МАТЕМАТИКА

Билет №000

Методические указания (**МУ**)

к решению образца билета по математике.

1. **Упростить выражение** $\dfrac{(\sqrt{a}+1)^2-\dfrac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+1)^3-a\sqrt{a}+2}$. **Ответ:** $\mathbf{\frac{1}{3}}$ **(10 баллов)**

   МУ: Воспользоваться формулами сокращенного умножения (квадрат и куб двучлена) и упрощающими преобразованиями (вынесение общего множителя, приведение подобных и сокращение дроби на одинаковый множитель):

$$\frac{(\sqrt{a}+1)^2-\dfrac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+1)^3-a\sqrt{a}+2}=\frac{a+2\sqrt{a}+1-\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{a\sqrt{a}+3a+3\sqrt{a}+1-a\sqrt{a}+2}=\frac{a+2\sqrt{a}+1-\sqrt{a}}{3a+3\sqrt{a}+3}=\frac{a+\sqrt{a}+1}{3(a+\sqrt{a}+1)}=\frac{1}{3}$$

2. **Сколько точек пересечения имеют графики функций**

   $y_1=-\sin x$ и $y_2=x^2+2x$ **?** **Ответ: 2 (10 баллов)**

   МУ: Преобразованием графиков простейших элементарных функций $y=\sin x$, $y=x^2$ построить графики заданных функций (рис.1) и графически определить количество их точек пересечения:

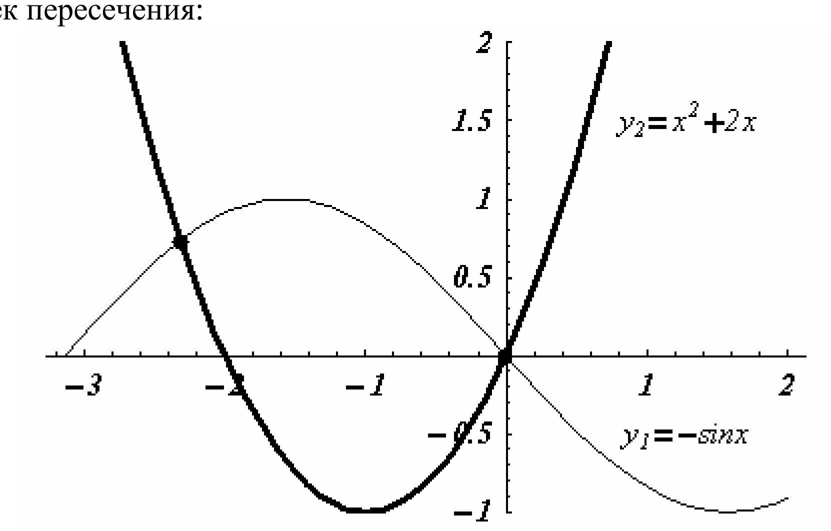


Рис.1

3. **Двое рабочих выполнили вместе работу за 12 часов. Если бы сначала первый сделал половину этой работы, а затем другой – остальную часть, то вся работа была бы выполнена за 25 часов. За какое время мог бы выполнить всю работу каждый рабочий в отдельности?** **Ответ: 20;30 (10 баллов)**

   МУ: Ввести обозначения x и y - время (в часах) выполнения всей работы соответственно первым и вторым рабочим в отдельности и построить согласно условию задачи систему уравнений, которой удовлетворяют x и y:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12}, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=25. \end{cases}$$

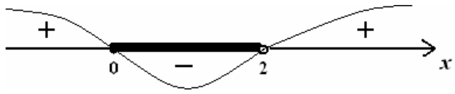
Решить построенную систему относительно x и y:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12}, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=25. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{12}, \\ x+y=50. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=600, \\ y=50-x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-50x+600=0, \\ y=50-x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2}=20;30, \\ y=50-x. \end{cases}$$

4. Найти область определения функции $y=\sqrt[4]{\dfrac{x}{2-x}}$. **Ответ:** $[0,2)$ **(10 баллов)**

МУ: Оформить область определения функции в виде дробно-рационального неравенства и решить его методом интервалов (построить кривую знаков дробно-рационального выражения):

$$\frac{x}{2-x}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x-2}\le 0 \Leftrightarrow$$



5. Решить уравнение $\sqrt{1+\dfrac{9}{x}}+4\sqrt{\dfrac{x}{x+9}}=4.$ **Ответ: 3 (15 баллов)**

