5. ЭНЕРГИЯ. РАБОТА. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

- 5.1. Кинетическая энергия. Работа и мощность
- 5.2. Консервативные силы и системы
- 5.3. Потенциальная энергия
- 5.4. Закон сохранения механической энергии
- 5.5. Условие равновесия механических систем
- 5.6. Применение законов сохранения
  - 5.6.1. Абсолютно упругий, центральный удар
  - 5.6.2. Абсолютно неупругий удар
  - 5.6.3. Движение тел с переменной массой

5.1. Кинетическая энергия. Работа и мощность

Уравнение движения тела под действием внешней силы $\vec{\mathrm{F}}$ имеет вид (рисунок 5.1):

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{F}},$$

или, в проекции на направление движения:

$$m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = F_{\tau}. \qquad (5.1.1)$$

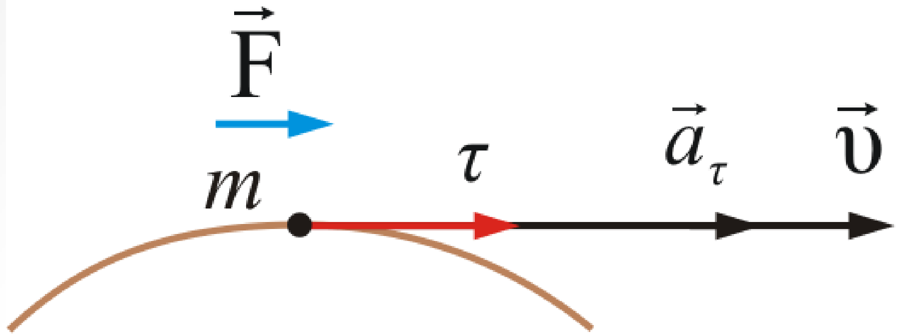

Рисунок 5.1

Умножим обе части равенства (5.1.1) на $\upsilon\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}r,$ получим:

$$m\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon = F_\tau\,\mathrm{d}r.$$

Левая часть равенства, есть ***полный дифференциал некоторой функции***:

$$m\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon = \mathrm{d}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right)$$

или

$$\mathrm{d}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = F_\tau \mathrm{d}r.$$

Если система замкнута, то $\vec{\mathrm{F}}^{\text{внеш.}} = 0$ и

$F_\tau = 0,$ тогда и $\mathrm{d}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = 0.$

Если полный дифференциал некоторой функции, описывающей поведение системы равен нулю, то эта функция может служить характеристикой состояния данной системы.

Функция состояния системы, определяемая только скоростью ее движения, называется ***кинетической энергией****.*

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (5.1.2)$$

Кинетическая энергия системы есть функция состояния движения этой системы. *K* – аддитивная величина:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2},$$

K – относительная величина, её значение зависит от выбора системы координат (так же, как и $\vec{\upsilon}$ – относительная величина).

Энергия измеряется в СИ в единицах произведения силы на расстояние, т.е. в ньютонах на метр. $1\,\mathrm{Н}\cdot м = 1\,Дж$

Кроме того, в качестве единицы измерения энергии используется внесистемная единица – электрон-вольт (эВ): 1 эВ = 1,6 1019 Дж.

При решении задач, полезна формула, связывающая кинетическую энергию с импульсом *p*. Получим её:

$$\frac{m\upsilon^2}{2}\left(\frac{m}{m}\right)=\frac{m^2\upsilon^2}{2m},$$ отсюда

$$K=\frac{p^2}{2m}. \qquad (5.1.3)$$

Теперь рассмотрим связь кинетической энергии с работой.

