

# ***ЭЛЕКТРОДИНАМИКА***

# ***Тема: ЭЛЕКТРОДИНАМИКА***

- 1. Явление электромагнитной индукции**
- 2. Правило Ленца**
- 3. Вихревое электрическое поле**
- 4. Самоиндукция**
- 5. Токи при замыкании и размыкании цепи**
- 6. Взаимная индукция. Трансформатор**
- 7. Индукционный ускоритель электронов – бетатрон**

# 1. Явление электромагнитной индукции

После открытия в 1820 г. Эрстедом магнитного действия тока и доказательства, что вокруг проводника с током порождается магнитное поле и на проводник с током действует магнитная сила, многие выдающиеся ученые того времени попытались достичь обратного – превратить магнетизм в электричество.

Такую задачу сформулировал для себя в декабре 1821 г. выдающийся английский ученый Фарадей.

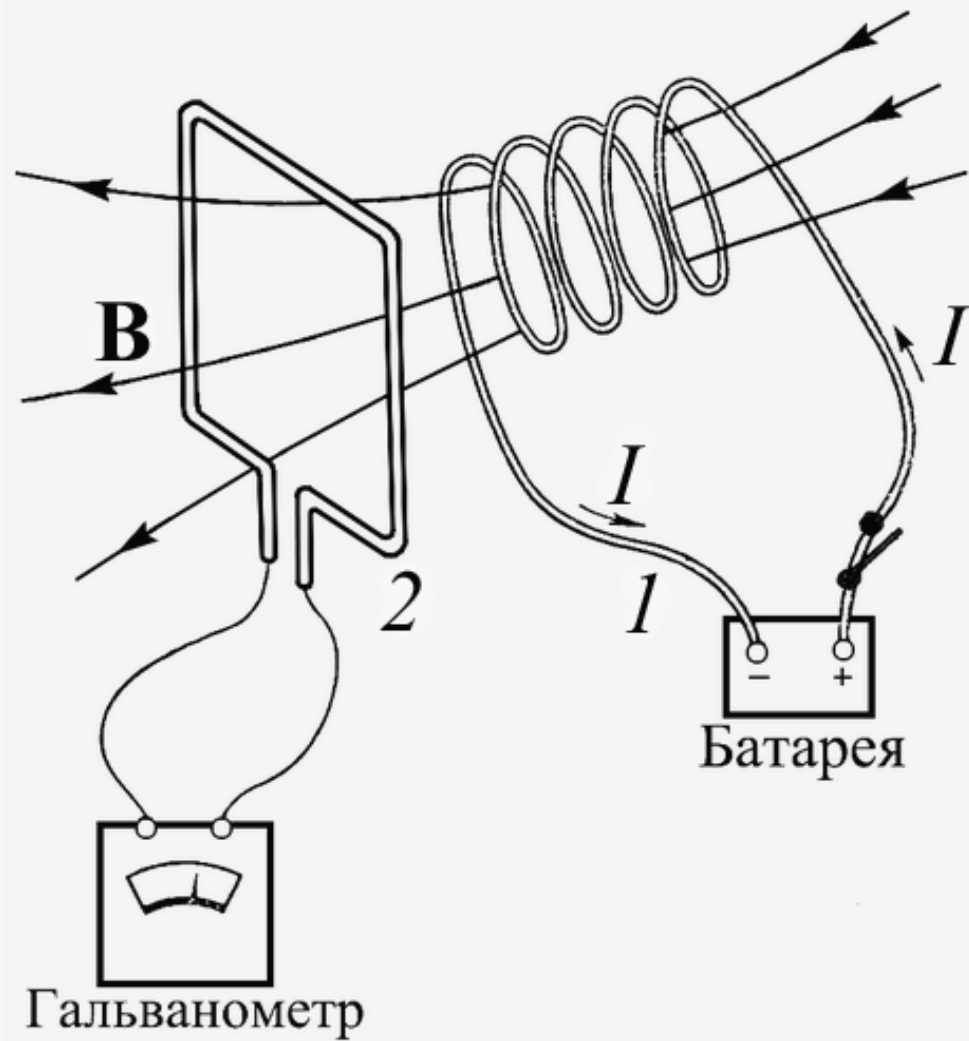


Рис. 1. Первый опыт Фарадея, 1831 г. Катушка с током 1 возбуждает ток в другой катушке 2 при замыкании и размыкании цепи.

Поставленную задачу Фарадей смог успешно решить только через 10 лет напряженных исследований.

В первом сообщении 24 ноября 1831 г. в разделе об индукции электрических токов им описан опыт по электромагнитной индукции.

В этом опыте вблизи располагались две изолированные друг от друга обмотки. Одна из них соединялась с гальваническим элементом, другая с гальванометром. При замыкании и размыкании тока в первой обмотке стрелка гальванометра отклонялась: при замыкании цепи в одну сторону, при размыкании – в противоположную.

Это явление Фарадей назвал вольта-электрической индукцией.

Индукция усиливалась, если внутри обмоток помещалось железо. Это устройство из двух катушек с металлическим сердечником явилось первым прообразом трансформатора (рис. 1).

Причем ток во второй катушке появляется при любом изменении тока в первой катушке.

Затем Фарадей получил индукционные действия с помощью обыкновенных постоянных магнитов.

При внесении или удалении постоянного магнита из катушки включенный в цепь гальванометр показывал прохождение электрического тока (рис. 2). Направления тока при внесении и удалении магнита были различны. Это явление Фарадей назвал магнитоэлектрической индукцией.

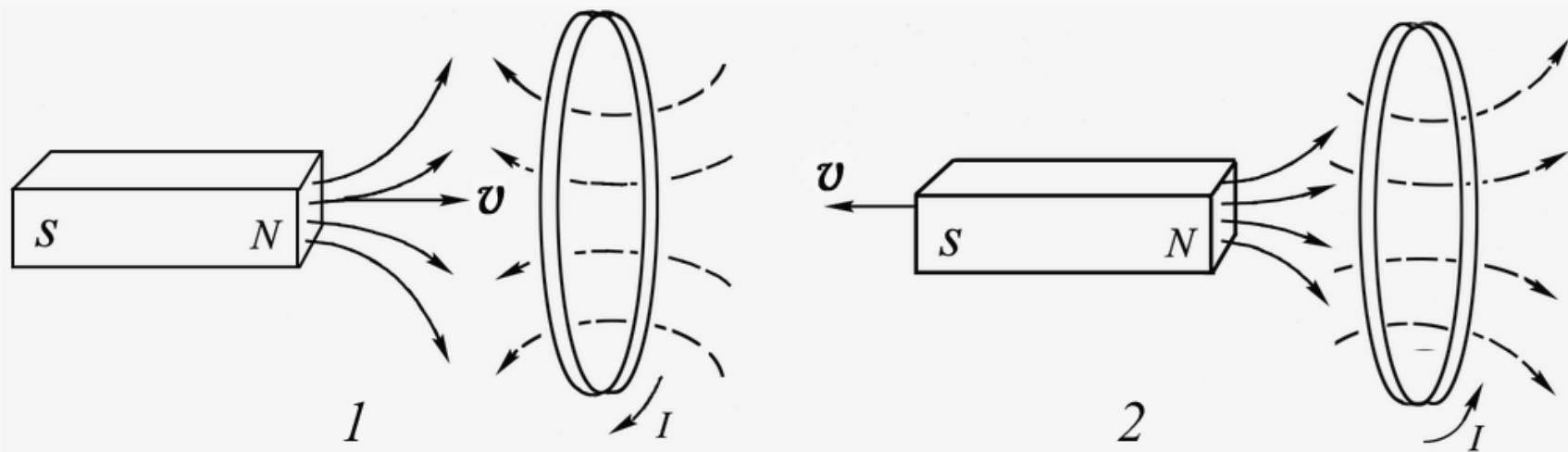


Рис. 2. Явление магнитоэлектрической индукции – возбуждение электрического тока в катушке при внесении и удалении из нее постоянного магнита

Дальнейшие исследования показали, что в замкнутом контуре при любом изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур, возбуждается электрический ток – ток индукции, или индукционный ток. Величина этого тока тем больше, чем выше скорость изменения магнитного потока в замкнутом контуре(рис. 3).

