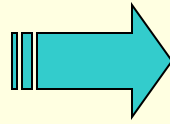

Электричество и магнетизм

Электростатика

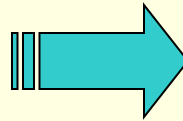
- ***Электрический заряд и его свойства.***
- ***Точечный заряд.***
- ***Закон Кулона – основной закон электростатики***

Древняя Греция



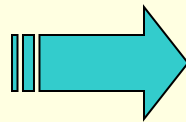
янтарь

Средиземное
море, бассейн
Нила



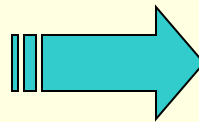
«электрические
рыбы»

Английский врач
Вильям Гилберт
(1540-1603)



«О магните,
магнитных телах и
великом магните
Земли»; термин
«электричество»

Отто фон Герике

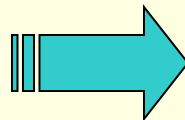


простейшая
электрическая
машина

Стефан Грей
(1670-1736)

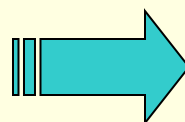
разделение тел на
группы: проводники
и непроводники

Шарль Франсуа
Дюфе (1698-1739)



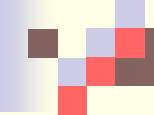
существование двух
видов электричества
(отталкивание,
притяжение)

Питер ван
Мюссенбрук и его
ученик Кюнеус
(г.Лейден);



Немецкий ученый
Клейст
(Померания)

Лейденская банка

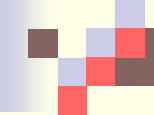


1752-1753 г.г. – Ломоносов и Рихман в России, Франклин в Америке – экспериментально доказали общность атмосферного электричества и электризации при трении

Рихман – создание первого электроскопа

Ломоносов – первая теория атмосферного электричества

Франклин – изобретение молниеотвода

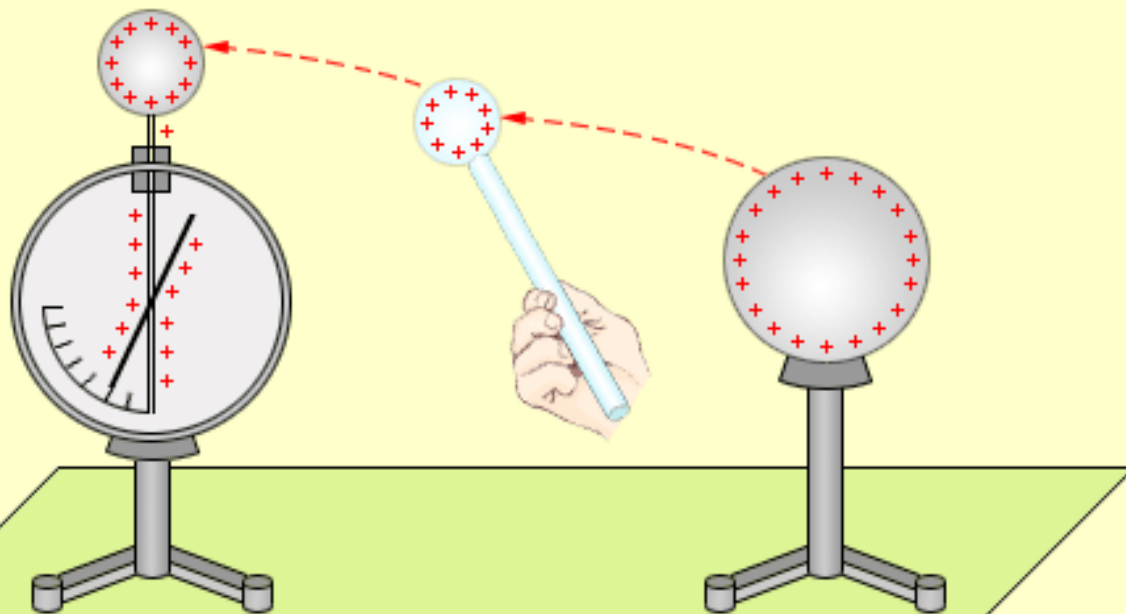


Электрический заряд — это физическая величина, характеризующая свойство частиц или тел вступать в электромагнитные силовые взаимодействия.

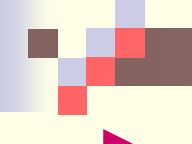
Обозначение — q или Q ,
единица измерения — Кулон (K).

Свойства электрических зарядов

► Взаимодействие зарядов: разноименно заряженные тела притягиваются, одноименно заряженные – отталкиваются.



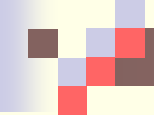
Электромметр –
прибор для
обнаружения и
измерения
электрических
зарядов



► Дискретность заряда: электрический заряд любой системы тел состоит из целого числа элементарных зарядов ($1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл)

С современной точки зрения, носителями зарядов являются элементарные частицы. Протоны и нейтроны входят в состав атомных ядер, электроны образуют электронную оболочку атомов. Электрические заряды протона и электрона по модулю в точности одинаковы и равны элементарному заряду e .

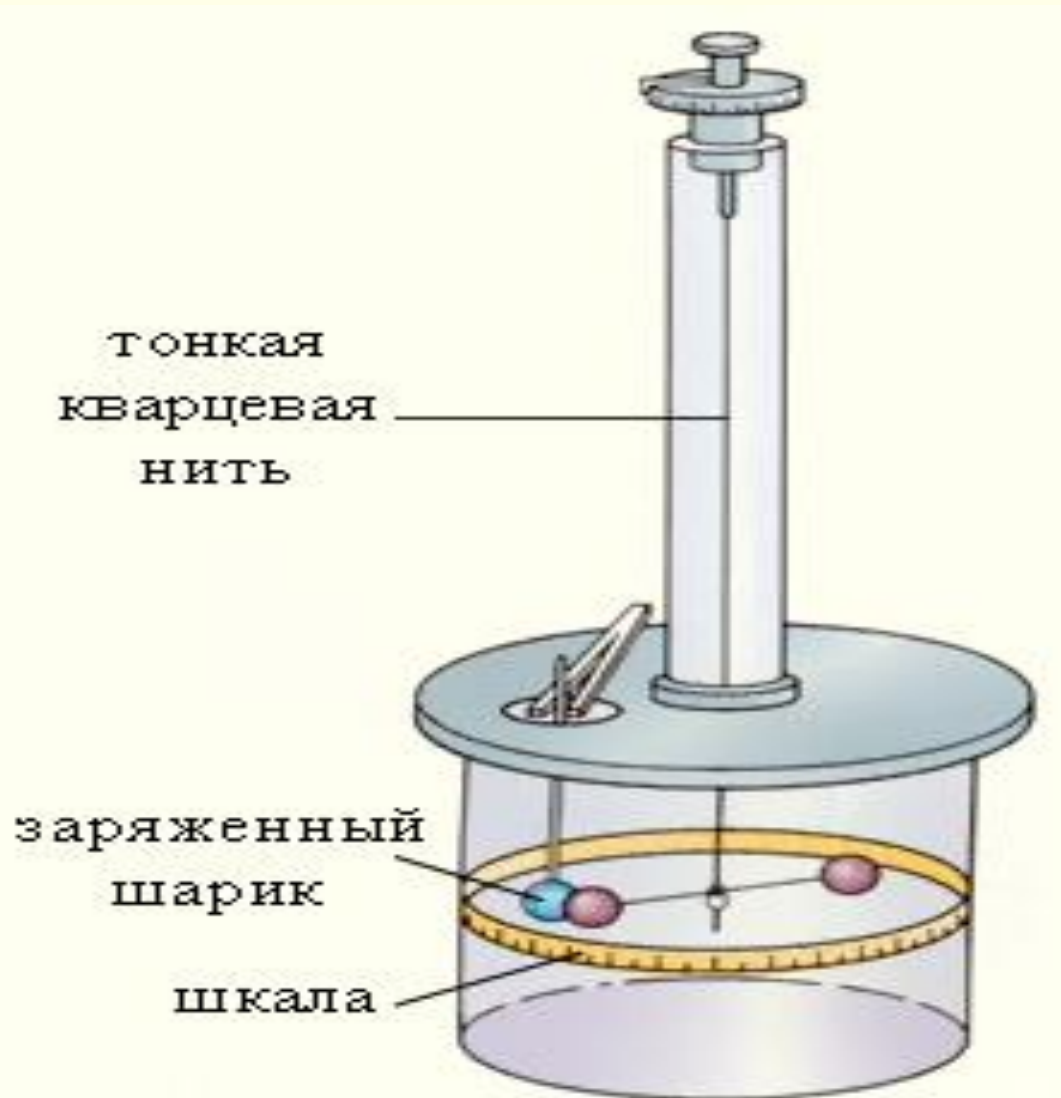
$$e = 1,602177 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$



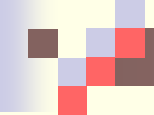
► Закон сохранения заряда: алгебраическая сумма электрических зарядов тел или частиц, образующих электрически изолированную систему, не изменяется при любых процессах, происходящих в этой системе.

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = \textit{const}$$

Закон Кулона



Крутильные весы с чрезвычайно высокой чувствительностью (например, коромысло весов поворачивалось на 1° под действием силы порядка 10^{-9} Н).



Сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, пропорциональна их величинам q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними r_{12} :

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$


$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{— численный коэффициент, значение которого определяется системой единиц}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2 \text{ (Ф/м)} \quad \text{— электрическая постоянная}$$



Точечный заряд (q) —

наэлектризованное тело, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других тел, с которыми оно взаимодействует.



Если заряды находятся в непроводящей среде, то сила взаимодействия между ними по сравнению с вакуумом уменьшается в ε раз.