Если постоянная сила действует на тело, то оно будет двигаться в направлении силы. Тогда, элементарная работа по перемещению тела из т. 1 в т. 2, будет равна произведению силы *F* на перемещение d*r*:

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}r,$$ отсюда $$A = \int_1^2 F\mathrm{d}r.$$

Т.к. нам известно, что $$F = ma = m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t},$$

а $\mathrm{d}r = \upsilon \mathrm{d}t,$ тогда после замены получим выражение для работы:

$$A = \int_1^2 F\mathrm{d}r = m\int_1^2 \upsilon \mathrm{d}\upsilon = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}.$$

Окончательно получаем

$$A = \int_1^2 F\mathrm{d}r = K_2 - K_1.$$

Следовательно, ***работа*** *силы приложенной к телу на пути r численно равна изменению кинетической энергии этого тела*:

$$A = \Delta K. \qquad (5.1.4)$$

Или изменение кинетической энергии d*K* равно работе внешних сил:

$$\mathrm{d}K = \mathrm{d}A.$$

Работа, так же как и кинетическая энергия, измеряется в джоулях.

Скорость совершения работы (передачи энергии) называется ***мощность***.

Мощность есть работа, совершаемая в единицу времени.

Мгновенная мощность $N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$

или $N = F\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = F\upsilon.$

Средняя мощность $< N > = \frac{A}{\Delta t}.$

Измеряется мощность в ваттах. 1 Вт = 1 Дж/с.

5.2. Консервативные силы и системы

Кроме контактных взаимодействий наблюдаются взаимодействия между телами, удаленными друг от друга. Подобное взаимодействие осуществляется посредством физических полей (особая форма материи). *Каждое тело* создает вокруг себя поле, которое проявляет себя именно воздействием на другие тела.

Силы, работа которых не зависит от пути, по которому двигалось тело, а зависит от начального и конечного положения тела называются ***консервативными****.*

Обозначим *A* – работа консервативных сил, по перемещению тела из т. 1 в т. 2 (рисунок 5.2)

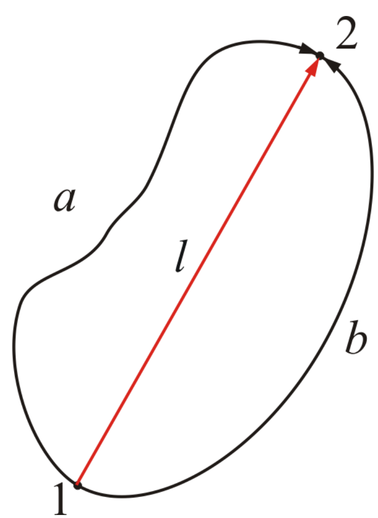

Рисунок 5.2

$$A_{1a2} = A_{1b2} = A_{1l2} = A_{12}.$$

Изменение направления движения на противоположное – вызывает изменение знака работы консервативных сил. Отсюда следует, что *работа консервативных сил вдоль замкнутой кривой равна нулю*:

$$\oint_S F\mathrm{d}r = A_{12} + A_{21} = A_{12} - A_{12} = 0 \qquad (5.2.1)$$

Интеграл по замкнутому контуру *S*, $\oint_S \vec{\mathrm{F}}\mathrm{d}r$ – называется *циркуляцией вектора* $\vec{\mathrm{F}}$

Следовательно, если *циркуляция* какого-либо вектора силы *равна нулю*, то эта *сила консервативна*.

Консервативные силы: сила тяжести, электростатические силы, силы центрального стационарного поля. Неконсервативные силы: силы трения, силы вихревого электрического поля.

Консервативная система – *такая, внутренние силы которой только консервативные, внешние – консервативны и стационарны.*

Пример консервативных сил – гравитационные силы (рисунок5.3).