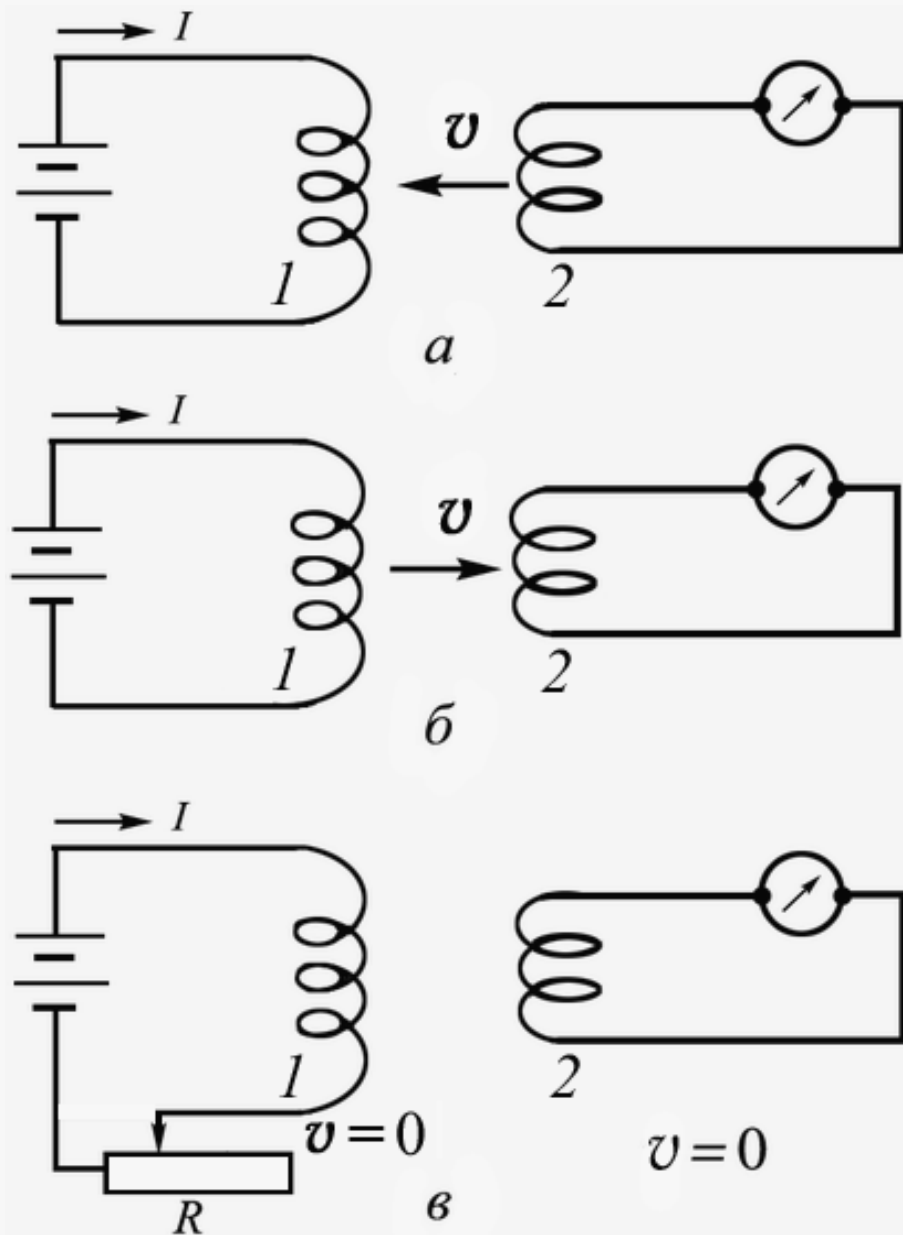


**Рис. 3.** Возникновение ЭДС индукции:

*а* – при движении зарядов контура 2 в магнитном поле контура 1;

*б* – при изменении потока вектора магнитной индукции в контуре 2 при движении к нему контура 1. ЭДС индукции не отличается от случая (*а*);

*в* – ток в контуре 1 нарастает таким образом, чтобы изменение магнитного потока в контуре 2 совпадало со случаем (*а*) и (*б*)



Но если магнитный поток, пронизывающий замкнутый проводящий контур, остается постоянным, то никакого электрического тока не наблюдается.

Отсутствие тока в проводниках, размещенных в статическом магнитном поле, не позволяло долгое время обнаружить возможность получения с помощью магнитных полей электрического тока.

Если мы начнем вращать рамку с проводом в постоянном магнитном поле и будем при помощи скользящих контактов замыкать цепь, то обнаружим, что во внешней цепи и по рамке течет ток, т.е. в цепи поддерживается электродвижущая сила. Таким образом, мы получили генератор переменного электрического тока (рис. 4).

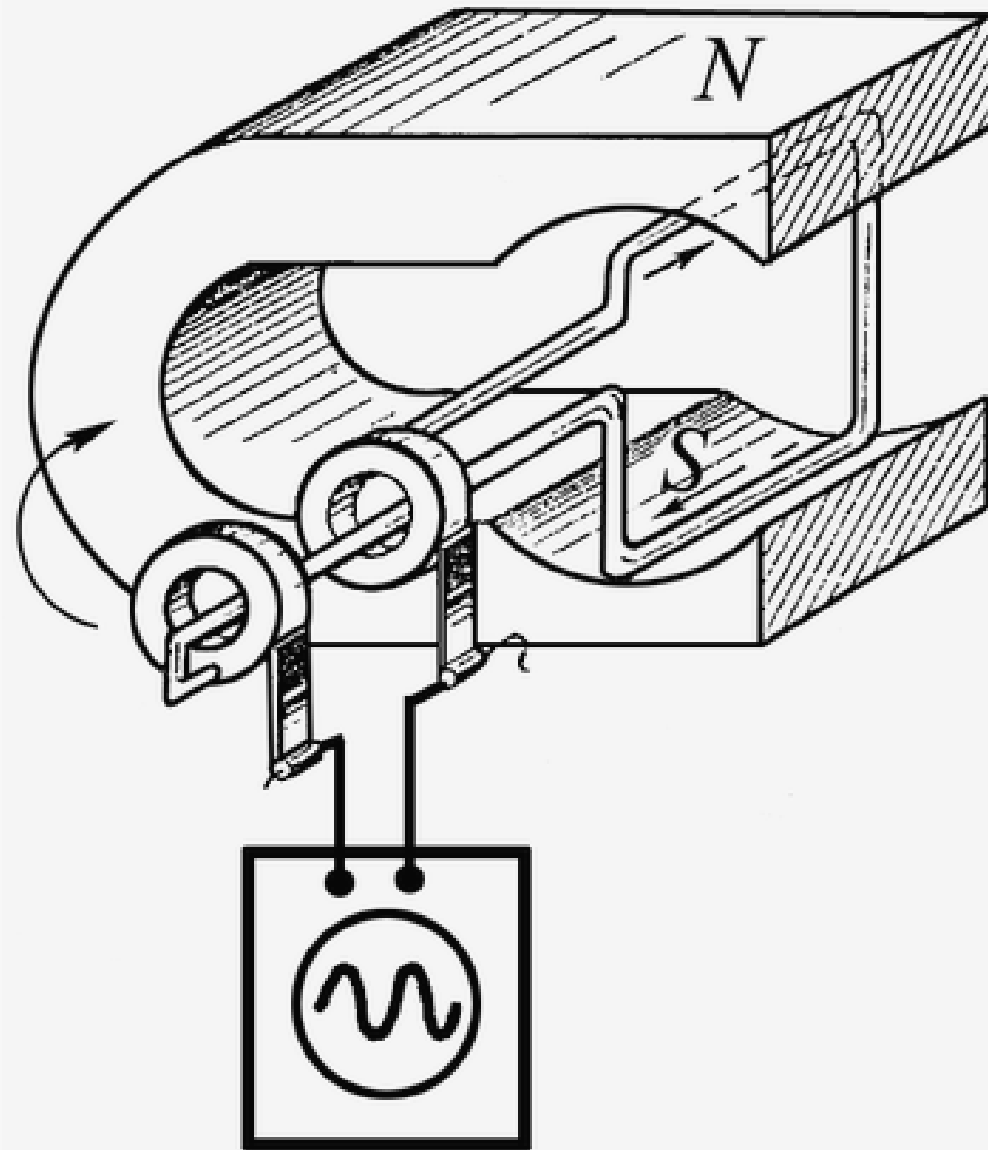


Рис. 4

Фарадей открыл, что величина ЭДС индукции пропорциональна скорости изменения потока вектора магнитной индукции  $\Phi$ , пронизывающего рамку:

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Поток вектора магнитной индукции равен скалярному произведению вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  на площадь рамки  $\mathbf{S}$

$$\Phi = (\mathbf{B}\mathbf{S})$$

Знак «минус» в этой формуле говорит о том, что ЭДС индукции порождает в замкнутой цепи индукционный ток, направленный таким образом, чтобы препятствовать изменению магнитного потока в замкнутом контуре.

Это правило, определяющее знак в формуле для ЭДС индукции и направление индукционного тока, было установлено в 1833 г. петербургским академиком Ленцем и называется правилом Ленца.

Явление электромагнитной индукции лежит и в основе принципа работы телефона – аппарата, передающего речь на расстоянии.