ε - диэлектрическая проницаемость среды, показывает во сколько раз сила взаимодействия зарядов в вакууме превышает силу взаимодействия их в среде, т.е.

$$\varepsilon = \frac{F_0}{F}$$

F_0 – сила взаимодействия в вакууме,
 F – в среде

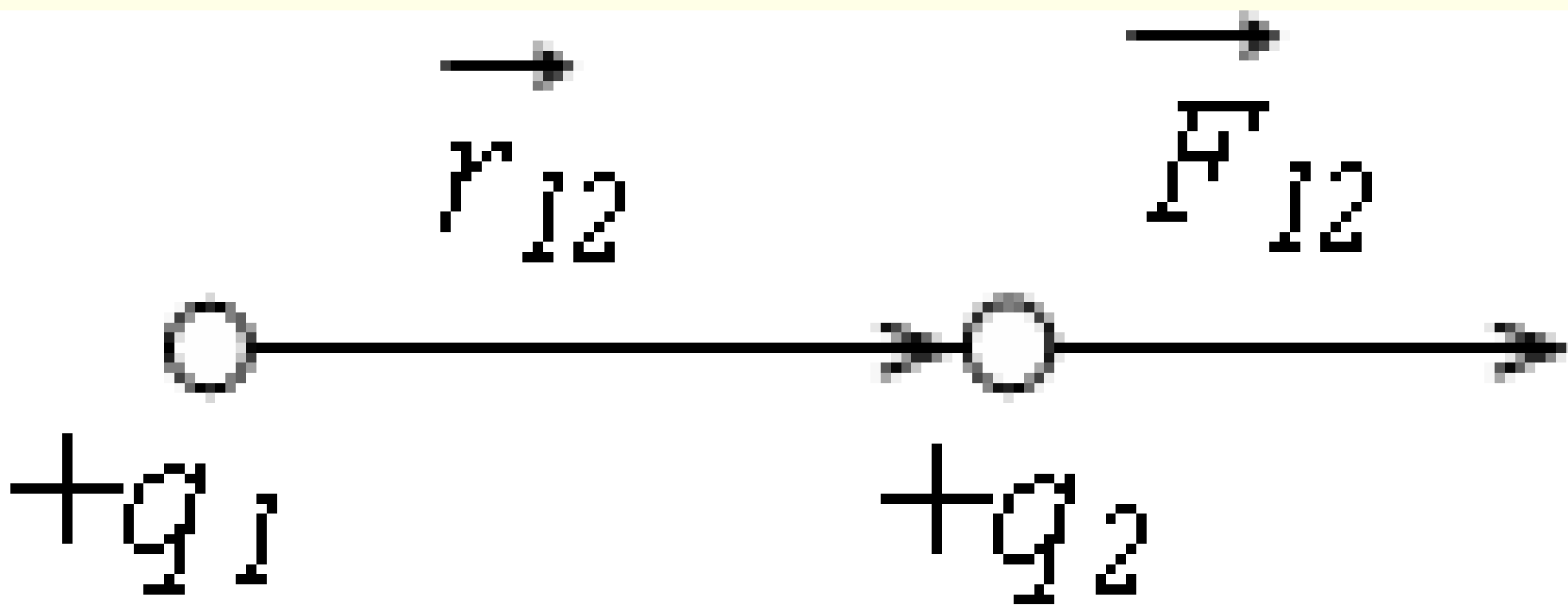
Тогда

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2}.$$

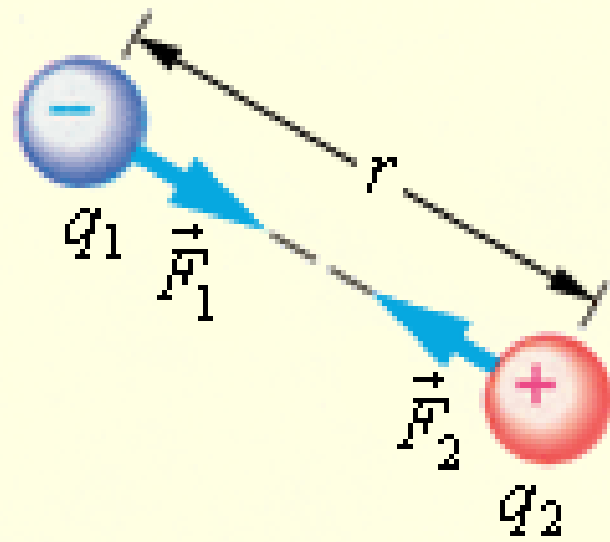
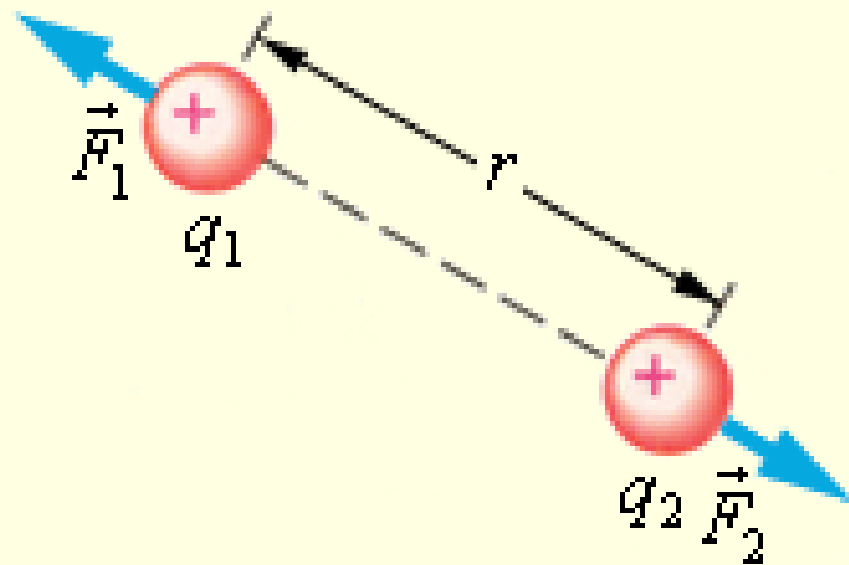
В векторном виде:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^3} \cdot \vec{r}_{12},$$

$\vec{r}_{12}$ – радиус-вектор, проведенный от заряда q_1 к q_2 .



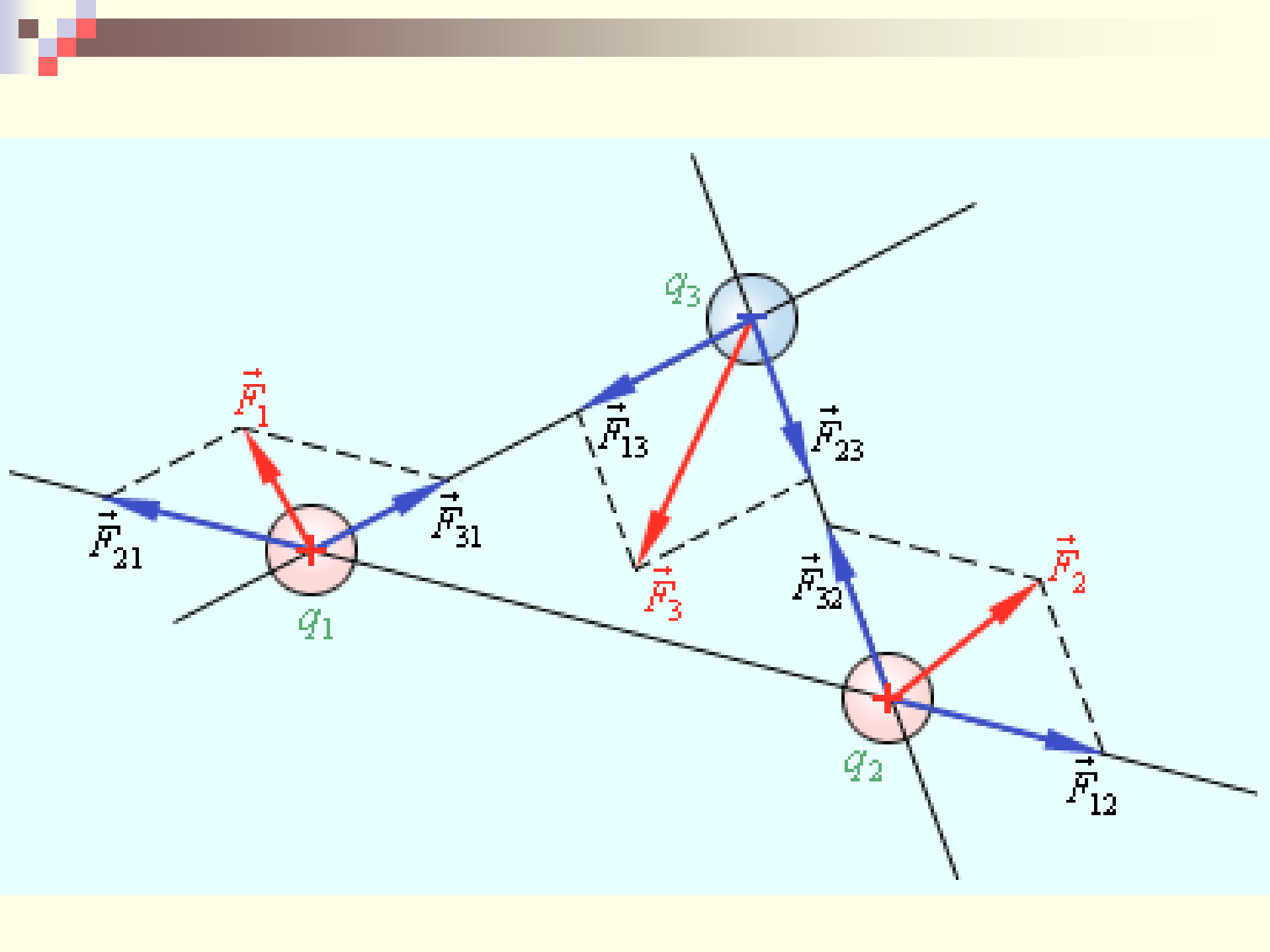
$\vec{F}_{12}$ - сила, действующая на заряд q_2
со стороны заряда q_1 .

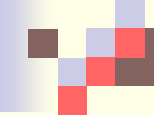




Принцип суперпозиции

Если заряженное тело взаимодействует одновременно с несколькими заряженными телами, то результирующая сила, действующая на данное тело, равна векторной сумме сил, действующих на это тело со стороны всех других заряженных тел.





Электрическое поле

Электрическое поле — материальный носитель взаимодействия между зарядами.

Поле заполняет все пространство и проявляется, в частности, в виде силы, с которым оно воздействует на помещаемый в различные точки поля пробный заряд q_0 .

Силовой характеристикой электрического поля является *напряженность* $\vec{E}$.