МУ: Использовать замену переменных $z=\sqrt{1+\dfrac{9}{x}}$ для сведения данного иррациональные уравнения к квадратному уравнению относительно новой переменной: $z+\dfrac{4}{z}=4$. Решить последнее относительно новой переменной z, вернуться к старой переменной x и решить полученное таким образом уравнение относительно старой переменной x:

$$z+\frac{4}{z}=4 \Leftrightarrow z^2-4z+4=0 \Leftrightarrow z=2 \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{9}{x}}=2 \Rightarrow \frac{x+9}{x}=4 \Leftrightarrow x=3.$$

Сделать проверку.

6. Решить уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x=1.$ **Ответ:** $\dfrac{\pi}{2}k$ **(15 баллов)**

МУ: В рамках упрощающих тригонометрических преобразований воспользоваться формулами тригонометрической единицы и синуса двойного аргумента:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1 \Leftrightarrow \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=1+2\sin^2 x\cos^2 x \Leftrightarrow 1^2=1+\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

Решить упрощенное тригонометрическое уравнение относительно $\sin 2x$: $\sin 2x=0$ и оформить общее решение полученного простейшего тригонометрического уравнения.

7. **В равнобедренный треугольник вписана последовательность кругов так, что первый круг касается основания и боковых сторон, а каждый последующий - предыдущего круга и боковых сторон. Отношение боковой стороны треугольника к высоте равно $\sqrt{\Phi}$, где Φ - положительный корень уравнения $\Phi^4 - 3\Phi - 2 = 0$. Найдите отношение площадей второго и четвертого вписанных кругов. Ответ представить в виде степени с основанием Φ.** **Ответ:** Φ^{12} **(15 баллов)**

МУ: Выполнение данного задания следует оформлять поэтапно:

1. Сделать подробный чертеж (рис.2).
2. Исходя из подобия треугольников (например, $\Delta\mathbf{O_1H_2C_2}$ и $\Delta\mathbf{C_2H_2O_2}$) установить взаимосвязь отношения радиусов последующего и предыдущего вписанных кругов с углом $\boldsymbol{\alpha}$.
3. Исходя из условия задания (отношение боковой стороны треугольника к высоте равно $\sqrt{\mathbf{\Phi}}$) установить взаимосвязь Φ с с углом $\boldsymbol{\alpha}$.
4. Как следствие предыдущих двух этапов установить взаимосвязь отношения радиусов последующего и предыдущего вписанных кругов с Φ.
5. Как следствие предыдущего этапа установить взаимосвязь отношения площадей второго и четвертого вписанных кругов с Φ.
6. На основании свойств Φ, следующих из определения Φ (положительный корень уравнения $\Phi^4 - 3\Phi - 2 = 0$**)**, ответ представить в виде степени с основанием $\boldsymbol{\Phi}$.