Первоначально телефон состоял из двух одинаковых «слухофонов», соединенных длинными проводами. Принцип устройства состоит в том, что звуковые колебания воздуха передаются металлической мембране, замыкающей полюса магнитов, на которых намотана катушка с проволокой.

Движение мембраны под действием волн изменяет величину магнитного поля в сердечнике. В результате в катушке, намотанной на сердечник, возникает ЭДС.

Если концы катушки присоединить ко второму точно такому же «слухофону», то в нем электрический ток, являющийся электрическим изображением звука первого слухофона, будет изменять силу притяжения мембраны к магниту.

Она начнет совершать колебания и породит звуковые волны, подобные тем, что заставляли колебаться первую мембрану. Так, человеческий голос был впервые передан Беллом по проводам (рис. 5).

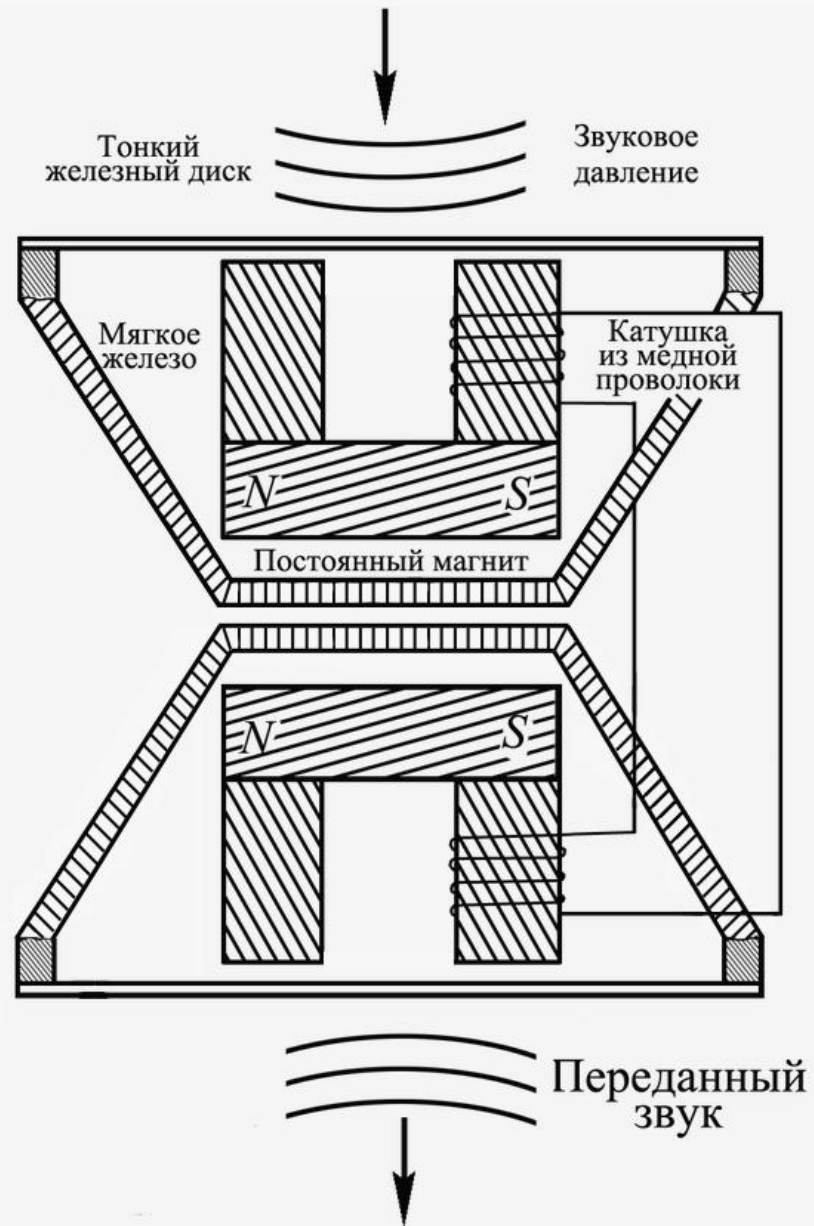


Рис. 5. Устройство телефона Белла



В настоящее время в качестве источника звука в телефонах применяется устройство, подобное описанному.

В качестве приемника звука — микрофона используется угольный микрофон, изменяющий сопротивление угольного порошка в месте контакта с угольной мембраной под действием звукового давления, что приводит к изменению тока в цепи, питаемой от внешних батарей.

Закон Фарадея может быть получен, исходя из закона сохранения энергии.

Работа при перемещении контура с током  $I$  в магнитном поле равна

$$\delta A = -I d\Phi,$$

где  $d\Phi$  – изменение потока магнитной индукции в контуре при его перемещении в магнитном поле.

Затрачиваемая работа идет в нашем случае на перемещение зарядов по замкнутому контуру и определяется законом Джоуля – Ленца

$$\delta A = \varepsilon I dt,$$

где  $\varepsilon$  – ЭДС,  $I$  - ток, возбуждаемые в контуре.

Приравнивая эти два соотношения, получаем для ЭДС электромагнитной индукции закон Фарадея

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$$

– ЭДС индукции со знаком «минус» равна скорости изменения магнитного потока в магнитном контуре.

## 2. Правило Ленца

Индукционный ток в замкнутом контуре всегда имеет такое направление, что он ослабляет действие причины, возбуждающей этот ток. Это правило установлено в 1834 г. Ленцем.

Правило Ленца можно продемонстрировать с помощью соленоида с металлическим сердечником, на который надето алюминиевое кольцо (рис. б).

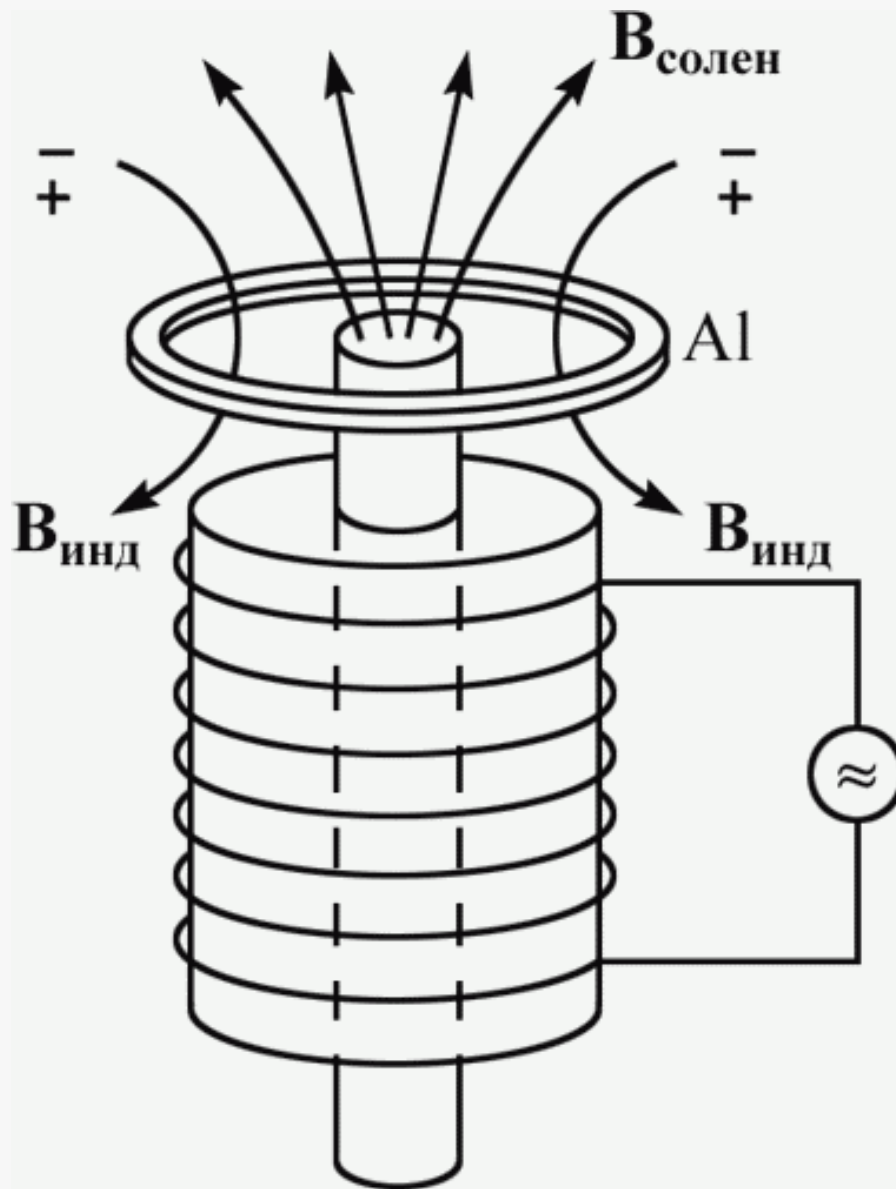


Рис. 6

Если соленоид подключить к источнику переменного тока, то алюминиевое кольцо зависает над сердечником. Необходимую для этого силу порождают индукционные токи, возбуждаемые в кольце.