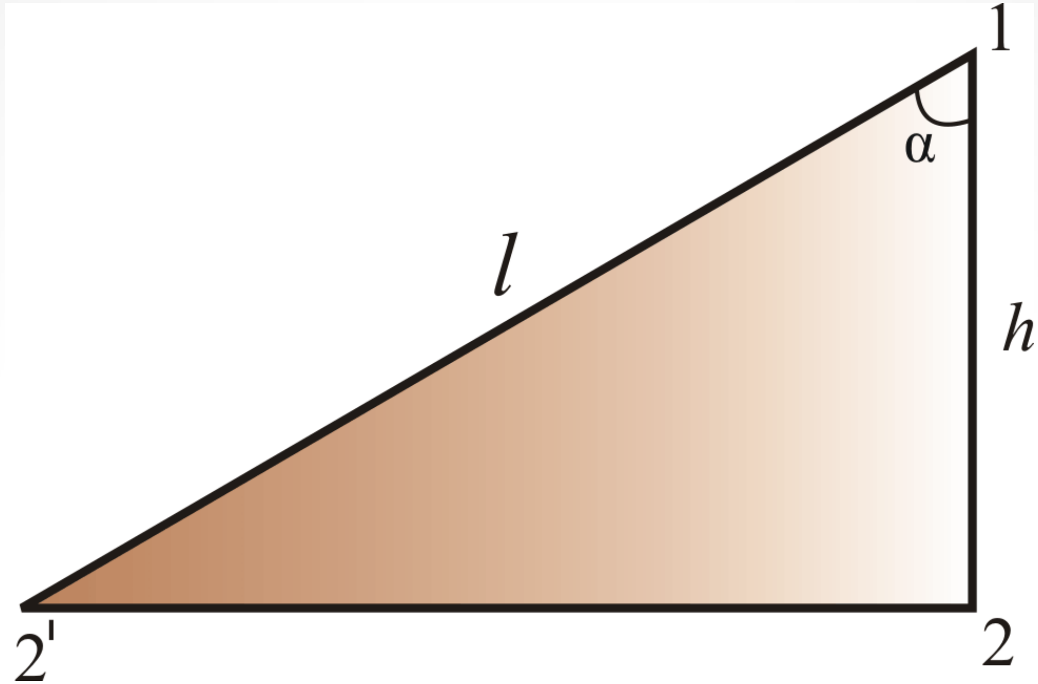

Рисунок 5.3

Работа по подъему тела массы *m* на высоту *h*, равна: $A_{21} = mgh$

С другой стороны $A_{2'1} = mgl\cos\alpha = mgh$

где α – угол между силой $m\vec{g}$ и направлением перемещения. Таким образом, из примера видно, что работа не зависит от формы пути, значит, силы консервативны, а поле этих сил потенциально.

5.3. Потенциальная энергия

Если на систему материальных тел действуют *консервативные силы*, то можно ввести понятие *потенциальной энергии*.

Работа, совершаемая консервативными силами при изменении конфигурации системы, то есть при изменении положения тел относительно системы отсчета, не зависит от того, как было осуществлено это изменение. Работа определяется только начальной и конечной конфигурациями системы.

$$A_{12} = U_1 - U_2, \qquad (5.3.1)$$

здесь потенциальная энергия U (x, y, z) – *функция состояния системы, зависящая только от координат всех тел системы в поле консервативных сил.*

Итак, K – определяется скоростью движения тел системы, а U – их взаимным расположением.

Из (5.3.1) следует, что работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии:

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}U.$$

Нет единого выражения для *U*. В разных случаях она определяется по-разному.

Потенциальная энергия при гравитационном взаимодействии

Работа тела при падении $A = mgh$. Или $A = U - U_0$. Условились считать, что на поверхности земли $(h = 0)$, $U_0 = 0$ тогда $U = A$ т.е.

$$U = mgh. \qquad (5.3.2)$$

Для случая гравитационного взаимодействия между массами M и m, находящимися на расстоянии r друг от друга, потенциальную энергию можно найти по формуле

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r}. \qquad (5.3.3)$$

На рисунке 5.4 изображена диаграмма потенциальной энергии гравитационного притяжения масс M и m.

