборов соединение лучей гораздо хуже, чем следовало ожидать, принимая, что каждый луч, независимо от соседних, точно следует принципу Ферма. Свет, исходящий из некоторой точки объекта и воспринимаемый оптическим прибором, не соединяется позади последнего опять в одну точку, но распространяется на маленькой, так называемой дифракционной, окружности, которая, впрочем, оказывается в большинстве случаев кругом лишь потому, что края линз и экранов являются окружностями.

Причиной этого явления, называемого дифракцией, является то, что не все шаровые волны, исходящие из данной точки, могут быть восприняты прибором. Края линз или экраны выделяют только часть волновых поверхностей (см. рис. 6), и, если позволено будет употребить наглядное выражение, пораженные части волн противятся строгому соединению в одной точке и порождают несколько размазанную или размытую картину. Размазанность самым тесным образом связана с *длиной волны* света и, ввиду этой глубокой теоретической причины, является совершенно неизбежной. Вначале едва отмеченная, эта принципиальная размазанность ограничивает разрешающую силу современного микроскопа, столь успешно поборовшего все остальные трудности, стоявшие на пути к идеальному изображению. От объектов, которые не

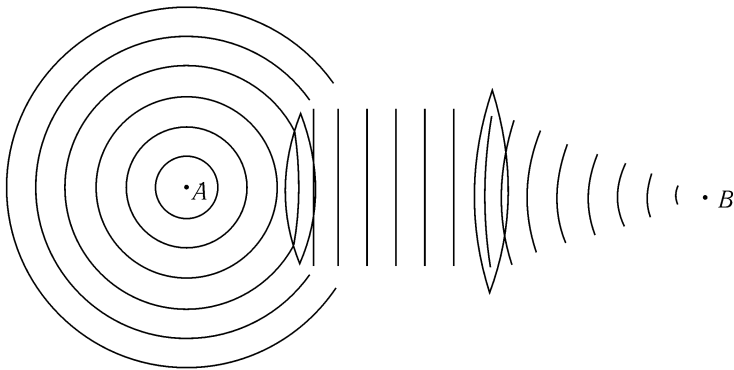


Рис. 6

превосходят размерами длину волны или даже являются более тонкими, мы получаем изображения, имеющие отдаленное сходство с оригиналом или даже вовсе ему не соответствующие.

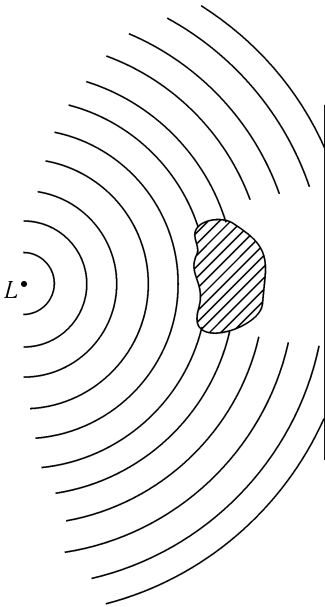


Рис. 7

Вторым, еще более простым примером является тень, которую дает небольшой точечный источник света от непрозрачного предмета. Чтобы построить форму тени, мы должны проследить каждый луч света и посмотреть, не мешает ли ему непрозрачное тело достичь экрана. Край тени образуется теми лучами света, которые, проходя мимо, еще касаются края предмета. Из опыта известно, что край тени даже при точечном источнике света и совершенно резкой границе предмета, дающего тень, в действительности не будет резким. Причина этого совершенно та же, что и в прежнем случае. Фронт волны, так сказать, разрезается предметом (см. рис. 7), что приводит к образованию нерезкого края тени, который был бы непонятен, если бы отдельные лучи света являлись самостоятельными и распространялись независимо друг от друга.

Это явление, которое также называется дифракцией, у больших тел вообще не слишком ярко выражено. Но если тело, дающее тень, имеет незначительные размеры, хотя бы в одном направлении, то дифракция будет проявляться тогда, прежде всего, в том, что собственно тень вообще не будет наблюдаться, во-вторых же, и значительно ярче, в том, что этот небольшой предмет сам окажется светящимся и испускающим свет по всем направлениям (впрочем, преимущественно под малыми углами к падающему свету). Конечно, каждый из вас наблюдал так называемую «солнечную пыль» на пути луча света, проникающего в темную комнату. Небольшие стебли травы и паутинные нити на вершине холма, за которым прячется солнце, или волосы человека, стоящего против солнца, светятся часто замечательно красиво в дифрагированном свете, на чем покоится также возможность видеть дым и туман. Дело идет, собственно, не о самом теле, но о небольшой области в его непосредственной близости, в которой тело вызывает значительное возмущение падающего волнового фронта. Интересно и важно для дальнейшего отметить, что область возмущения всегда в каждом направлении имеет размеры одной или немногих длин волн, как бы ни был мал возмущающий предмет. Таким образом, здесь мы опять встречаем тесную связь явлений дифракции с длиной волны. Последнее будет, пожалуй, наиболее ясным образом иллюстрировано путем сравнения с другим волновым процессом, именно звуком. Благодаря значительно большей длине волны, измеряемой здесь сантиметрами и метрами, образование тени в случае звука отступает на задний план, а дифракция играет большую и также практически важную роль; действительно, мы можем хорошо *слышать* человека, стоящего за высокой стеной или за углом большого дома, даже если мы его не можем *видеть*.