Тот факт, что кольцо выталкивается с сердечника, говорит о том, что индукционные токи в нем препятствуют изменению магнитного поля, проходящего через кольцо. Кольцо отталкивается от катушки, как отталкиваются одноименные полюса магнитов. Если в кольце сделать разрез по радиусу, то ток в кольце исчезнет и кольцо не будет отталкиваться.

Этот опыт показывает, что сила отталкивания обусловлена индукционными токами в кольце.

Индукционные токи возбуждаются в массивных проводниках, движущихся в магнитных полях. Эти вихревые индукционные токи называются токами Фуко.

Если медную пластину отклонить от положения равновесия и отпустить так, чтобы она вошла со скоростью  $v$  в пространство между полосами магнита, то пластина практически остановится в момент ее вхождения в магнитное поле (Рис. 7).

Замедление движения связано с возбуждением в пластине вихревых токов, препятствующих изменению потока вектора магнитной индукции.

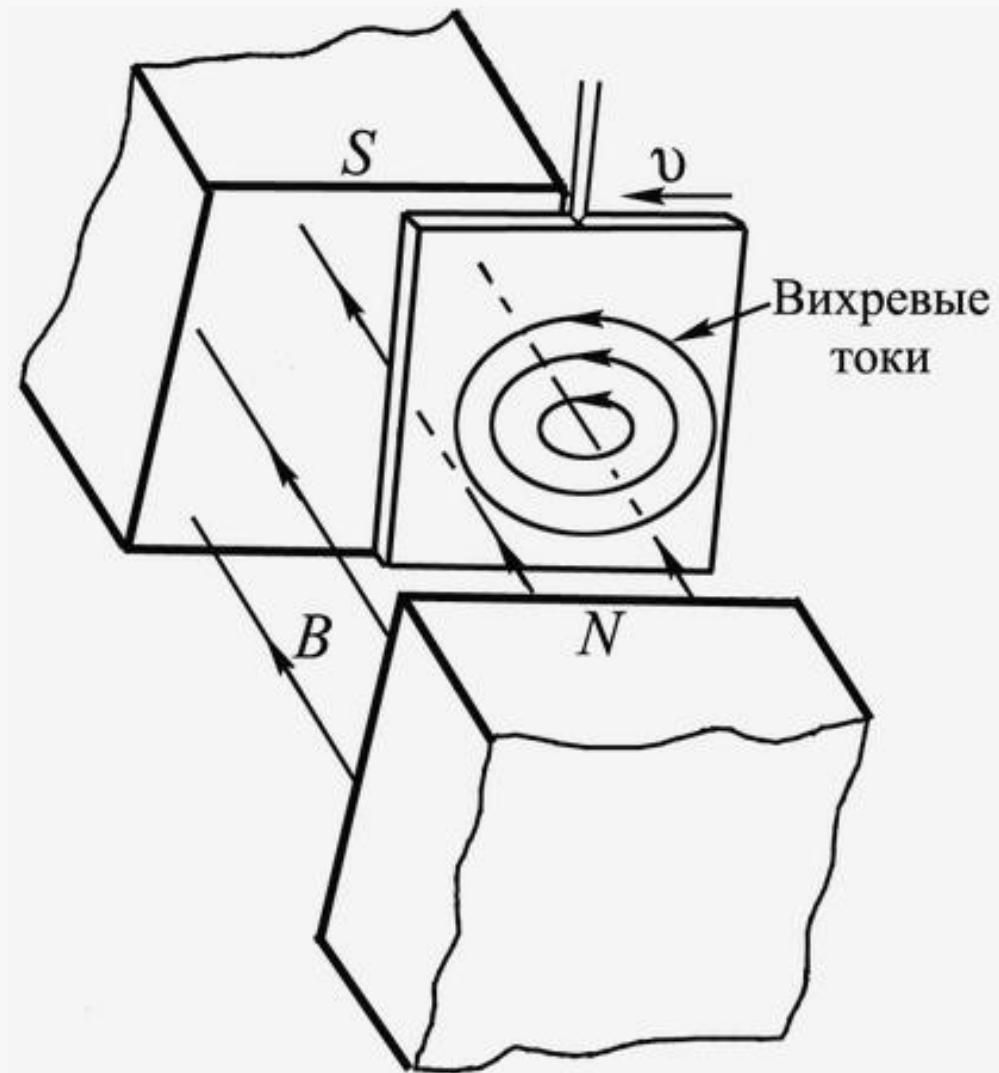


Рис. 7



Тормозящее действие тока Фуко используется для создания магнитных успокоителей — демпферов.

Если под качающейся в горизонтальной плоскости магнитной стрелкой расположить массивную медную пластину, то возбуждаемые в медной пластине токи Фуко будут тормозить колебание стрелки.

Магнитные успокоители такого рода используются в сейсмографах, гальванометрах и других приборах.

Токи Фуко применяются в электрометаллургии для плавки металлов. Металл помещают в переменное магнитное поле, создаваемое током частотой 500÷2000 Гц. В результате индуктивного разогрева металл плавится, например, при подведенной мощности 600 кВт тонна металла плавится за 40–50 минут.

Если быстропеременный высокочастотный ток протекает по проводнику, то индуцируемые в проводнике вихревые токи препятствуют равномерному распределению плотности тока по поперечному сечению проводника. Плотность тока на оси провода оказывается меньше, чем у его поверхности. Ток как бы вытесняется на поверхность провода (рис. 8).

Это явление называется скин-эффектом (от англ. *skin* – кожа, оболочка).

При нарастании тока в проводе ЭДС индукции направлена против тока.

Электрическое поле

самоиндукции максимально

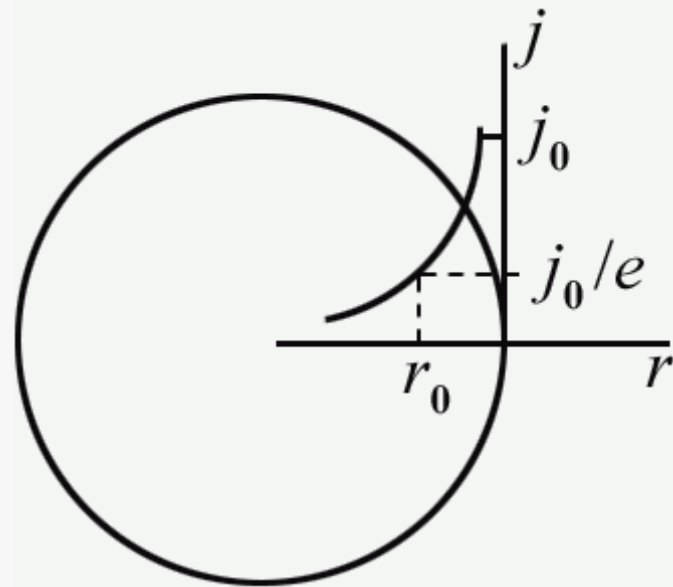
на оси провода, что приводит

к неравномерному распределению плотности тока.

Плотность тока убывает от поверхности к оси провода примерно по экспоненциальному закону

$$j = j_0 \exp(-\alpha r),$$

где  $\alpha$  коэффициент затухания



Например, для меди глубина проникновения тока – расстояние, на котором плотность тока

уменьшается в  $e$  раз, равна  $r_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{66}{\sqrt{\nu}}$  мм, где частота  $\nu$  берется в герцах.

При частоте  $\nu = 50$  Гц  $r_0 = 10$  мм – ток практически равномерно распределен по объему проводов, исключая очень толстые кабели. Но при высокочастотных колебаниях  $\nu \approx 100$  МГц  $= 10^8$  Гц глубина проникновения равна  $r_0 \approx 7 \cdot 10^{-3}$  мм – ток почти целиком течет по поверхности провода.

По этой причине с целью уменьшения потерь поверхность высокочастотных контуров серебрят.

### 3. Вихревое электрическое поле

Закон Фарадея говорит, что изменение потока вектора магнитной индукции вызывает появление в замкнутом контуре электрического тока.

Если контур замкнут, то в нем возникает ЭДС индукции. **Электрическое поле способно перемещать заряды по замкнутому контуру, совершая при этом над ними работу.**

Максвелл первым понял, что главное в явлении электромагнитной индукции – это возникновение в пространстве электрического поля под действием переменного магнитного поля. Причем наличие проводников не является для этого обязательным.

Переменное магнитное поле может породить вихревое электрическое поле и в свободном от проводников пространстве, в том числе и в вакууме.

Порождаемое переменным магнитным полем  $\mathbf{B}$  электрическое поле  $\mathbf{E}$  является вихревым.