Напряженность электрического поля

Напряженностью электрического поля называют физическую величину, равную отношению силы, с которой поле действует на положительный пробный заряд, помещенный в данную точку пространства, к величине этого заряда:

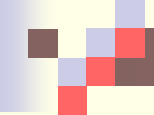
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$


$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^3} \cdot \vec{r}_{12} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^3} \vec{r}_{12} \cdot q_2$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{12}}{q_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

Напряженность поля точечного заряда

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$$



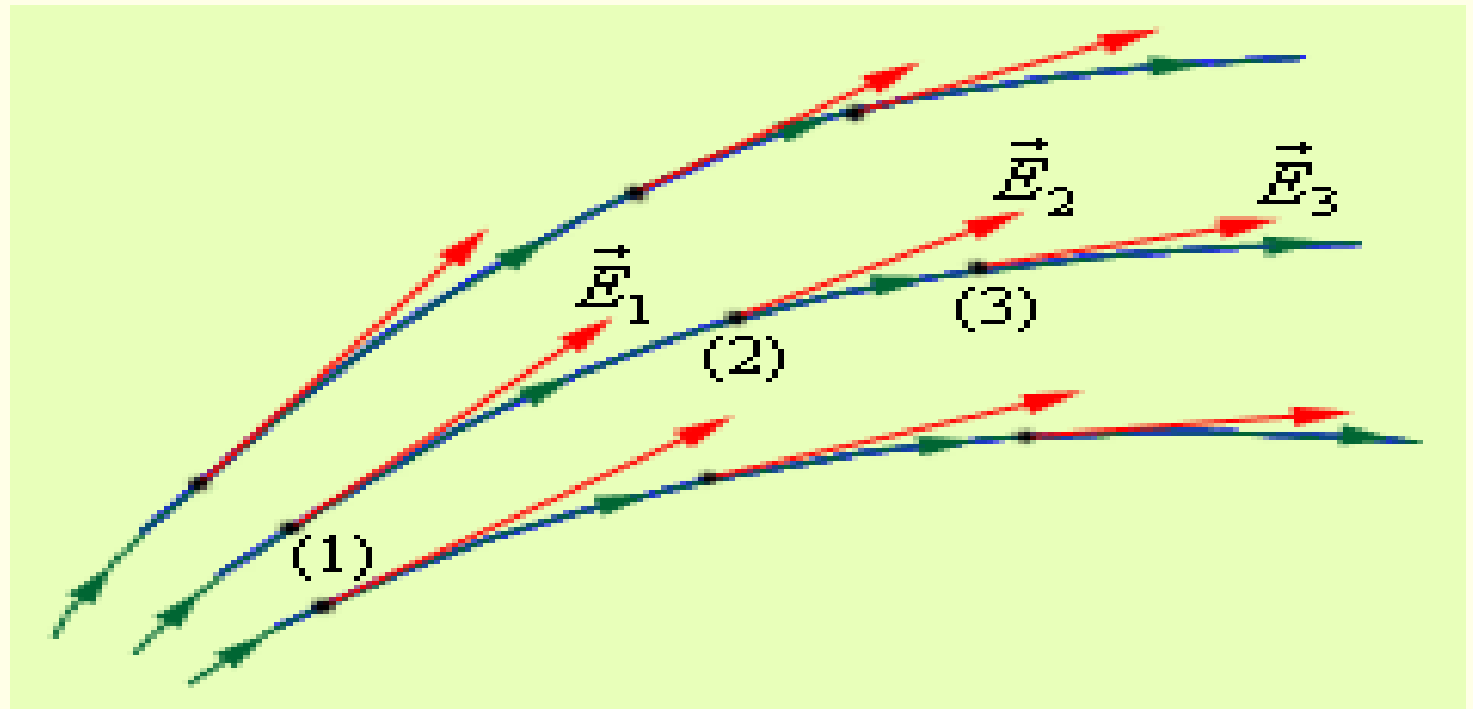
Принцип суперпозиции

Вектор напряженности электрического поля системы зарядов равен геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

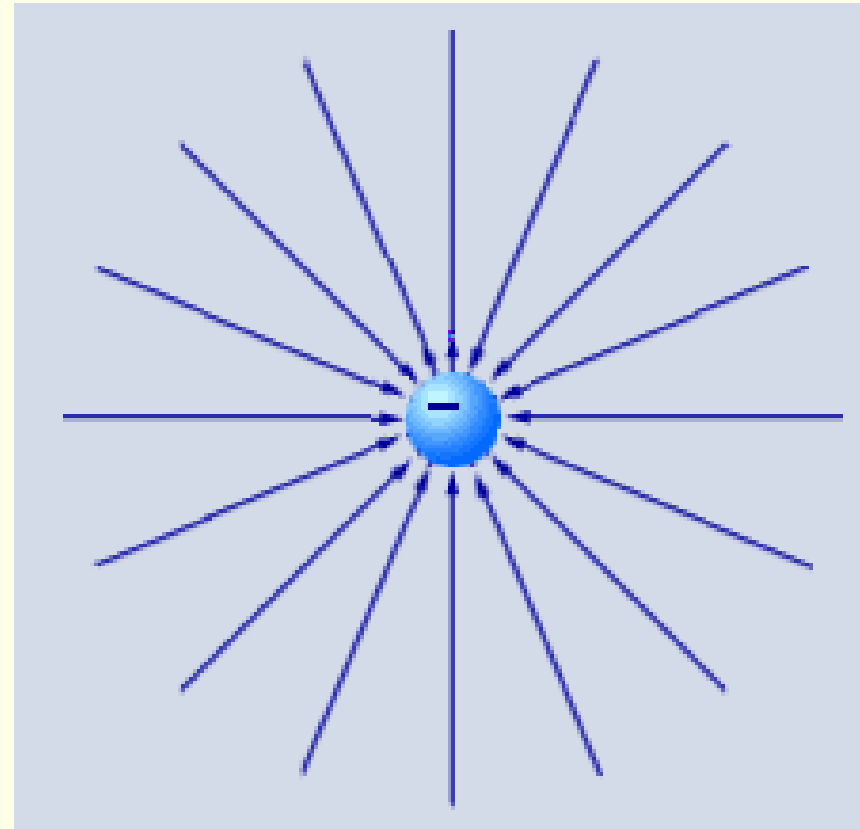
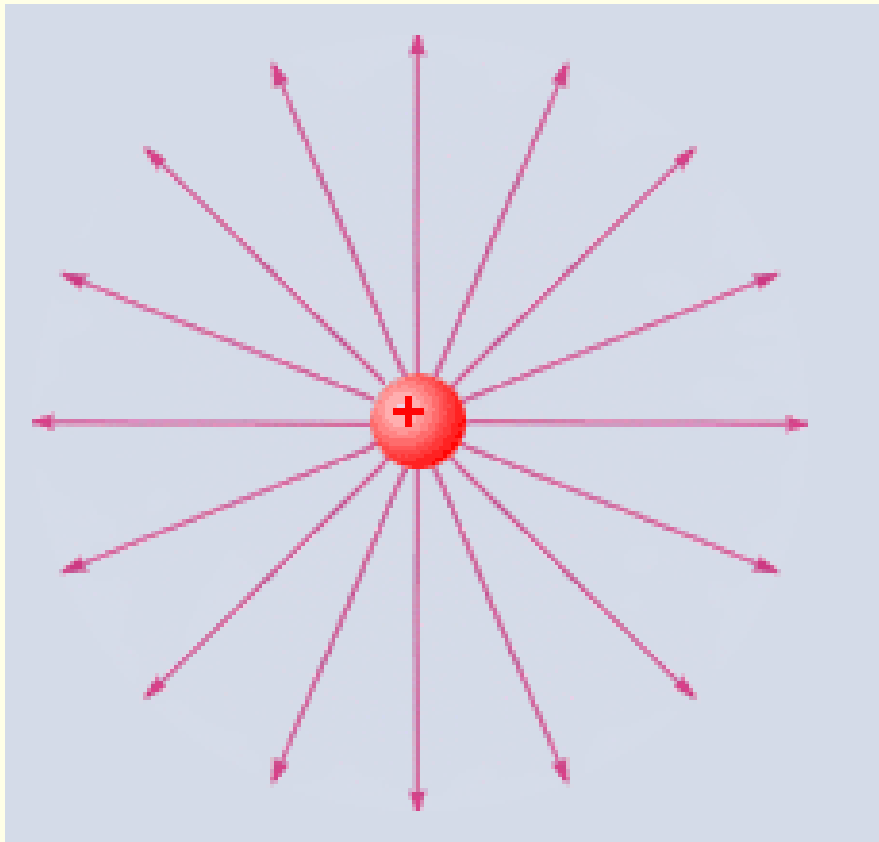
Силовые линии

Силовая линия — это математическая линия, направление касательной к которой в каждой точке, через которую она проходит, совпадает с направлением вектора напряженности поля в той же точке.

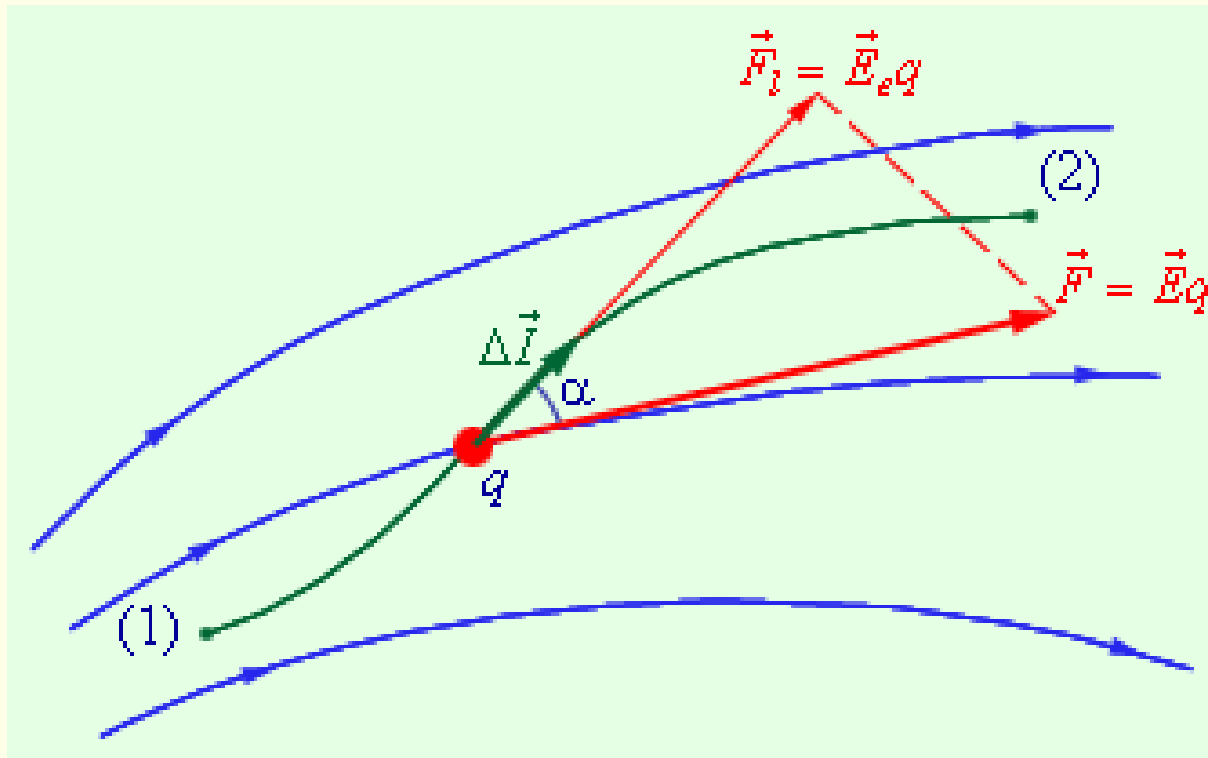


За положительное направление силовой линии принято считать направление самого вектора напряженности.