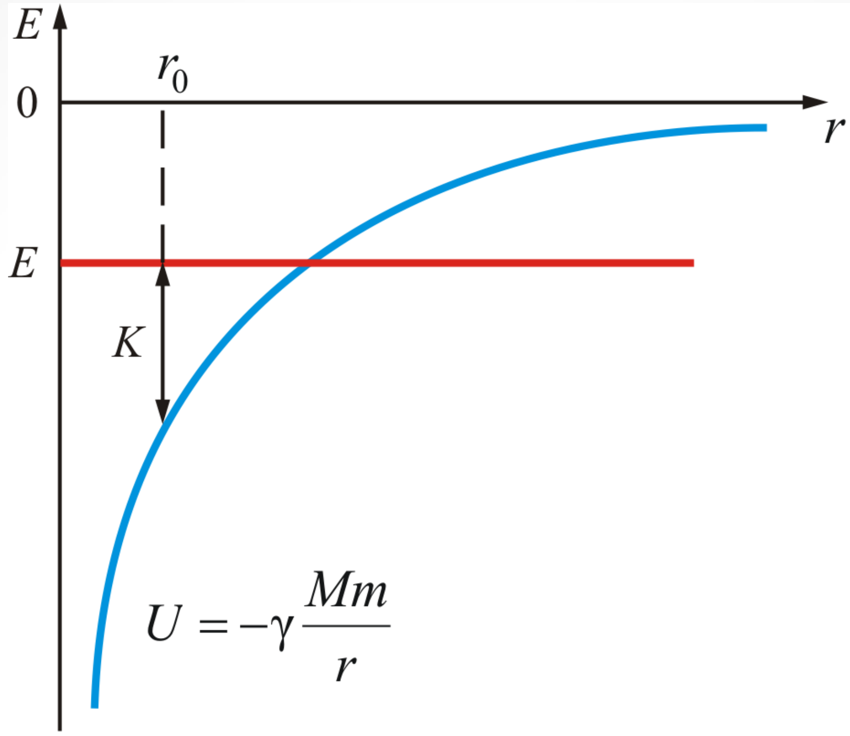

Рисунок 5.4

Здесь полная энергия $E = K + U$. Отсюда легко найти кинетическую энергию $K = E - U$.

Потенциальная энергия упругой деформации (пружины)

Найдём работу, совершаемую при деформации упругой пружины.

Сила упругости $F_{\text{упр}} = -kx,$ где k – коэффициент упругости. Сила непостоянна, поэтому элементарная работа $\mathrm{d}A = F\mathrm{d}x = -kx\mathrm{d}x$ знак минус говорит о том, что работа совершенна над пружиной.

$$A = \int \mathrm{d}A = -\int_{x_1}^{x_2} kx\mathrm{d}x = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}, \qquad (5.3.4)$$

Т.е. $A = U_1 - U_2$ Примем: $U_2 = 0, U_1 = U$ тогда

$$U = \frac{kx^2}{2}. \qquad (5.3.5)$$

На рисунке 5.5 показана диаграмма потенциальной энергии пружины.

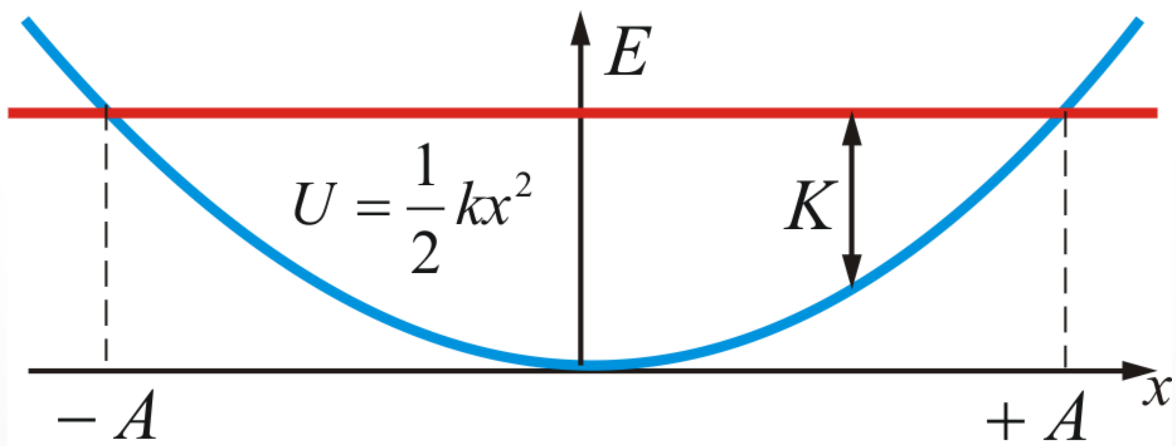

Рисунок 5.5

Здесь $E = K + U$ – полная механическая энергия системы, *К* – кинетическая энергия в точке x_1.