Поскольку его работа по перемещению единичного положительного заряда по замкнутому контуру  $L$ ,

$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}, d\mathbf{l})$ , не равна нулю, а равна со знаком «минус» ЭДС (закон Фарадея).

Математически это можно записать в виде

уравнения 
$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S})$$

где  $S$  – поверхность, ограниченная замкнутым контуром  $L$ , а частная производная  $\partial/\partial t$  означает, что контур  $L$  и поверхность  $S$  не изменяются со временем.

Последнее уравнение может быть приведено к дифференциальной форме.

Для этого воспользуемся теоремой Стокса и преобразуем контурный интеграл от вектора  $\mathbf{E}$  к поверхностному:

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \int_S (\text{rot} \mathbf{E}, d\mathbf{S}) = - \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, d\mathbf{S} \right)$$

(ротором или вихрем называется величина, равному векторному произведению  $[\nabla, \mathbf{C}]$  и обозначается как  $\text{rot} \mathbf{C}$ .)



Поскольку контур  $L$  и поверхность  $S$  произвольны, то последнее равенство имеет место лишь при условии

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Это соотношение является дифференциальной формой закона электромагнитной индукции и представляет одно из основных уравнений теории электромагнитного поля (уравнение Максвелла).

Как мы видели в электростатике, для неподвижных зарядов электрическое поле являлось потенциальным и может быть выражено через энергетическую характеристику электростатического поля – потенциал :

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi,$$

и оно не могло обеспечить движение зарядов по замкнутым проводам, поскольку в этом случае

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \int_S \text{rot}(-\text{grad}\varphi) d\mathbf{S} = 0$$

– его работа по перемещению единичного заряда по замкнутому контуру равна нулю.

Но электрическое поле, порождаемое переменным магнитным полем, не потенциально, а является вихревым полем.

Оно имеет конечную тангенциальную составляющую при перемещении заряда по замкнутому контуру и способно вызвать непрерывное течение электричества в замкнутых проводниках, т.е. появление индукционных токов.

Если электрическое поле создается одновременно неподвижными зарядами  $q$ , для которых

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_q = 0,$$

и переменным магнитным полем  $\mathbf{B}$ , в соответствии с уравнением Максвелла,

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_B = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

то полное поле  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_B$  также удовлетворяет уравнению Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Поскольку изменение со временем вектора **B** приводит к появлению вихревого электрического поля, способного вызвать индукционные токи в замкнутых проводниках, то вектор **B** и получил название вектора магнитной индукции.

## 4. Самоиндукция

Если ток в обмотке катушки или соленоида меняется, то меняется и магнитный поток, пронизывающий каждый виток.

Согласно закону Фарадея, в каждом витке обмотки индуцируется ЭДС, во всей катушке величина ЭДС индукции, вызванная изменением тока в этой катушке, – ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon = - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Где  $\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i$

- полный магнитный поток (потокосцепление), охватывающий всю катушку;  $N$  – число витков в катушке.

Явление возникновения ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока называется самоиндукцией.

Самоиндукция представляет частный случай электромагнитной индукции.

Направление ЭДС самоиндукции препятствует возрастанию тока в цепи при его увеличении и его убыванию при уменьшении тока в цепи.

Самоиндукция подобна инерции в механическом движении.

Поток вектора магнитной индукции  $\Psi$ , посылаемый током  $I$  через свой собственный контур, равен

$$\Psi = LI,$$

где  $L$  – коэффициент самоиндукции произвольного замкнутого контура.

Величина индуктивности  $L$  определяется геометрией контура, числом витков  $N$ , магнитными свойствами окружающей среды.



В частности, для соленоида с магнитным сердечником

$$L = \mu\mu_0 \left( \frac{N}{l} \right)^2 V$$

где  $\mu$  – магнитная проницаемость сердечника;  $N$ ,  $l$ ,  $V$  – полное число витков, длина и объем соленоида.

Таким образом, ЭДС самоиндукции равна

$$\varepsilon = - \frac{d(LI)}{dt}$$

Если индуктивность контура постоянна, то ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока в цепи

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$$

За единицу индуктивности в СИ принимается индуктивность такого проводника, у которого при силе тока 1 А возникает связанный с ним магнитный поток  $\Psi$ , равный 1 Вб. Эту единицу называют Генри (Гн)

$$[L](\text{Гн}) \cdot [I](\text{А}) = [\Psi](\text{Вб}).$$

## 5. Токи при замыкании и размыкании цепи

В электрической цепи, содержащей постоянную ЭДС, при замыкании цепи сила тока за счет ЭДС самоиндукции устанавливается не мгновенно, а через некоторый промежуток времени.

При выключении источника тока, но в замкнутой цепи, ток не прекращается мгновенно. Возникающая при размыкании цепи ЭДС может многократно превышать ЭДС источника тока.

Пусть в цепь с источником постоянного тока  $\varepsilon$  и полным омическим сопротивлением  $R$  включена катушка индуктивности  $L$ .

Рассмотрим изменение тока в такой цепи при включении и выключении источника постоянного тока. При этом цепь всегда остается замкнутой (рис. 9).

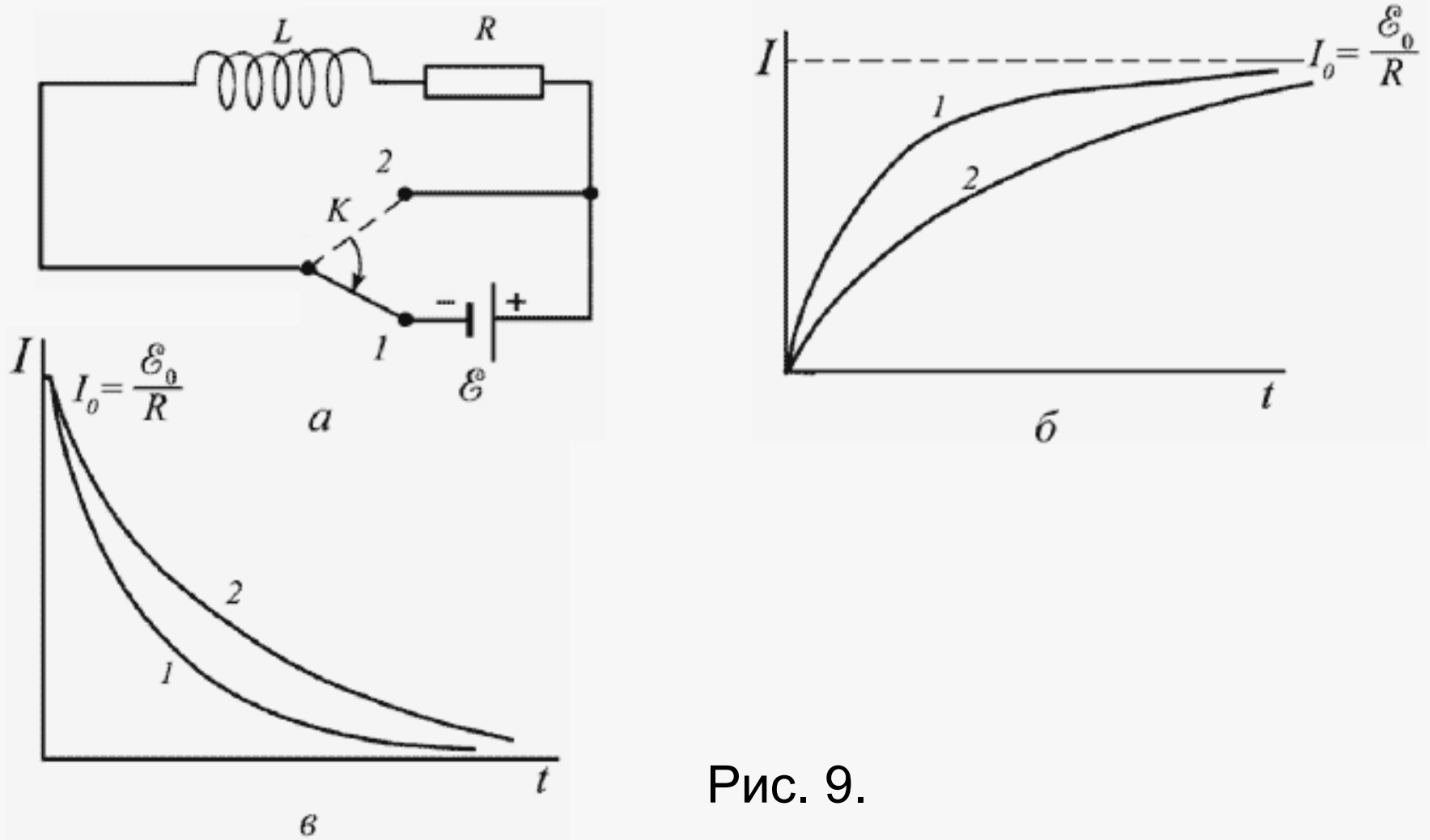


Рис. 9.