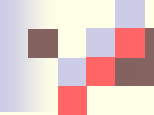
По густоте силовых линий можно судить о величине напряженности электрического поля.



Работа сил электростатического поля



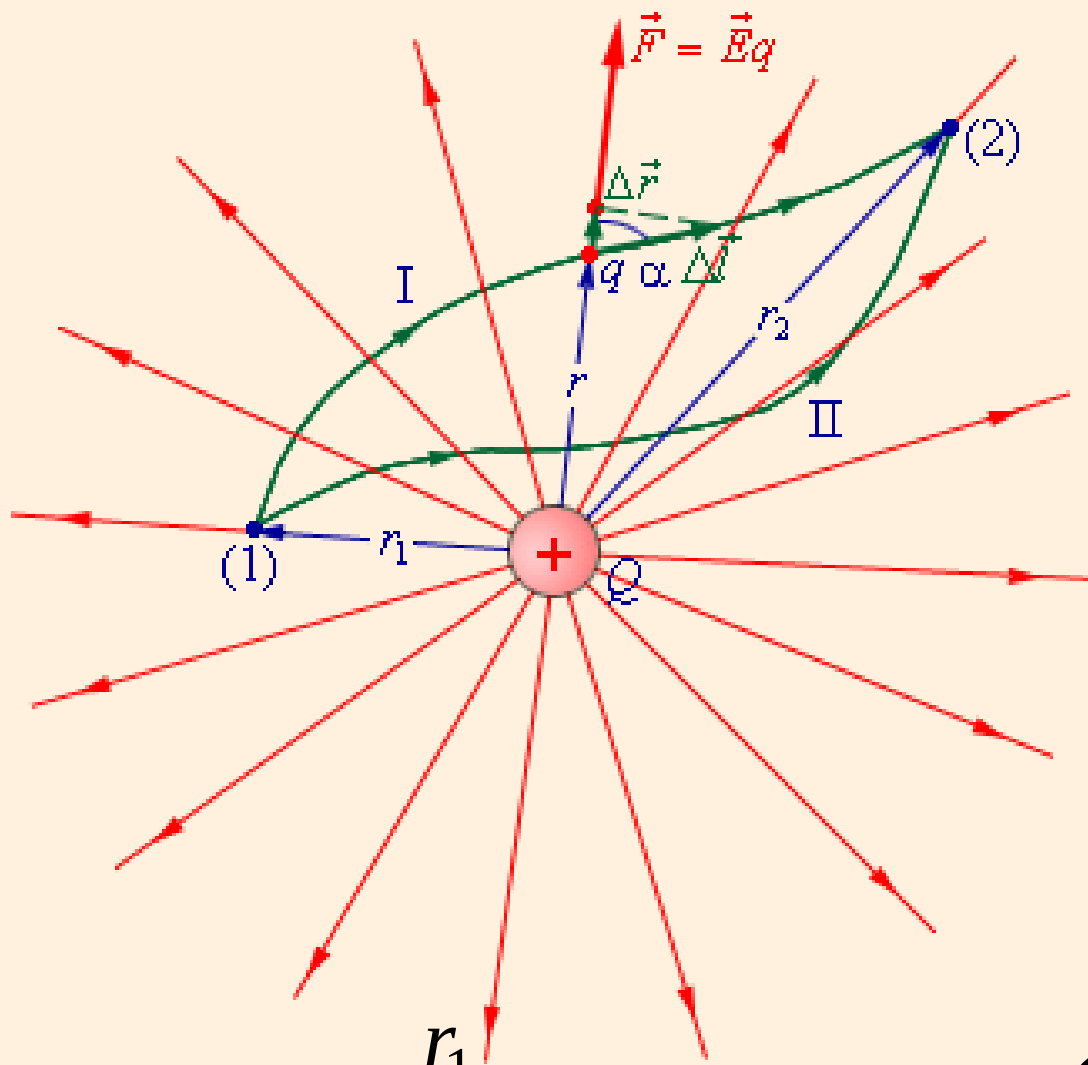
$$\Delta A = F \cdot \Delta l \cdot \cos \alpha = E \cdot q \Delta l \cdot \cos \alpha = E_l \cdot q \Delta l$$



Работа сил электростатического поля при перемещении заряда из одной точки поля в другую не зависит от формы траектории, а определяется только положением начальной и конечной точек и величиной заряда.

Работа сил электростатического поля при перемещении заряда по любой замкнутой траектории равна нулю.

Силовые поля, обладающие этим свойством, называют потенциальными или консервативными.



$$\Delta A = F \cdot \Delta l \cdot \cos \alpha =$$

$$= Eq \Delta r =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \Delta r$$

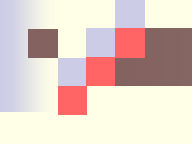
$$A = \int_{r_2}^{r_1} Eq dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Очевидно, что в случае замкнутой траектории

$$\oint_L dA = \int_{r_2}^{r_1} Eq dr = 0$$

$$\oint_L (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \oint_L E_l dl = 0$$

Данный интеграл называется *циркуляцией вектора напряженности*.



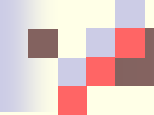
Потенциальная энергия заряда в электростатическом поле

Свойство потенциальности электростатического поля позволяет ввести понятие потенциальной энергии заряда в электрическом поле. Для этого в пространстве выбирается некоторая точка (0), и потенциальная энергия заряда q , помещенного в эту точку, принимается равной нулю.

Потенциальная энергия заряда q , помещенного в любую точку (1) пространства, относительно фиксированной точки (0) равна работе A_{10} , которую совершит электрическое поле при перемещении заряда q из точки (1) в точку (0):

$$W_1 = A_{10}$$

Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении точечного заряда q из точки (1) в точку (2), равна разности значений потенциальной энергии в этих точках и не зависит от пути перемещения заряда и от выбора точки (0).



Потенциальная энергия заряда q , помещенного в электрическое поле, пропорциональна величине этого заряда.

Физическую величину, равную отношению потенциальной энергии электрического заряда в электростатическом поле к величине этого заряда, называют потенциалом φ электрического поля:

$$\varphi = \frac{W}{q}$$

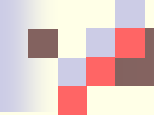
$$[\varphi] = \text{Вольт}$$

Потенциал поля в данной точке пространства равен работе, которую совершают электрические силы при удалении единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность:

$$\varphi_1 = \frac{A_{1\infty}}{q}$$

Потенциал φ поля точечного заряда Q на расстоянии r от него относительно бесконечно удаленной точки вычисляется следующим образом:

$$\varphi = \frac{1}{q} \int_r^{\infty} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$



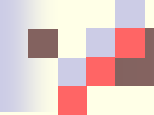
Работа A_{12} по перемещению электрического заряда q из начальной точки (1) в конечную точку (2) равна произведению величины заряда на *разность потенциалов* ($\varphi_1 - \varphi_2$) начальной и конечной точек:

$$\begin{aligned} A_{12} &= W_1 - W_2 = \\ &= q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$



Разность потенциалов между двумя точками представляет собой работу, которую необходимо затратить для перемещения единичного положительного заряда из одной точки в другую.

Величину разности потенциалов принято также называть электрическим напряжением или просто напряжением.

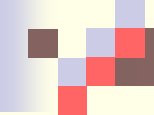


Связь между потенциалом и напряженностью

Потенциал равен отношению потенциальной энергии взаимодействия заряда с полем к величине этого заряда.

В то же время силовое действие поля на заряд определяется напряженностью электростатического поля E .

Зная распределение потенциала в пространстве, легко найти напряженность электрического поля.



Пусть точка ***a*** имеет координаты (x, y, z) , точка ***b*** $(x + \Delta x, y, z)$. Работа по перемещению единичного заряда из точки ***a*** в точку ***b*** по прямой x равна разности потенциалов в двух точках:

$$\Delta W = \varphi(x, y, z) - \varphi(x + \Delta x, y, z) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x$$

По определению, работа по перемещению единичного положительного заряда вдоль оси x равна

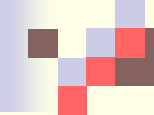
$$\Delta W = \int (\mathbf{E}, d\mathbf{r}) = E_x \Delta x$$


$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Аналогичным образом получаем

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Видно, что напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля направлена в сторону уменьшения потенциала.