Возвратимся опять от оптики к механике и постараемся полностью использовать аналогию между ними. *Старой* механике в оптике соответствует мысленное оперирование с изолированными, независимыми друг от друга световыми лучами. Новой волновой механике соответствует волновая теория света. Переходя от старого к новому представлению, мы выигрываем в возможности учитывать явление дифракции или, лучше сказать, нечто весьма аналогичное явлению дифракции света; эти явления в механике, как и в оптике, говоря вообще, не должны играть особой роли; в противном случае старое представление механики не могло бы столь долгое время нас удовлетворять. Но не трудно догадаться, что в известных случаях явление дифракции, которым

пренебрегали, должно быть весьма заметным, целиком управляющим механическим процессом и представляющим для старой теории неразрешимую трудность; это будет иметь место тогда, когда *вся механическая система по своим размерам сравнима с длиной «материальных волн»*, играющих для механических процессов ту же роль, какую световые волны для процессов оптических.

Дифракция является причиной того, почему в этих крошечных системах атомов старое представление оказалось непригодным; оно остается применимым с большой точностью к грубым механическим процессам, но уже не в тонкой игре в областях порядка одной или немногих длин волн. Чрезвычайной неожиданностью было открытие, что здесь при новом волновом представлении сами собой исчезают все те странные добавочные требования, которые были насильно втиснуты в старую теорию, чтобы приспособить последнюю к описанию атома и суметь как-нибудь понять его реальное поведение.

Мы видим, существенным пунктом является то обстоятельство, что размеры атома и длины гипотетических волн материи являются величинами примерно одного порядка. Вы, конечно, спросите, является ли чистой случайностью, что при нашем исследовании строения материи мы как раз в этом месте сталкиваемся с величиной порядка длины волны. Вы спросите затем, откуда вообще известно об этих длинах волн материи, представляющих совершенно новый инструмент теории, никогда и нигде прежде не наблюдавшийся. Может быть, мы просто должны сделать это *предположение*?

Конечно, это совпадение размеров отнюдь не является простым случаем, и нам не нужно делать никакого нового предположения. Размеры длин волн получаются сами собой из теории, а величина их приводит к следующему замечательному факту. Опыты Резерфорда и Чадвика над рассеянием альфа-лучей, можно сказать, доказали, что тяжелое ядро атома значительно меньше самого атома и может поэтому рассматриваться в дальнейшем как точечный центр притяжения. Вместо *электронов* мы вводим гипотетические волны, оставляя их длину волн пока что совершенно неопределенной, ибо мы о ней ничего не знаем. Тогда в наших вычислениях будет стоять некоторая буква, например *a*, обозначающая какое-то еще неизвестное число. К этому мы уже привыкли, и ничто не мешает нам вычислить, что атомное ядро должно вызвать дифракцию этих волн, аналогично небольшой пылинке в случае света. Также, как там, мы получим, что размеры области возмущения,

окружающей ядро, тесно связаны с величиной длины волны и будут одного порядка с последней.

Теперь мы должны проделать решающий шаг: *мы отождествляем область возмущения, или арену дифракции, с атомом; мы утверждаем, что атом в действительности является ничем иным, как дифракционным явлением электронных волн, так сказать, пойманных атомным ядром.* Тот факт, что величина атома и длина волны будут одного порядка, не является уже больше случайностью, но представляется очевидным. Однако мы не знаем еще значений ни той, ни другой величины, так как в наших расчетах все еще стоит *одна* неопределенная постоянная, которую мы назвали через *a*. У нас имеются две возможности, взаимно контролирующие друг друга, для определения этой неизвестной. Во-первых, мы можем выбрать ее так, чтобы внешние проявления атома и, прежде всего, испускаемые им спектральные линии, как известно, измеренные весьма точно, получались бы в количественном согласии с опытом. Во-вторых, можно выбрать неизвестную величину так, чтобы арена дифракции оказалась совпадающей с размерами атома. Оба эти определения (из которых второе, впрочем, будет гораздо менее точным в виду неясности понятия «величина атома») *вполне согласуются друг с другом.* Мы можем, наконец, заметить, что неопределенная постоянная физически имеет на самом деле размерность не длины, но величины действия, т. е. энергии, умноженной на время. В таком случае весьма естественно взять для нее значение универсальной постоянной кванта действия Планка, хорошо известное из законов теплового излучения. Оказывается, что при всей возможной в настоящее время точности мы возвращаемся к *первому (наиболее точному) определению.*