Величина тока, согласно закону Ома, равна

$$I = \frac{\mathbf{E} + \mathbf{E}_L}{R}$$

где  $\varepsilon_L$  – ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_L = -\frac{d(LI)}{dt}$$

Пусть индуктивность контура при подключении ЭДС остается постоянной, тогда

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

Для определения закона нарастания тока в цепи мы получаем следующее уравнение:

$$IR = \varepsilon - L \frac{dI}{dt}$$

решением которого при нулевом начальном токе в цепи  $I_0 = 0$ , является зависимость

$$I(t) = \frac{\mathbf{E}}{R} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$

$\tau = L/R$  – постоянная времени установления тока (рис. 9б).

Время  $\tau$  тем меньше, чем меньше индуктивность цепи и выше сопротивление.

## 6. Взаимная индукция. Трансформатор

Пусть рядом находятся две катушки  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , состоящие из  $N_1$  и  $N_2$  витков, по которым текут токи  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 10).

Если пространство заполнено однородным магнитным материалом, то магнитные потоки  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  через контуры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  равны

$$\Psi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2, \quad \Psi_2 = L_2 I_2 + L_{21} I_1.$$

Здесь:  $L_1 I_1$ ,  $L_2 I_2$  – магнитные потоки, созданные токами  $I_1$  и  $I_2$  в контуре  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ;

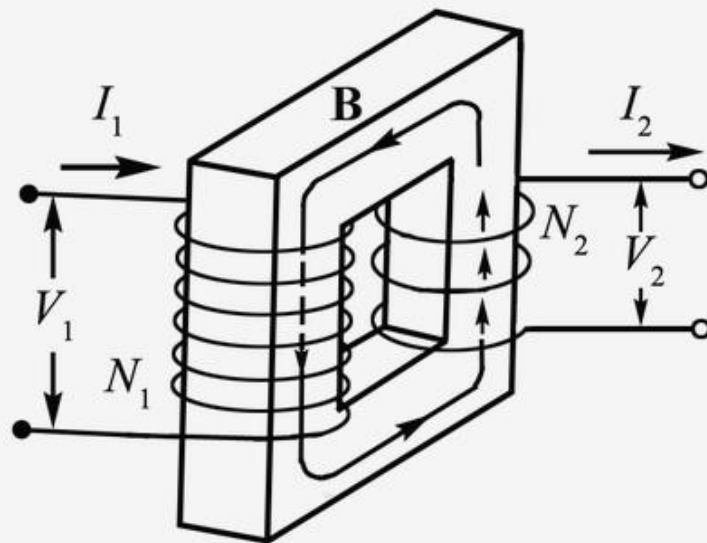
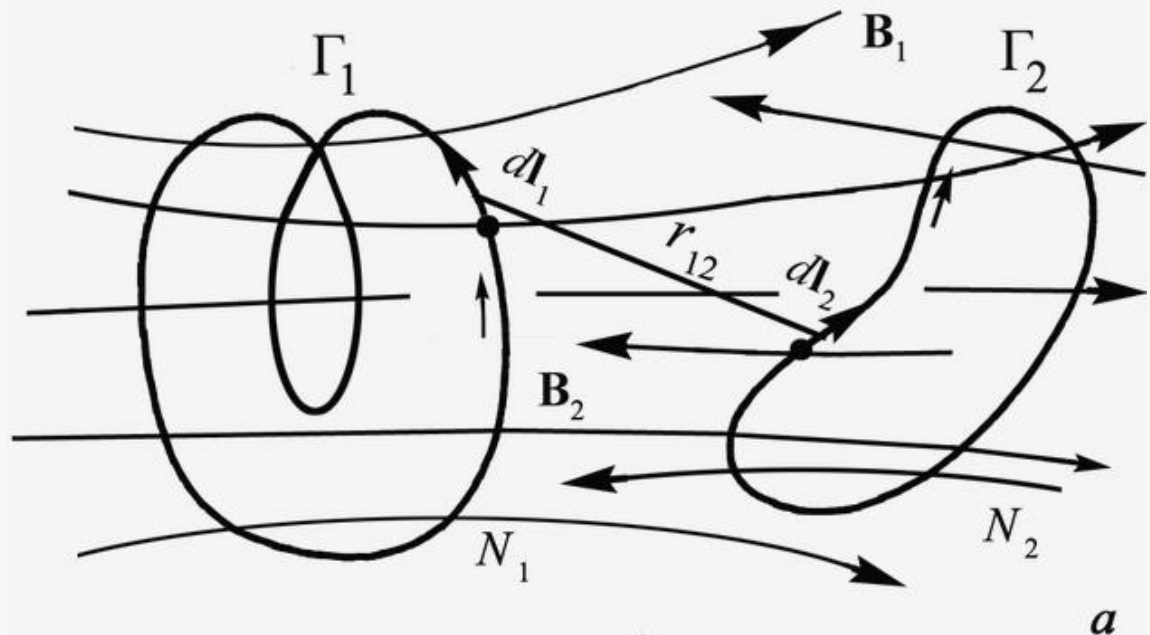
$L_1$  и  $L_2$  – индуктивности контуров  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

$\Psi_{12} = L_{12} I_2$ ,  $\Psi_{21} = L_{21} I_1$  – магнитные потоки, созданные токами  $I_2$  и  $I_1$  в контурах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ,  $L_{12} = L_{21}$  – коэффициенты взаимной индукции, равные:

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}$$

Рис. 10. Два контура  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  обладают взаимной индукцией (а).

Явление взаимной индукции используется в трансформаторе для преобразования величины напряжения  $V_1$  в  $V_2$  (б).



а

б



В общем случае изменение тока в контуре  $\Gamma_1$  индуцирует в контуре  $\Gamma_2$ , помимо ЭДС самоиндукции, дополнительную ЭДС, равную

$$\varepsilon_{12} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

Аналогично за счет изменения тока в контуре  $\Gamma_2$  возникает переменный магнитный поток, индуцирующий в контуре  $\Gamma_1$  дополнительную ЭДС, равную

$$\varepsilon_{21} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

При наличии магнитного взаимодействия между контурами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  контуры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  называются связанными, а явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменении силы тока в другом называется взаимной индукцией.

Аналогично за счет изменения тока в контуре  $\Gamma_2$  возникает переменный магнитный поток, индуцирующий в контуре  $\Gamma$  дополнительную ЭДС, равную

$$\varepsilon_{21} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

При наличии магнитного взаимодействия между контурами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  контуры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  называются связанными, а явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменении силы тока в другом называется взаимной индукцией.

При наличии магнитного взаимодействия между контурами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  контуры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  называются связанными, а явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменении силы тока в другом называется взаимной индукцией.

Коэффициенты  $L_{12} = L_{21}$  называются коэффициентами взаимной индукции или взаимной индуктивностью контуров. В отсутствие ферромагнетиков эти коэффициенты равны. Единицей измерения  $L_{ik}$  является Генри (СИ):  $[1 \text{ Гн}] = [1 \text{ Вб}]/[1 \text{ А}]$ .

Явление взаимной индукции используется в трансформаторе для преобразования величины напряжения  $V_1$  в  $V_2$  (б).

Отношение напряжений в первичной и вторичной обмотках равно отношению числа витков:

$$V_1/V_2 = N_1/N_2$$

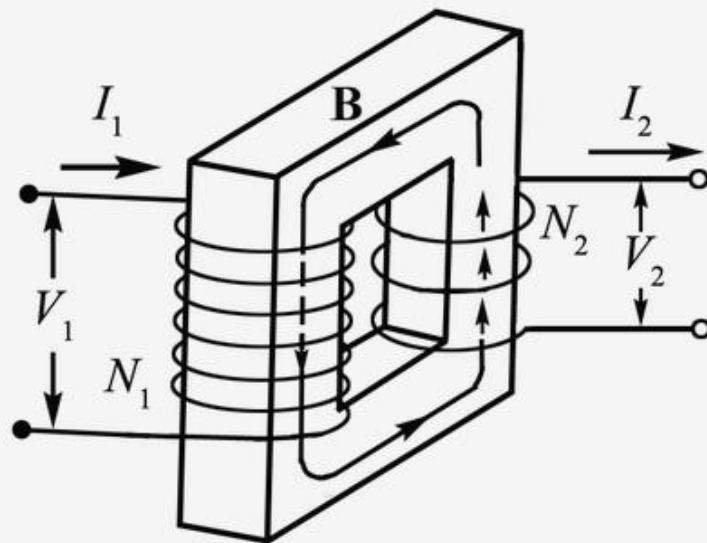
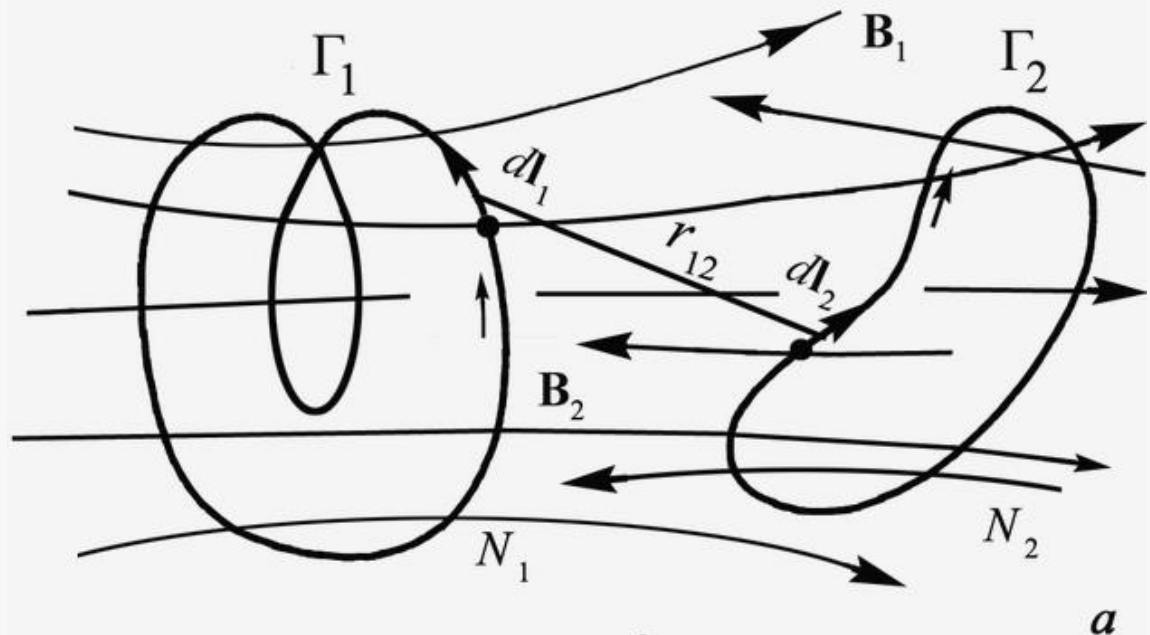
в этих обмотках.

Устройство, состоящее из двух или более катушек, намотанных на один общий сердечник, называется трансформатором (рис. 10, б).

В большинстве трансформаторов вторичная обмотка наматывается поверх первичной обмотки.

Рис. 10. Два контура  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  обладают взаимной индукцией (а).

Явление взаимной индукции используется в трансформаторе для преобразования величины напряжения  $V_1$  в  $V_2$  (б).



а

б

Если к первичной обмотке приложить переменное напряжение  $V_1$ , то величина напряжения во вторичной обмотке равна

$$V_2 = -\frac{d\Psi_2}{dt} = -\frac{N_2}{N_1} \frac{d\Psi_1}{dt} = \frac{N_2}{N_1} V_1$$

## 7. Индукционный ускоритель электронов – бетатрон

Электродвижущая сила индукции, создаваемая переменным магнитным полем, может существовать и в отсутствие проводников.

Энергия, передаваемая вихревым электрическим полем единичному положительному заряду, равна

$$\mathbf{E} = \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

– контурному интегралу по замкнутой траектории  $\Gamma$  от тангенциальной составляющей вихревого электрического поля.

Согласно закону Фарадея, этот интеграл равен изменению магнитного потока через замкнутый контур  $\Gamma$ .

Вихревое электрическое поле может действовать на сгусток электронов, двигающихся в изменяющемся магнитном поле, и ускорять их.

При определенных условиях движение электронов происходит в переменном магнитном поле по орбите постоянного радиуса и является устойчивым.

Энергия электронов увеличивается за счет вихревого электрического поля, создаваемого изменяющимся магнитным потоком, пронизывающим орбиту частиц.



Циклический индукционный ускоритель электронов данного типа называется *бетатроном* (рис. 11).

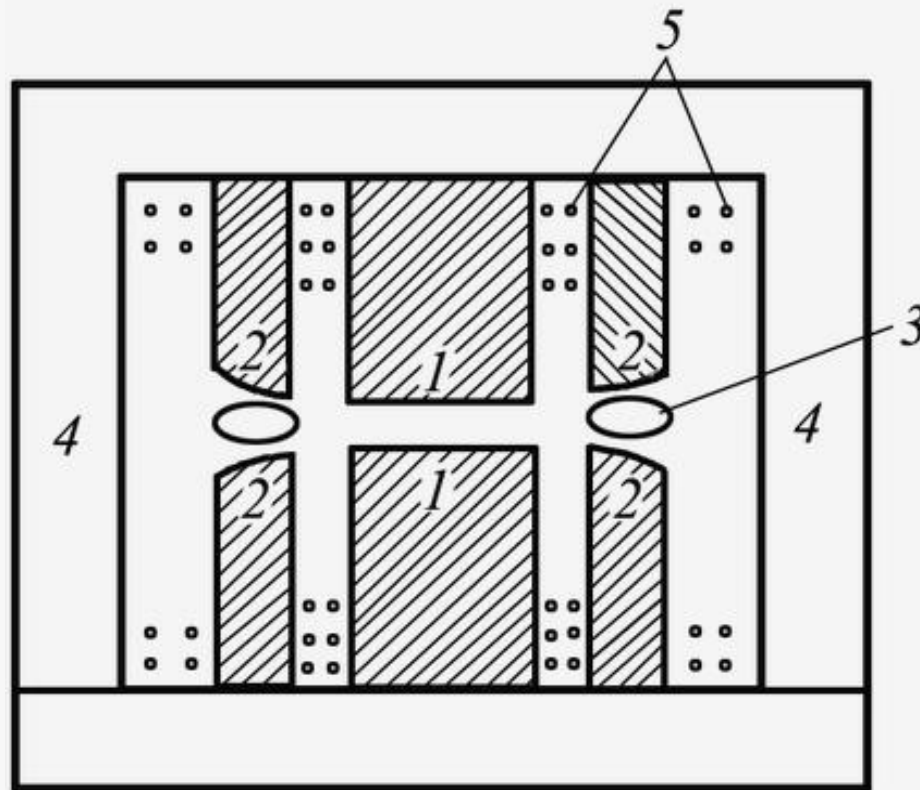
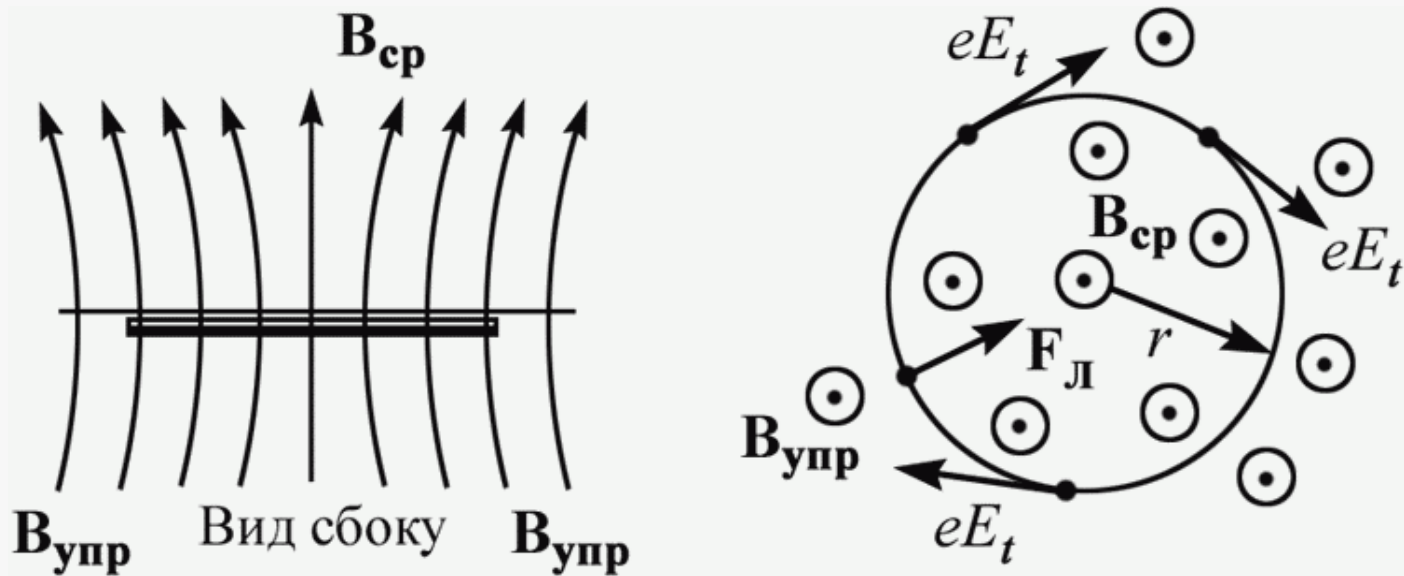


Рис. 11. Схематический разрез бетатрона: 1 – центральный сердечник; 2 – полюсные наконечники; 3 – сечение кольцеобразной вакуумной камеры; 4 – ярмо магнита; 5 – обмотки электромагнита

Переменный центральный магнитный поток  $B$  создает в бетатроне вихревую ЭДС индукции, ускоряющую электроны.