Связь между потенциальной энергией и силой

Пространство, в котором действуют консервативные силы, называется ***потенциальным полем.*** Каждой точке потенциального поля соответствует некоторое значение силы $\vec{F}$ действующей на тело, и некоторое значение потенциальной энергии *U*.

Значит, между силой $\vec{F}$ и *U* должна быть связь $dA = \vec{F}d\vec{r}$ с другой стороны, $dA = -dU$ следовательно, $\vec{F}d\vec{r} = -dU$ отсюда

$$\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}. \quad (5.3.6)$$

Проекции вектора силы на оси координат:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (5.3.7)$$

Вектор силы можно записать через проекции.

$$\vec{\mathrm{F}} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k} \right)$$

или

$$F = -\mathrm{grad}U, \qquad (5.3.8)$$

где $\mathrm{grad} = \dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$

Градиент – это вектор, показывающий направление наибыстрейшего изменения функции. Следовательно, $\vec{F}$ направлен в сторону наибыстрейшего уменьшения *U*.

5.4. Закон сохранения механической энергии

Закон сохранения сводит воедино результаты, полученные нами раньше.

В сороковых годах девятнадцатого века трудами Р. Майера, Г. Гельмгольца и Дж. Джоуля (все в разное время и независимо друг от друга) был доказан закон сохранения и превращения энергии.

Джоуль Джеймс Прескотт (1818 – 1889) – английский физик, один из первооткрывателей закона сохранения энергии. Первые уроки по физике ему давал Дж. Дальтон, под влиянием которого Джоуль начал свои эксперименты. Работы посвящены электромагнетизму, кинетической теории газов.

Пример. Рассмотрим систему, состоящую из *N*-частиц.

Силы взаимодействия между частицами $(\vec{F}^{\text{внутр.}})$ - консервативные.

Кроме внутренних сил на частицы действуют внешние консервативные и неконсервативные силы, т. е. рассматриваемая система частиц или тел консервативна. Тогда для этой системы можно найти полную энергию системы:

$$E = K + U_{\text{внутр.}} + U_{\text{внеш.}} = \text{const} \qquad (5.4.1)$$

Для механической энергии ***закон сохранения*** звучит так: ***полная механическая энергия консервативной системы материальных точек остаётся постоянной***.

Для *замкнутой системы*, т.е. для системы на которую не действуют внешние силы, можно записать:

$$E = K + U_{\text{внутр.}} = \text{const} \qquad (5.4.2)$$

т.е. ***полная механическая энергия*** *замкнутой системы материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы,* ***остаётся постоянной***.

Если в замкнутой системе действуют неконсервативные силы, то полная механическая энергия системы не сохраняется – частично она переходит в другие виды энергии – неконсервативные.

Система, в которой механическая энергия переходит в другие виды энергии, называется ***диссипативной***, сам процесс перехода называется ***диссипацией энергии***.

В диссипативной, изолированной от внешнего воздействия системе остаётся постоянной сумма всех видов энергии (механической, тепловой и т.д.) Здесь действует общий закон сохранения энергии.

Этот процесс хорошо демонстрирует маятник Максвелла. Роль консервативной внешней силы здесь играет гравитационное поле. Маятник прекращает свое движение из-за наличия внутренних неконсервативных сил (сил трения, сопротивления воздуха).