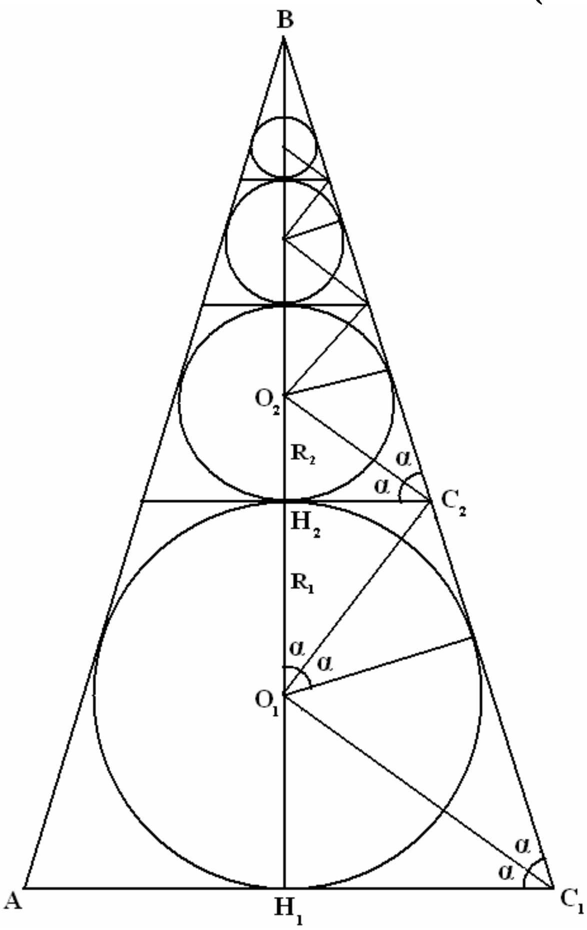


Рис.2

8. **Исследовать зависимость количества корней уравнения**

$$x^4 + k^2x^2 + 4k^2x + 32x + 4k + 56 = 0$$

от значений параметра k. **Ответ:** $\left[\begin{array}{l} \text{нет корней при } k \in (-1,2), \\ \text{один корень при } k_1 = -1,\ k_2 = 2, \\ \text{два корня при } k \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty). \end{array}\right.$ **(15 баллов)**

МУ: Выполнение данного задания следует оформлять поэтапно:

1. Представить исходное уравнение в виде равенства двух функций, одна из которых не зависит от параметра: $y(x) = x^4 + 32x + 56 = -(k^2x^2 + 4k^2x + 4k) = y_k(x)$.
2. Исследовать функцию $y(x)$ с помощью производной и построить график (рис.3).
3. Преобразовать функцию $y_k(x) = -(k^2x^2 + 4k^2x + 4k) = -k^2(x+2)^2 + 4k(k-1)$ и построить график для разных значений параметров k (рис.3):

$$\left[\begin{array}{c} y_1 \text{ при } k \in (-1,2), \\ y_2 \text{ при } k_1 = -1,\ k_2 = 2, \\ y_3 \text{ при } k \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty). \end{array}\right.$$

4. Исходя из взаимного расположения графиков $y(x)$ и $y_k(x)$ (рис.3) и оформить ответ.

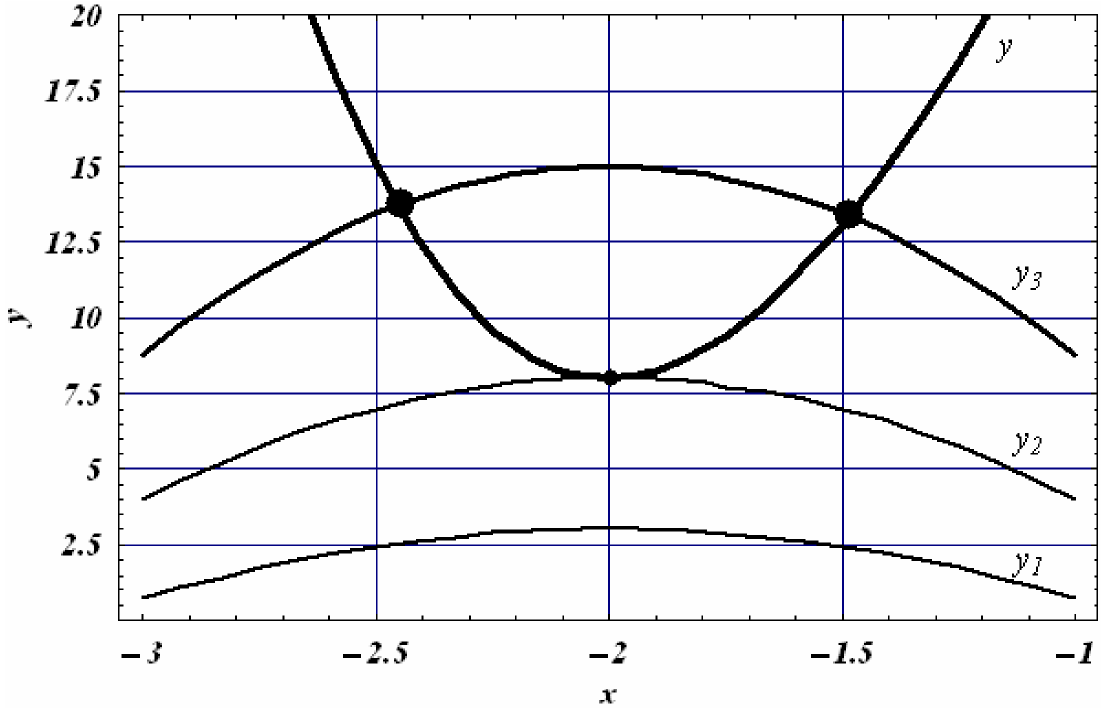


Рис.3