Удержание электронов на стационарной круговой орбите осуществляется управляющим магнитным полем  $B_{упр}$ , определенным образом изменяющимся во времени (рис. 12).

Рис. 12  
Камера с  
ускоряемыми  
электронами  
в  
переменном  
магнитном  
поле



Под действием переменного магнитного поля на круговой орбите индуцируется ЭДС индукции, величина которой определяется законом Фарадея

$$\mathbf{E} = E_t 2\pi r = - \frac{d\Phi}{dt}$$

где  $\Phi$  – поток магнитной индукции через орбиту.

Среднее значение вектора индукции магнитного поля внутри орбиты радиусом  $r$

$$B_{\text{ср}} = \frac{\Phi}{\pi r^2}$$

Напряженность тангенциальной составляющей вихревого электрического поля равна

$$E_t = \frac{r}{2} \frac{dB_{\text{cp}}}{dt}$$

Под действием силы  $F = eE_t$  меняется импульс электрона

$$F = \frac{dp}{dt}$$

Интегрируя равенство

$$\frac{er}{2} \frac{dB_{\text{cp}}}{dt} = \frac{dp}{dt}$$

находим приращение импульса электрона

$$\Delta p = p(t) - p_0 = \frac{er}{2} [B_{\text{cp}}(t) - B_{\text{cp}}(0)] = \frac{er}{2} \Delta B_{\text{cp}}$$

где  $\Delta B_{\text{cp}} = B_{\text{cp}}(t) - B_{\text{cp}}(0)$  – приращение средней индукции магнитного поля внутри электронной орбиты.

Именно изменение индукции магнитного поля внутри орбиты сопровождается увеличением импульса электрона – ускорением электрона.

Если начальной индукцией и импульсом электрона можно пренебречь, то получим

$$p(t) = \frac{er}{2} B_{\text{cp}}(t).$$

– приобретенный электроном импульс определяется средним значением индукции магнитного поля на орбите.

Найдем величину индукции управляющего магнитного поля  $B_{\text{упр}}$ , при которой движение электрона будет происходить по орбите постоянного радиуса.

Со стороны  $B_{\text{упр}}$  на движущийся электрон действует сила Лоренца, искривляющая траекторию движения электрона в окружность с радиусом, определяемым равенством сил Лоренца и центростремительной,

$$evB_{\text{упр}} = \frac{mv^2}{r} = \frac{\Delta p v}{r} = \frac{v}{r} \frac{er}{2} [B_{\text{ср}}(t) - B_{\text{ср}}(0)]$$

Откуда получаем

$$B_{\text{упр}} = \frac{1}{2} [B_{\text{ср}}(t) - B_{\text{ср}}(0)]$$

В результате для равновесной орбиты получаем соотношение ( $B_{\text{ср}}(0) = 0$ ):

$$B_{\text{ср}}(t) = 2B_{\text{упр}}(t).$$

Для работы бетатрона необходимо, чтобы среднее магнитное поле внутри орбиты росло в два раза быстрее магнитного поля на самой орбите.

Это условие

$$\frac{dB_{\text{cp}}(t)}{dt} = 2 \frac{dB_{\text{упр}}(t)}{dt}$$

называют бетатронным условием, условием Видерозэ или «условием 2:1».



Идея бетатрона была запатентована в 1922 г. Дж. Слепяном. В 1928 г. Р. Видероз сформулировал условие существования равновесной орбиты – орбиты постоянного радиуса.

Первый действующий бетатрон был создан в 1940 г. Д. Керстом на основе разработанной им совместно с Р. Сербером теории движения электрона и тщательной отработки конструкции ускорителя.

В СССР первые бетатроны были разработаны и созданы учеными Томского политехнического института (ныне университета): профессорами А.А. Воробьевым, Л.М. Ананьевым, В.И. Горбуновым, В.А. Москалевым, Б.Н. Родимовым.

В последующие годы в институте интроскопии при ТПУ были разработаны и созданы малогабаритные переносные бетатроны, применяемые в медицине, дефектоскопии и других прикладных и научных исследованиях (профессор В.Л. Чахлов).

Благодаря простоте конструкции, дешевизне и удобству пользования бетатроны нашли особо широкое применение в прикладных целях в диапазоне энергии 20÷50 МэВ.

Используется непосредственно сам электронный пучок или тормозное  $\gamma$ -излучение, энергия которого может плавно изменяться.

## Основные выводы

При изменении магнитного потока  $\Phi$  в проводящем контуре возникает ЭДС, величина которой определяется скоростью изменения магнитного потока через этот контур законом Фарадея

$$\mathbf{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Знак «минус» в законе Фарадея говорит о том, что ЭДС индукции порождает в замкнутой цепи индукционный ток, направленный таким образом, чтобы препятствовать изменению магнитного потока в замкнутом контуре – правило Ленца.

Если переменный высокочастотный ток протекает по проводнику, то вихревые токи препятствуют равномерному распределению тока по поперечному сечению проводника.

Плотность тока убывает от поверхности к оси по закону

$$j = j_0 \exp(-\alpha r)$$

Где

$$\alpha = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\sigma \mu \nu}$$

Работа вихревого поля по замкнутому контуру не равна нулю:

$$\oint_{(\Gamma)} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{(S)} (\mathbf{B}, d\mathbf{S})$$

где  $S$  – поверхность, ограниченная контуром  $\Gamma$ .

В дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

Явление возникновения ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока называется самоиндукцией. ЭДС самоиндукции определяется выражением

$$\mathbf{E} = -\frac{d(LI)}{dt}$$

Здесь  $L$  – коэффициент самоиндукции, или индуктивность.

Для соленоида длиной  $l$ , объемом  $V$ , содержащим  $N$  витков и магнитный сердечник с магнитной проницаемостью  $\mu$ ,

$$L = \mu\mu_0 \left( \frac{N}{l} \right)^2 V$$

За единицу индуктивности в СИ 1 Гн [ $L$ ] принимается индуктивность проводника, у которого при силе тока 1 А [ $I$ ] возникает связанный с ним магнитный поток в 1 Вб [ $\Psi$ ]:

$$1 \text{ Гн } [L] \cdot 1 \text{ А } [I] = 1 \text{ Вб } [\Psi].$$

При включении и выключении тока в замкнутой цепи, содержащей индуктивность  $L$  и сопротивление  $R$ , нарастание и спад тока происходит по закону

$$I = I_0 \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$

где  $\tau = \frac{L}{R}$  – постоянная времени установления;  
– стационарный ток в цепи;  $E$  – ЭДС источника.

Явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменении силы тока в другом называется взаимной индукцией. ЭДС взаимной индукции равна

$$\mathbf{E}_{12} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad \mathbf{E}_{21} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

Коэффициенты  $L_{12} = L_{21}$  называются коэффициентами взаимной индукции или взаимной индуктивностью контуров. Для двух катушек на общем сердечнике

$$L_{12} = L_{21} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2 V}{l^2}$$

где  $N_1, N_2$  – число витков первой и второй катушки;

$l$  – длина катушек;  $V$  – объем сердечника.



Если магнитные потоки не рассеиваются, то отношение напряжения в первичной  $V_1$  и вторичной  $V_2$  обмотках трансформатора пропорционально отношению числа витков в этих оболочках

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

При вращении рамки площадью  $S$ , содержащей  $N$  витков с угловой скоростью  $\omega$  в магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{B} \perp \omega$ ), в рамке наводится ЭДС

$$\mathbf{E} = NBS\omega \sin\omega t.$$

Данная рамка является прообразом генератора переменного тока.

Приращение импульса электрона в переменном поле

$$\Delta p(t) = \frac{er}{2} \Delta B_{\text{cp}}(t)$$

определяется приращением средней индукции магнитного поля  $\Delta B_{\text{cp}}$  внутри электронной орбиты радиусом  $r$  и лежит в основе работы индукционного ускорителя электронов – бетатрона.

Для работы бетатрона необходимо, чтобы среднее магнитное поле внутри орбиты росло в два раза быстрее магнитного поля на самой орбите (условие Видероз)

$$\frac{\partial B_{\text{cp}}}{\partial t} = 2 \frac{\partial B_{\text{упр}}}{\partial t}$$

Вихревое магнитное поле может порождаться не только электрическим током, но и изменяющимся со временем электрическим полем в пространстве, свободном от проводников и зарядов.