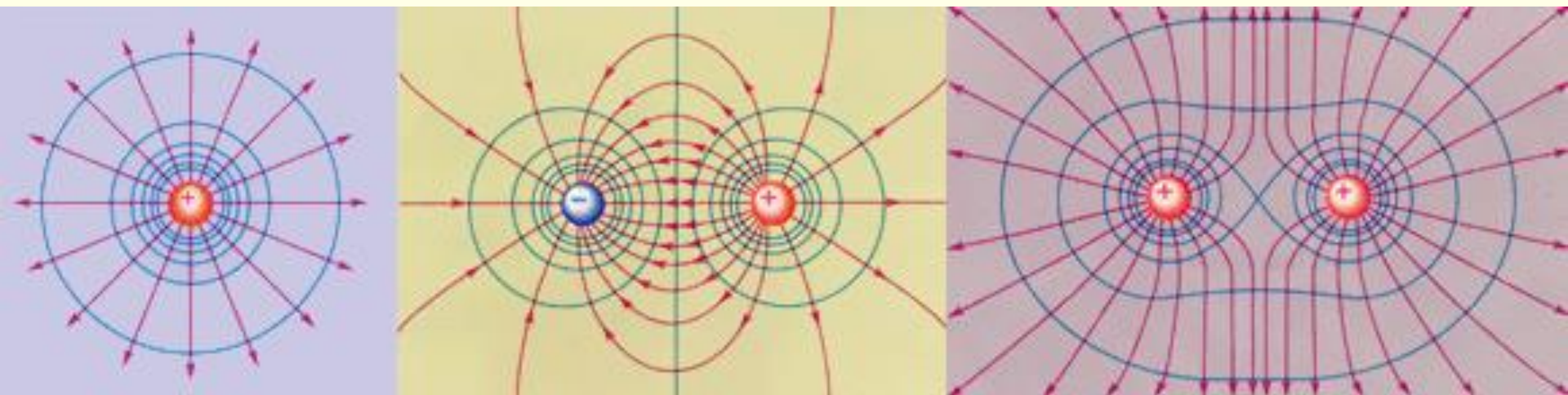
В векторной форме записи имеем

$$\mathbf{E} = - \left(\mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

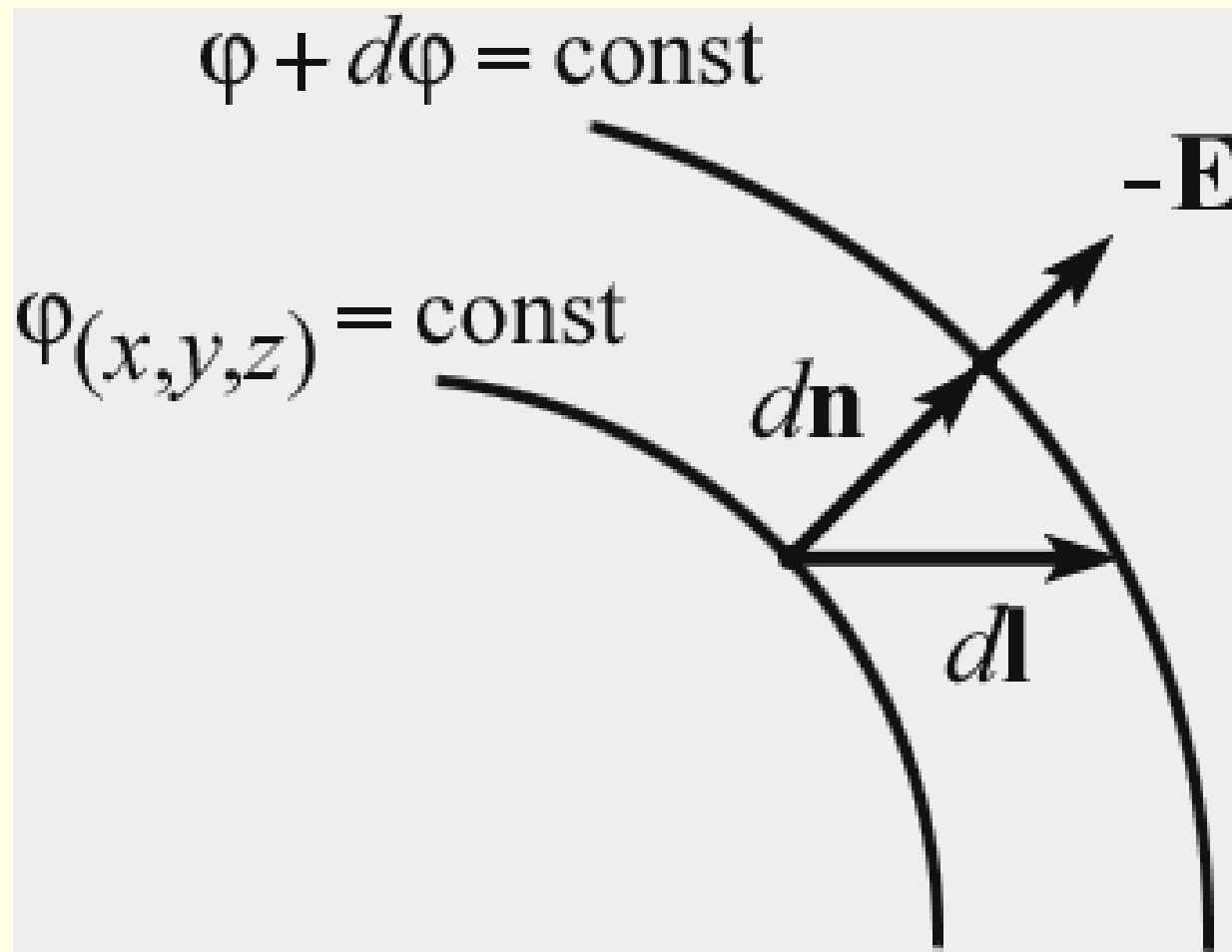
Выражение в скобках называется **градиентом** потенциала φ и обозначается как $\text{grad } \varphi$ или $\nabla \varphi$:

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi = -\nabla \varphi$$

Вдоль электрических силовых линий потенциал изменяется максимально быстро и, следовательно, вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен поверхностям равного потенциала $\varphi(x,y,z) = \text{const}$ — эквипотенциальным поверхностям.



Вектор напряженности электрического поля **E** направлен против направления наискорейшего изменения потенциала



Принцип суперпозиции

Из принципа суперпозиции напряженностей полей, создаваемых электрическими зарядами, следует принцип суперпозиции для потенциалов:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots$$

Распределенный заряд и его характеристики

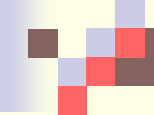
Заряд, сообщенный телу, может распределяться по его поверхности (металл) или по объему (диэлектрик).

Характеристиками распределенного заряда служат:

- *Линейная плотность заряда (τ).*

- *Поверхностная плотность заряда (σ).*

- *Объемная плотность заряда (ρ).*


$$\tau = \frac{\Delta Q}{\Delta l}, \quad \sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S}, \quad \rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}.$$

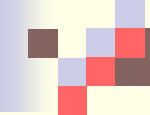
Здесь ΔQ – заряд малого участка соответственно:

- заряженной линии длиной Δl ,
- заряженной поверхности площадью ΔS ,
- заряженного тела объемом ΔV .

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля

Работа сил электростатического поля, созданного зарядом q , при перемещении точечного заряда q_0 из точки 1 в точку 2 равна:

$$A_{1-2} = \int_1^2 dA = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qq_0}{r_1} - \frac{qq_0}{r_2} \right)$$



Работа не зависит от траектории, а определяется только положениями начальной 1 и конечной 2 точек.

Следовательно, электростатическое поле точечного заряда — потенциально, а электростатические силы — консервативны.

Из формулы

$$A_{1-2} = \int_1^2 dA = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qq_0}{r_1} - \frac{qq_0}{r_2} \right)$$

следует, что работа, совершаемая при перемещении электрического заряда во внешнем электростатическом поле по любому замкнутому пути, равна нулю.



То есть

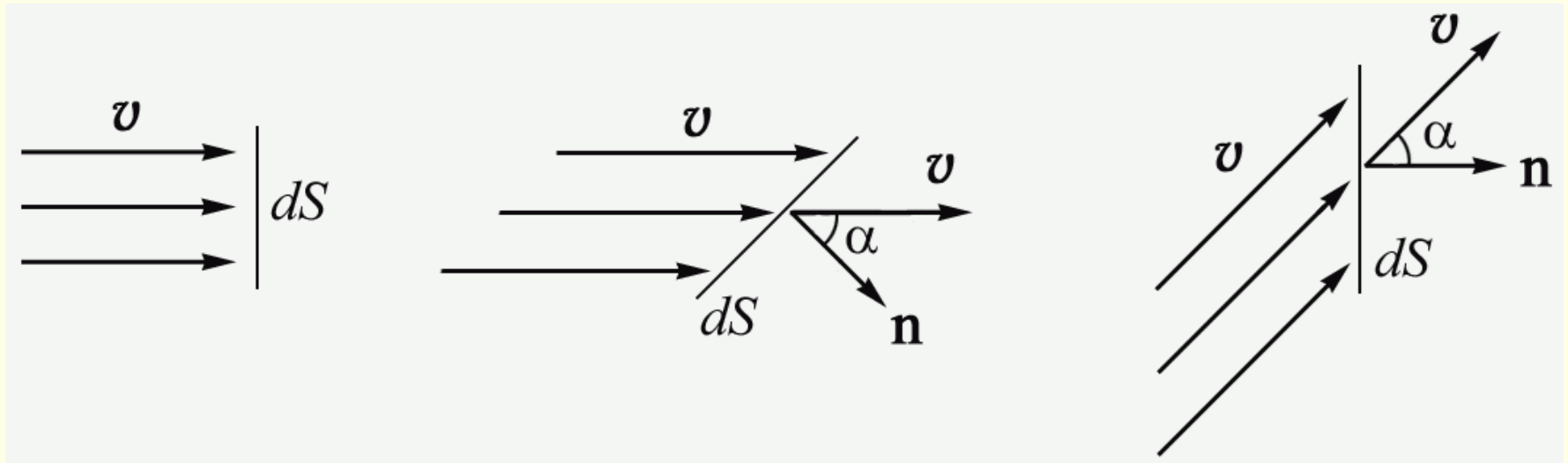
$$\oint_L dA = 0$$

Если в качестве переносимого взять единичный положительный заряд, то для элементарной работы сил поля на пути $d\mathbf{l}$ можно записать:

$$\oint_L (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \oint_L E_l dl = 0$$

Данный интеграл ($\oint_L (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \oint_L E_l dl$) называется
циркуляцией вектора напряженности.

Поток электростатического поля



$$d\Phi = v dS dt$$

$$\begin{aligned} d\Phi &= v dS_{\perp} dt = v_{\perp} dS dt = v dS \cos(\mathbf{v}, \mathbf{n}) dt = \\ &= (\mathbf{v}, \mathbf{n} dS) dt = (\mathbf{v}, d\mathbf{S}) dt \end{aligned}$$

Количество жидкости, вытекающей в
единицу времени через dS :

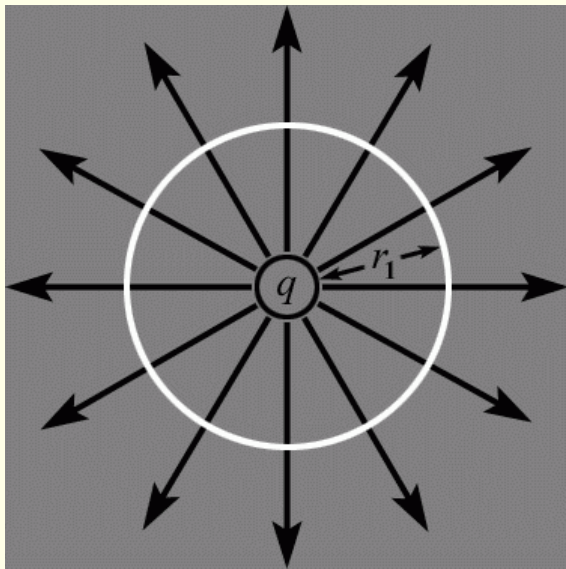
$$\frac{d\Phi}{dt} = (\boldsymbol{v}, d\mathbf{S}) \Rightarrow \Phi = \int_{(S)} (\boldsymbol{v}, d\mathbf{S})$$

$\int_{(S)} (\boldsymbol{v}, d\mathbf{S})$ - поток вектора $\boldsymbol{v}$ через поверхность S .