Максвелл Джеймс Клерк (1831 – 1879) – английский физик. Работы посвящены электродинамике, молекулярной физике, общей статике, оптике, механике, теории упругости. Установил статистический закон, описывающий распределение молекул газа по скоростям. Самым большим достижением Максвелла является теория электромагнитного поля, которую он сформулировал в виде системы нескольких уравнений, выражающих все основные закономерности электромагнитных явлений. Также сформулировал теорему в теории упругости.

5.5. Условие равновесия механической системы

Механическая система будет находиться в ***равновесии****, если на неё не будет действовать сила*. Это условие *необходимое*, но *недостаточное,* так как система может при этом находиться в равномерном и прямолинейном движении. Рассмотрим пример, изображенный на рисунке 5.6. Здесь, даже при отсутствии силы, положение в точке X_2 нельзя назвать устойчивым равновесием.

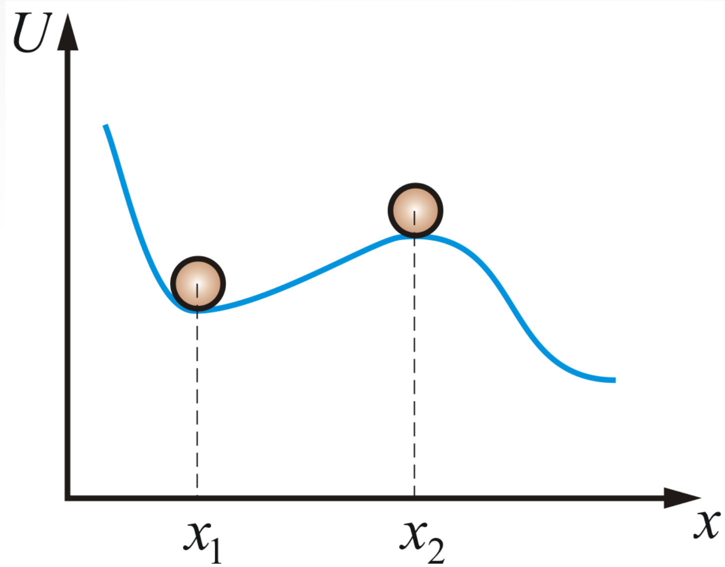

Рисунок 5.6

Таким образом, по определению $F_x = 0$ – условие равновесия системы. Из (5.3.7) имеем

$$\left|\vec{F}_x\right| = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Следовательно, при $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ система будет находиться в состоянии равновесия.

Именно так находят положение точек экстремума.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \text{ при } x = x_1 \text{ и } x = x_2,$$

но при x_2, $U = \max$ – состояние неустойчивого равновесия; x_1, $U = \min$ – система находится в устойчивом равновесии.

Следовательно, достаточным условием равновесия является равенство минимуму значения U (это справедливо не только для механической системы, но, например и для атома).

5.6. Применение законов сохранения
5.6.1. Абсолютно упругий центральный удар

При абсолютно неупругом ударе закон сохранения механической энергии не работает.

Применим закон сохранения механической энергии для расчета скорости тел при *абсолютно упругом ударе* – это такой удар, при котором не происходит превращения механической энергии в другие виды энергии.