Таким образом, теория обходится с минимумом новых предположений. В ней содержится единственная произвольная постоянная, которой мы должны придать численное значение, хорошо известное из старой квантовой теории; таким путем мы получаем, во-первых, правильную величину дифракционной площадки, которую мы можем разумным образом отождествить с атомом, и можем, во-вторых, количественно правильно вычислить все проявления атома — испущенный им свет, работу ионизации и т. д.

Я попытался здесь развить перед вами основную идею волновой теории материи в возможно более простой форме. Разрешите мне сознаться теперь, что, стремясь достичь возможной простоты, я несколько приукрасил положение вещей. Это не относится к полноте, с ко-



Рис. 8

торой были подтверждены экспериментом все достаточно осторожно сделанные выводы теории; но речь идет о принципиальной легкости и простоте, с которой все эти следствия были получены. Я не имею здесь в виду трудности математические, всегда в конце концов тривиальные, на именно трудности основных принципов. Конечно, легко заявить, что мы должны перейти от представления *траектории* к системе волновых поверхностей, перпендикулярных к ней. Но эти волновые поверхности, даже если мы будем рассматривать их небольшой участок (см. рис. 8), охватывают все же некоторый узкий *пучок* возможных траекторий и находятся со всеми ними в одинаковом соотношении. Согласно старому представлению одна из этих траекторий выделяется в каждом конкретном случае как «действительная» из всех остальных «просто возможных». В новой теории дело обстоит иначе. Мы сталкиваемся здесь со всей глубиной логической противоположности между случаем: «или — или» (механика точки) и случаем «и — и» (волновая механика).

Дело не обстояло бы так плохо, если бы мы должны были вовсе оставить старую теорию и *заменить* ее новой. К сожалению, речь идет не об этом. С точки зрения волновой механики бесконечное множество возможных траекторий точки является чем-то фиктивным, ни одна из них не имеет преимущества быть реально осуществленной в каком-либо конкретном случае, но, как я уже упоминал выше, мы во многих опытах действительно наблюдаем пути отдельных частиц. Волновое представление может это объяснить только с большим трудом или вообще не в состоянии дать на это ответ. Нам дьявольски трудно объяснить эти следы траекторий, которые мы *видим*, только узкими пучками равноправных возможных путей, которые связаны друг с другом волновыми поверхностями. Однако эти связи необходимы, чтобы понять явление дифракции и интерференции, которые можно наглядно продемонстрировать на той же частице с такой же отчетливостью, а не только заключить о них на основании теоретических представлений об атоме, о чем была речь выше. Хотя дело и обстоит таким образом, что мы в каждом конкретном частном случае можем отве-

титель на вопрос, не впадая в противоречие с какой-либо из двух точек зрения, но мы не можем более оперировать с такими приятными и как будто необходимыми понятиями, как «действительный», или «только возможный»; никогда нельзя сказать, что в действительности *имеет место* или в действительности *происходит*, но лишь указать, что будет *наблюдаться* в данном частном случае. Должны ли мы навсегда удовлетвориться подобным положением вещей? Принципиально, конечно, да. Принципиальное требование, что точная наука в конце концов должна стремиться к описанию действительно наблюдаемого, вовсе не является новым. Вопросом является лишь то, должны ли мы будем отныне отказаться связывать это описание с какой-либо ясной гипотезой о том, как в действительности устроен мир. Многие хотят уже сегодня заявить об этом отказе. Но мне кажется, что тем самым мы несколько уклоняемся от трудностей.

Я охарактеризовал бы современное состояние наших знаний следующим образом. Луч или траектория частицы отвечает *продольной* связи процесса распространения (т. е. в направлении распространения), волновая же поверхность соответствует *поперечной* связи, т. е. перпендикулярно направлению. Оба способа связи, без сомнения, являются реальными: один доказывается фотографиями Вильсона, другой — интерференционными опытами. Охватить их единой картиной нам до сих пор еще не удалось. Только в крайних случаях перевешивает поперечная, слоистая, или же, наоборот, лучевая, продольная, связь настолько, что мы *надеемся* обойтись при помощи одной волновой или одной корпускулярной картины.