$\int_{(S)} (\mathbf{E}, d\mathbf{S})$ - поток вектора $\mathbf{E}$ через поверхность S .

Слово «поток» имеет смысл поверхностного интеграла от нормальной составляющей вектора $\mathbf{E}$.

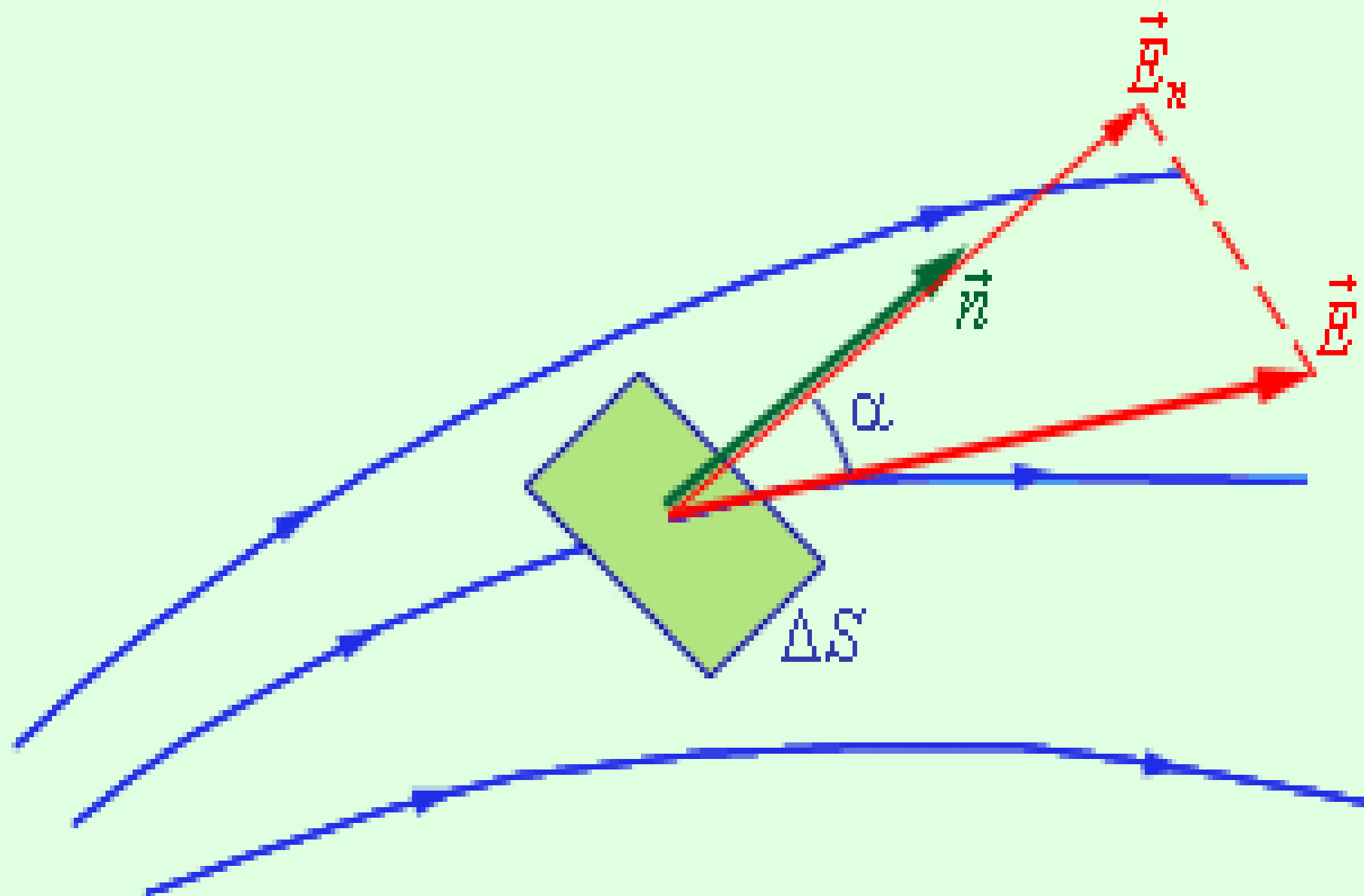
Величина Φ равна числу силовых линий, пересекающих поверхность S .



$$\Phi = E(4\pi r_1^2) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1^2} \right) (4\pi r_1^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = \int_{\text{По сфере}} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \int_{S'} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}')$$

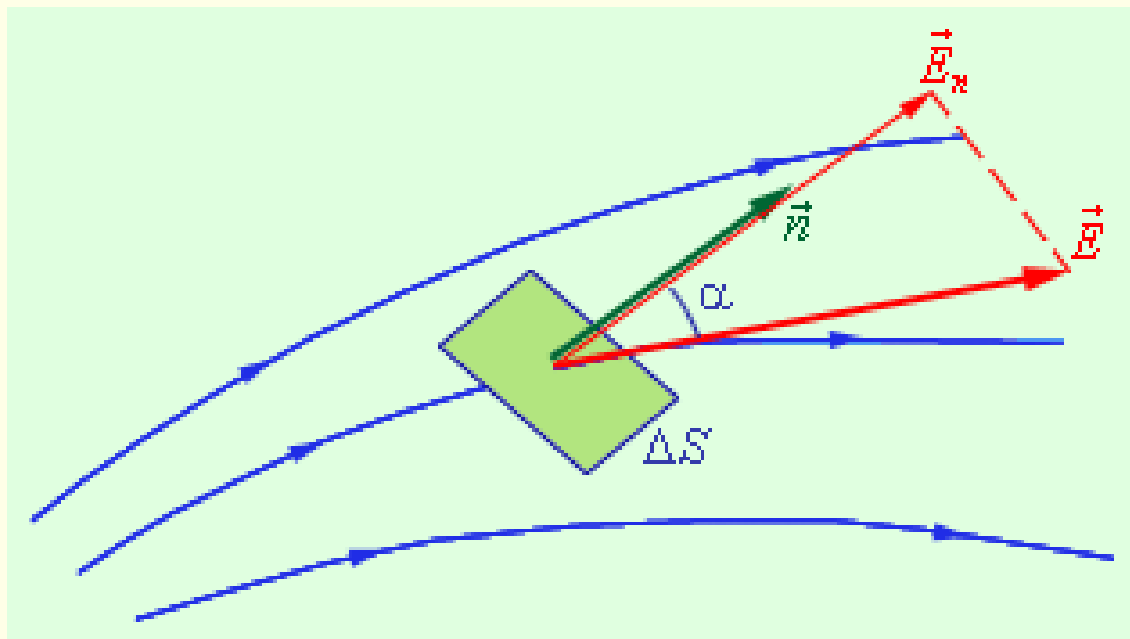
S' – замкнутая поверхность любой формы, охватывающая заряд q .

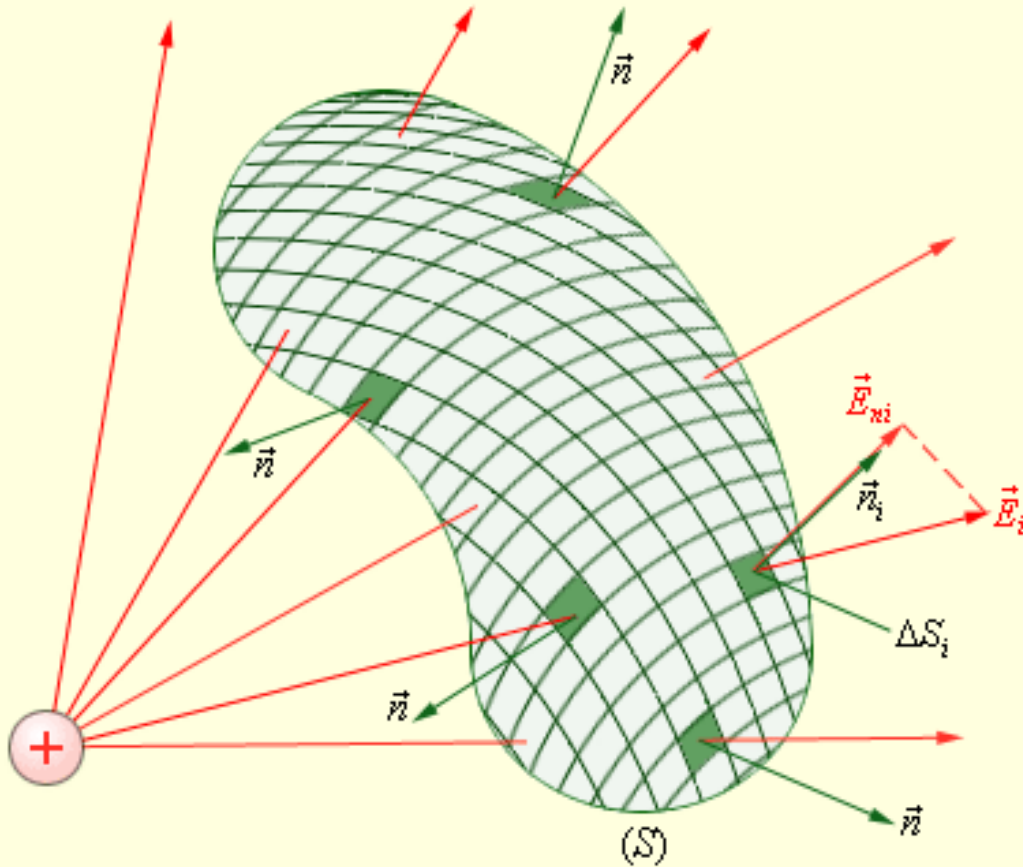


Элементарный поток вектора напряженности
через площадку ΔS :

$$\Delta\Phi = E\Delta S \cdot \cos \alpha = E_n \Delta S,$$

E_n — модуль нормальной составляющей поля $\vec{E}$.