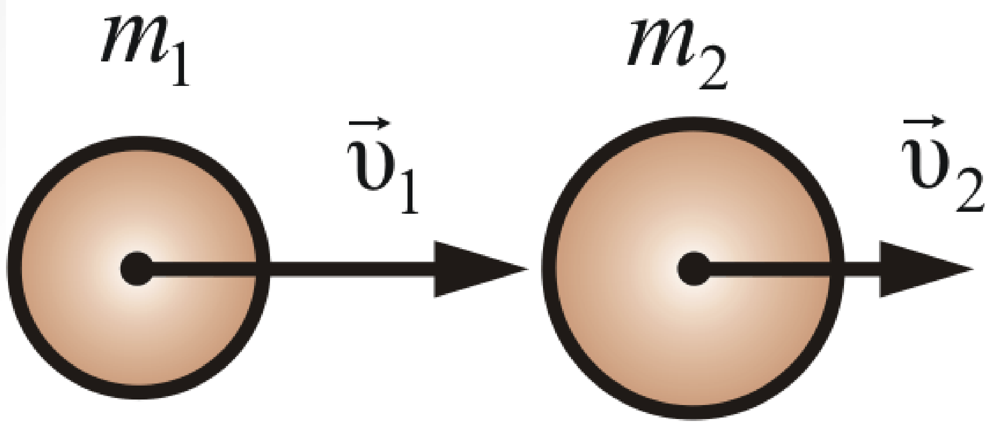

Рисунок 5.7

На рисунке 5.7 изображены два шара *m*1 и *m*2. Скорости шаров $\vec{\upsilon}_1 > \vec{\upsilon}_2$ (поэтому, хотя скорости и направлены в одну сторону все равно будет удар).

Систему можно считать замкнутой. Кроме того, при абсолютно упругом ударе она консервативна.

Обозначим $\vec{\upsilon}'_1$ и $\vec{\upsilon}'_2$ – скорость шаров после их столкновения.

В данном случае можно воспользоваться законом сохранения механической энергии и законом сохранения импульса (в проекциях на ось *x*):

$$\begin{cases} \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1\upsilon_1'^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2'^2}{2} \\ m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon'_1 + m_2\upsilon'_2. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений относительно υ'_1 и υ'_2 получим

$$\upsilon'_1 = \frac{2m_2\upsilon_2 + (m_1 - m_2)\upsilon_1}{m_1 + m_2};$$

$$\upsilon'_2 = \frac{2m_1\upsilon_1 + (m_2 - m_1)\upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

Таким образом, скорости шаров после абсолютно упругого удара не могут быть одинаковыми по величине и по направлению.

Рассмотрим теперь *абсолютно упругий удар шара о неподвижную массивную стенку*.

Стенку можно рассматривать как неподвижный шар с $\upsilon_2 = 0$ массой $m_2 \to \infty$

Разделим числитель и знаменатель на *m*2 и пренебрежем m_1 / m_2 тогда

$$\upsilon'_1 = \frac{2\upsilon_2 + \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)\upsilon_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = \frac{2\upsilon_2 - \upsilon_1}{1},$$

т.е.

$$\upsilon'_1 = -\upsilon_1$$

Таким образом, шар m_1 изменит скорость на *противоположную*.

5.6.2. Абсолютно неупругий удар

Абсолютно неупругий удар *– это столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются и двигаются дальше, как единое целое.*

Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу.

Если массы шаров *m*1 и *m*2, их скорости до удара υ_1 и υ_2,
то используя закон сохранения импульса, можно записать

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon \qquad (5.6.1)$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость движения шаров после удара. Тогда:

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}. \qquad (5.6.2)$$

Если шары двигались навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом. В частном случае, если массы и скорости шаров равны, то

$$\upsilon = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{2} = 0$$

Выясним, как меняется кинетическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе.

Так как в процессе соударения шаров между ними действуют силы, зависящие не от самих деформаций, а от их скоростей, то мы имеем дело с силами, подобными силам трения, поэтому закон сохранения механической энергии не должен соблюдаться. Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии. Эту «потерю» можно определить по разности кинетических энергий до и после удара:

$$\Delta K = \left(\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2}$$

Отсюда, получаем

$$\Delta K = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \left(\upsilon_1 - \upsilon_2 \right)^2. \qquad (5.6.3)$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно $\upsilon_2 = 0$ то

$$\upsilon = \frac{m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}, \quad \Delta K = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}.$$

Когда $m_2 >> m_1$ (масса неподвижного тела очень большая), то $\upsilon << \upsilon_1$ и почти вся кинетическая энергия при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому, например, для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка. Когда $m_2 \approx m_1$, тогда $\upsilon \approx \upsilon_1$ и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение, а не на остаточную деформацию (например, молоток – гвоздь).

Абсолютно неупругий удар – пример того, как происходит «потеря» механической энергии под действием диссипативных сил.