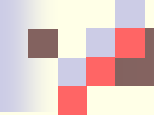
$$\Phi = \sum \Delta\Phi_i = \sum E_{ni} \Delta S_i$$

$$\Phi = \oint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \oint E_n dS$$

Теорема Гаусса

Поток вектора напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, расположенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную ε_0 :

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{\text{внутр}}$$



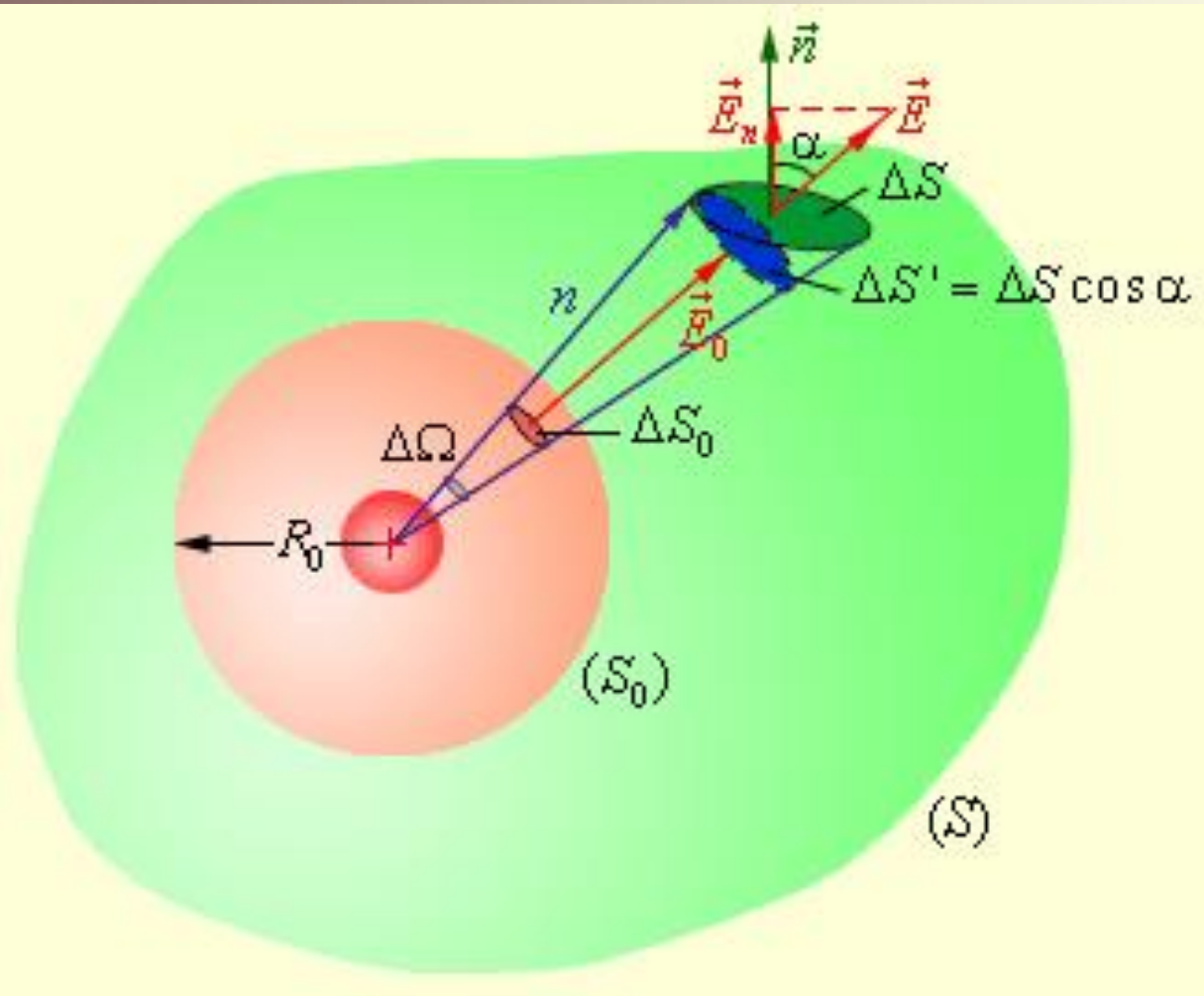
Рассмотрим сферическую поверхность S , в центре которой находится точечный заряд q .

$$E = E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}, \quad R - \text{радиус сферы.}$$

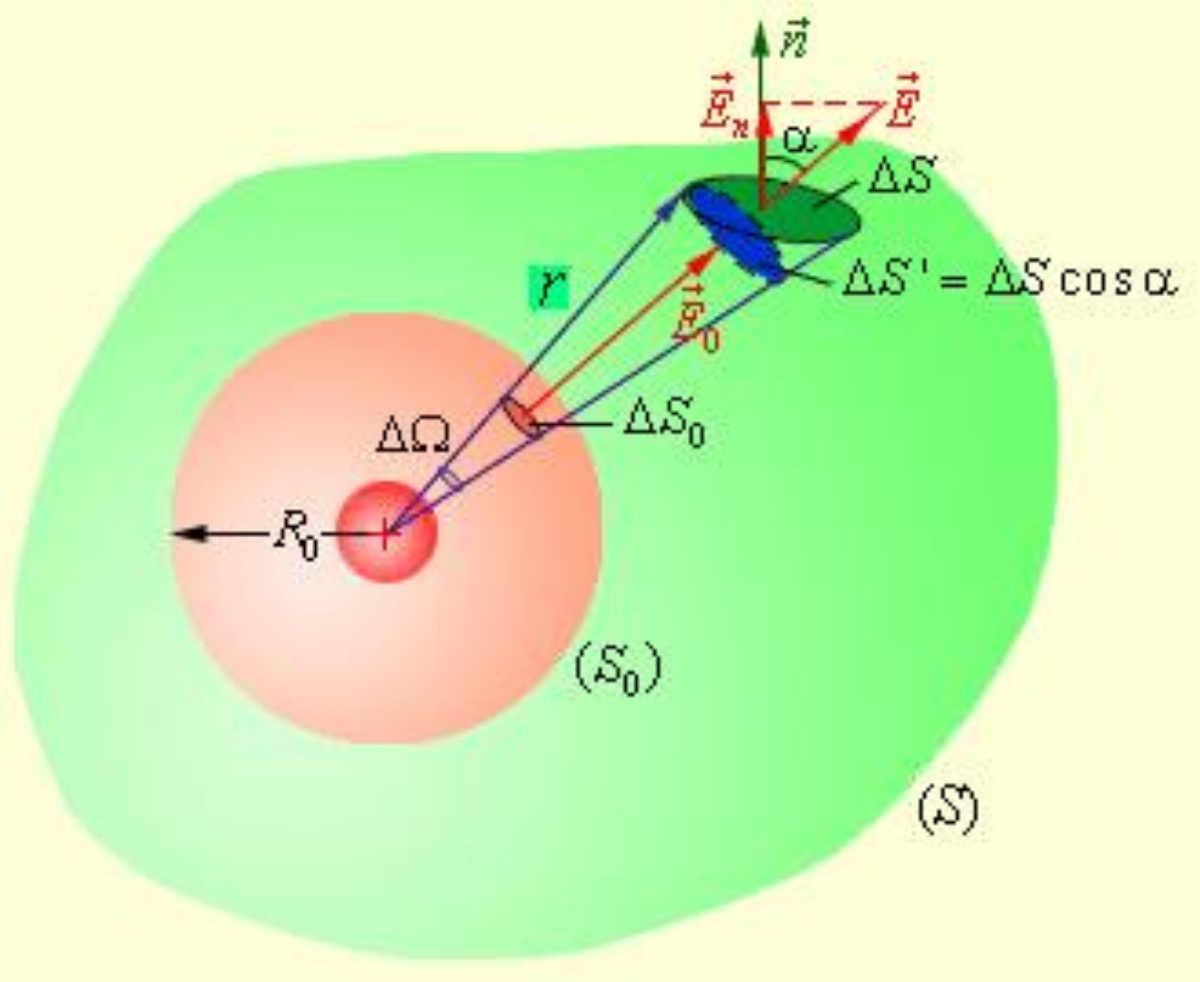
$$\Phi = E \cdot S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$


$$\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Итак, *поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен полному электрическому заряду, заключенному под данной поверхностью, деленному на ε_0 – теорема Гаусса в интегральной форме.*



Поток электрического поля точечного заряда
через произвольную поверхность S ,
окружающую заряд



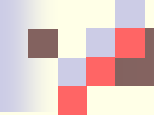
$$\Delta\Phi_0 = E_0\Delta S_0$$

$$\Delta\Phi = E\Delta S \cos \alpha = E\Delta S'$$

$$\frac{E_0}{E} = \frac{R_0^2}{r^2},$$

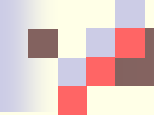
$$\frac{\Delta S_0}{\Delta S'} = \frac{R_0^2}{r^2}$$

Следовательно, $\Delta\Phi_0 = \Delta\Phi.$


$$\Phi = \Phi_0 = \frac{q}{\varepsilon_0} -$$

полный поток электрического поля точечного заряда через произвольную поверхность, охватывающую заряд, равен потоку Φ_0 через поверхность вспомогательной сферы.

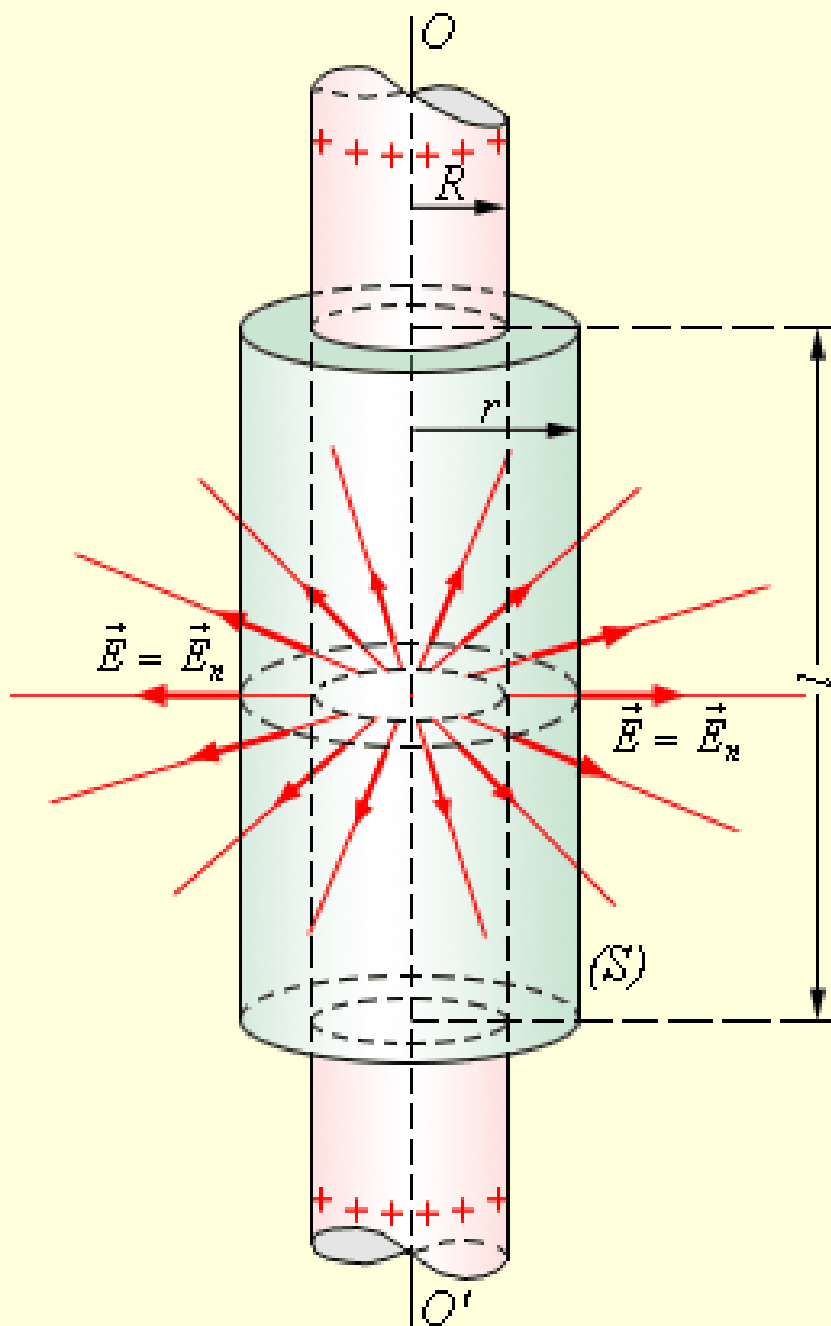
Если замкнутая поверхность не охватывает заряд, то $\Phi=0$ — доказать самостоятельно.



Расчет поля тонкостенного полого однородно заряженного тонкостенного цилиндра радиуса R

Задача имеет осевую симметрию.

Для применения теоремы Гаусса замкнутую поверхность удобно выбрать в виде соосного цилиндра некоторого радиуса r и длины l , закрытого с обоих торцов.



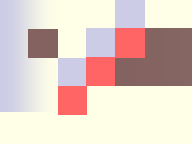
OO' – ось симметрии

Для $r \geq R$:

$$\Phi = E \cdot 2\pi r l = \frac{\tau l}{\epsilon_0}$$

$\Rightarrow$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$$



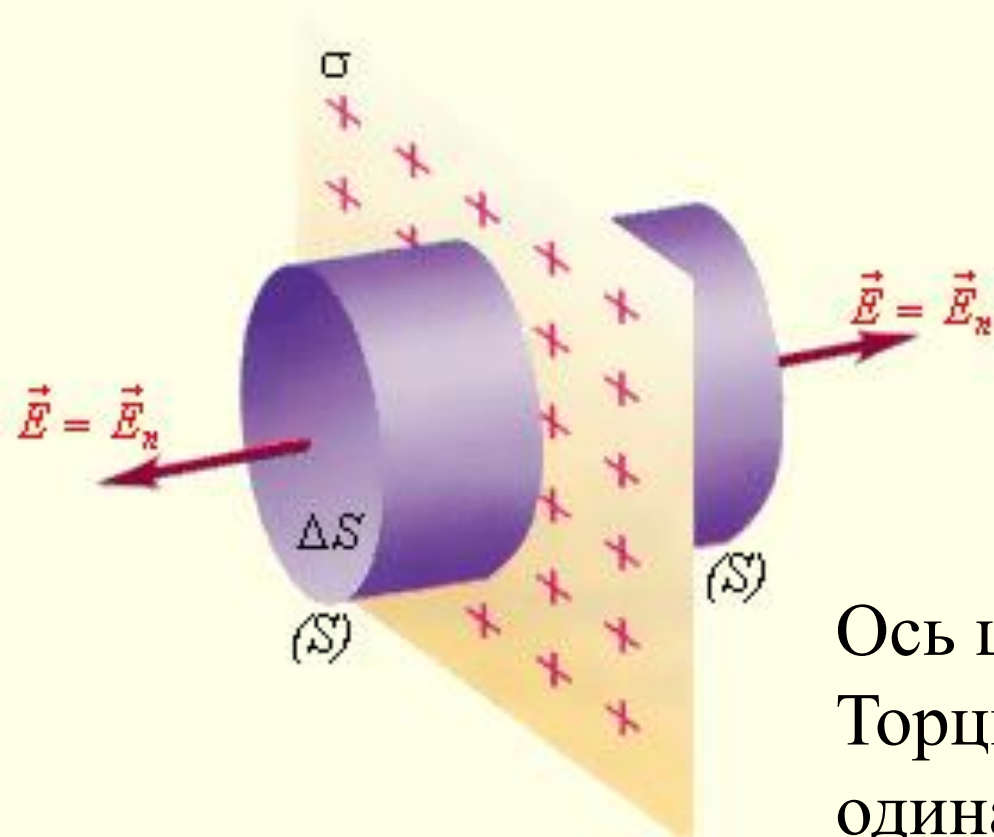
Вспомогательная замкнутая поверхность – Гауссова – выбирается целесообразной формы (исходя из вида симметрии системы зарядов).

В случае центральной симметрии – сфера с центром в точке симметрии.

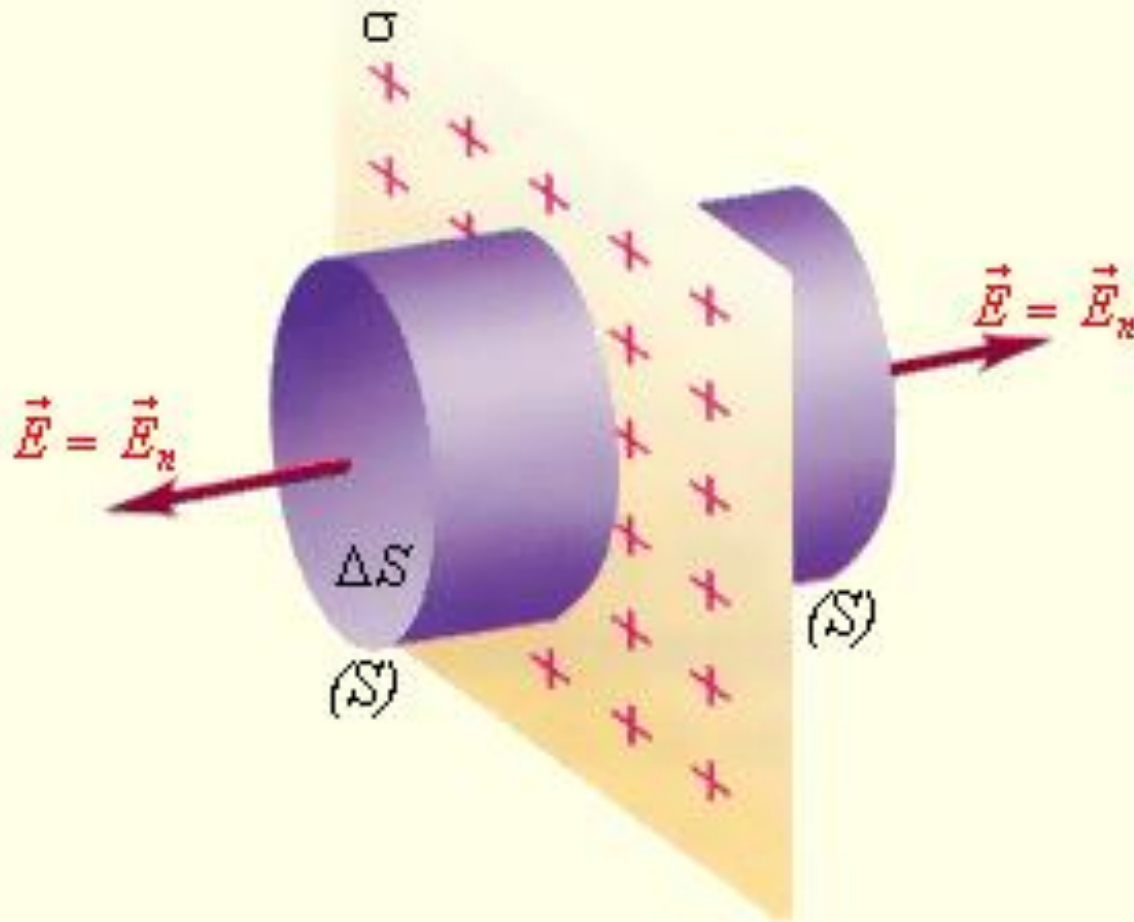
В случае осевой симметрии – соосный цилиндр, замкнутый с обоих торцов.

Расчет поля равномерно заряженной плоскости

В этом случае Гауссову поверхность удобно выбрать в виде цилиндра некоторой длины, закрытого с обоих торцов.



Ось цилиндра $\perp$ плоскости.
Торцы расположены на одинаковом расстоянии от нее.



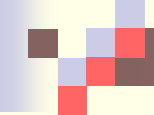
S — замкнутая Гауссова поверхность,
 σ — поверхностная плотность заряда плоскости.


$$2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

- напряженность поля равномерно заряженной плоскости.

Полученное выражение применимо и для плоских заряженных площадок конечных размеров (в случае, когда расстояние до точки, в которой определяется поле, значительно меньше размеров площадки).

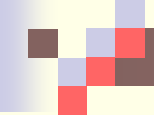


Закон Гаусса в дифференциальной форме.

Пусть $\rho(\mathbf{r})$ — непрерывная плотность распределения заряда в пространстве;

Δr — достаточно малый радиус сферы, выделенной в этом пространстве;

ΔV — объем этой сферы.


$$(\mathbf{E}, d\mathbf{S}) \approx \operatorname{div} \mathbf{E} \cdot \Delta V$$

Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ от непрерывно распределенного заряда с плотностью $\rho(\mathbf{r})$ в объеме ΔV равна:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Delta V} \frac{\rho(\mathbf{r})}{r^2} \mathbf{n} dV \cong \\ &\cong \frac{\rho(r)}{4\pi\epsilon_0 \Delta r^2} \mathbf{n} \Delta V\end{aligned}$$

С учетом $\Delta S = n 4\pi \Delta r^2$ получим:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \cdot \Delta V = \frac{\rho(r)}{4\pi\epsilon_0 \Delta r^2} \Delta V (n, n 4\pi \Delta r^2)$$

откуда следует:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

дифференциальная форма теоремы Гаусса.