УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Тема: УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

1. Введение

2. Уравнения Максвелла в интегральной – дифференциальной формах

1. Введение

Английский физик Дж. Максвелл обобщил эмпирические закономерности, установленные Ампером, Кулоном, Эрстедом, Фарадеем в 60-х гг. XIX в., и сформулировал фундаментальные уравнения классической макроскопической электродинамики.

Эти уравнения описывают электромагнитные явления в любой среде и в вакууме.

Особенно велико было влияние на Дж. Максвелла работ М. Фарадея.

Максвелл отмечал, что установленные им законы являются «математическим выражением той идеи, которая лежала в основе хода мыслей Фарадея в его экспериментальных исследованиях».

Уравнения Максвелла для электромагнитных явлений аналогичны по своей значимости законам Ньютона в классической динамике.

Уравнения Максвелла связывают величины, характеризующие электромагнитное поле, с его источниками – распределенными в пространстве электрическими зарядами и токами.

В вакууме электромагнитное поле характеризуется напряженностью электрического поля **E** и магнитной индукцией **B** – векторными величинами, зависящими от пространственных координат **r** и времени t.

Эти величины определяют силы, действующие на заряды и токи, распределение которых задается плотностью заряда ρ и плотностью электрического тока **j** – плотность сил Лоренца и плотность сил Ампера:

$$\mathbf{f} = \frac{d\,\mathbf{F}}{dV} = \rho\mathbf{E} + \rho\left[\boldsymbol{v}, \mathbf{B}\right],$$

$$\mathbf{f} = \frac{d\,\mathbf{F}}{dV} = \left[\mathbf{j}, \mathbf{B}\right].$$

f – силы, действующие на элемент объема dV, в котором локализовано поле **E** и (или) **B**.

Для описания электромагнитных процессов в среде кроме вектора напряженности электрического поля **E** и вектора магнитной индукции **B** вводятся вспомогательные векторы.

Эти векторы зависят от состояния и свойств среды, – электрическая индукция **D** и напряженность магнитного поля **H**.

Уравнения Максвелла определяют основные характеристики электромагнитного поля (**E**,**B**,**D**,**H**) как функции координат и времени **r**, *t*, если известны распределения зарядов ρ и токов **j** в пространстве и их изменение во времени.

2. Уравнения Максвелла в интегральной – дифференциальной формах

Уравнения Максвелла могут быть записаны в интегральной и дифференциальной формах и определяют векторы (**E**,**B**,**D**,**H**) как функции источников поля – зарядов и токов.

Интегральные величины зависят от распределения характеристик поля – циркуляции векторов **E** и **H** вдоль произвольных замкнутых контуров и от потоков векторов **D** и **B** через произвольные замкнутые поверхности.

Интегральная форма записи ближе к идее дальнодействия – мгновенное взаимодействие, осуществляющееся через пустое пространство.

Эти две формы записи уравнений Максвелла хотя психологически и философски совершенно противоположны, но математически полностью эквивалентны.

Для доказательства этого необходимо уравнение Максвелла в интегральной форме записать для бесконечно малых произвольных контуров и поверхностей, а затем воспользоваться теоремами Стокса и Остроградского для перехода от объемных интегралов к поверхностным и от контурных к поверхностным.

В результате из интегральной формы записи уравнений Максвелла перейдем к дифференциальной.

Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной формах имеет вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\,\mathbf{l}) = \int_{(S)} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\,\mathbf{S} \qquad (1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}, d\,\mathbf{l}) = -\int_{(S)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\,\mathbf{S} \qquad (2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad \oint\limits_{(S)}(\mathbf{D}, d\,\mathbf{S}) = \int\limits_V \rho\, dV \qquad (3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \oint\limits_{(S)}(\mathbf{B}, d\,\mathbf{S}) = 0 \qquad (4)$$

Первое уравнение Максвелла является обобщением на случай переменных полей закона Био – Савара, описывающего возбуждения магнитного поля электрическими токами.

Максвелл обосновал гипотезу о возможности возбуждения магнитного поля не только токами **j**, текущими в проводниках, но и переменными электрическими полями в диэлектриках и вакууме.

Величина, пропорциональная скорости изменения электрического поля во времени, была названа Максвеллом током смещения

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial\,\mathbf{D}}{\partial t}$$

Полный ток, возбуждающий магнитное поле, равен сумме токов проводимости и смещения.

Первое уравнение Максвелла в интегральной форме говорит, что циркуляция вектора **H** по произвольному замкнутому контуру Г равна полному току, проходящему через произвольную поверхность S, ограниченную контуром Г.

Второе уравнение Максвелла служит математической формулировкой закона электромагнитной индукции Фарадея: циркуляция вектора напряженности электрического поля **E** по произвольному замкнутому контуру Г равна скорости изменения потока вектора магнитной индукции **B** через произвольную поверхность *S*, ограниченную контуром Г

Третье уравнение Максвелла, обычно называемое теоремой Гаусса и служит обобщением закона Кулона, описывающего взаимодействие неподвижных зарядов: поток вектора электрической индукции **D** через произвольную поверхность *S* равен электрическому заряду, находящемуся в объеме *V*, ограниченном поверхностью *S*.

Четвертое уравнение Максвелла говорит о том экспериментальном факте, что свободные магнитные заряды отсутствуют – поток вектора магнитной индукции **B** через произвольную замкнутую поверхность *S* равен нулю.

Этим объясняется и асимметрия уравнений Максвелла – отсутствие магнитных токов во втором уравнении и магнитных зарядов в четвертом.

Физический смысл уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной формах полностью эквивалентен.

Записанные четыре уравнения Максвелла не образуют замкнутой системы, позволяющей рассчитать электромагнитные процессы при наличии материальной среды, поскольку число неизвестных в этих уравнениях больше числа уравнений.

Эти уравнения следует дополнить соотношениями, связывающими векторы **D**, **E**, **H**, **B** и **j**. Связь между ними определяется свойствами среды и ее состояниями

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}),\ \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}),\ \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}).$$

Эти уравнения называются уравнениями состояния или материальными уравнениями. Вид этих уравнений определяется электрическими и магнитными свойствами среды.

В вакууме

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H},\ \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}),$$

причем ток проводимости может присутствовать и в вакууме, например в виде тока термоэлектронной эмиссии.

Уравнения поля и уравнения состояния образуют полную систему уравнений.

Для большинства изотропных сред, вплоть до сильных полей, уравнения состояния имеют простую линейную форму

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H},\ \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{стр}}.$$

Здесь ε – диэлектрическая а μ – магнитная проницаемость среды σ – удельная проводимость ; $\mathbf{j}_{стр}$ – плотность сторонних токов – токов, поддерживаемых любыми силами, кроме консервативных сил электрического поля, в частности, диффузией, магнитным полем.

Величины ε, μ, σ могут быть найдены экспериментально либо рассчитаны теоретически.

В общем случае уравнения состояния очень сложны и нелинейны.

Уравнения Максвелла в интегральной форме справедливы и при наличии поверхностей разрыва – границ сред, на которых свойства среды и полевые характеристики изменяются скачкообразно.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме следует дополнить соответствующими граничными условиями, позволяющими связать величины векторов (**E**,**B**,**D**,**H**) на границах раздела.

Взяв бесконечно малую цилиндрическую поверхность на границе раздела двух сред, по теореме Гаусса получаем для векторов электрической и магнитной индукции (рис. 1)

$$(n\mathbf{D})_2 - (n\mathbf{D})_1 = \sigma_{\text{пов}},$$

$$(n\mathbf{B})_2 - (n\mathbf{B})_1 = 0.$$

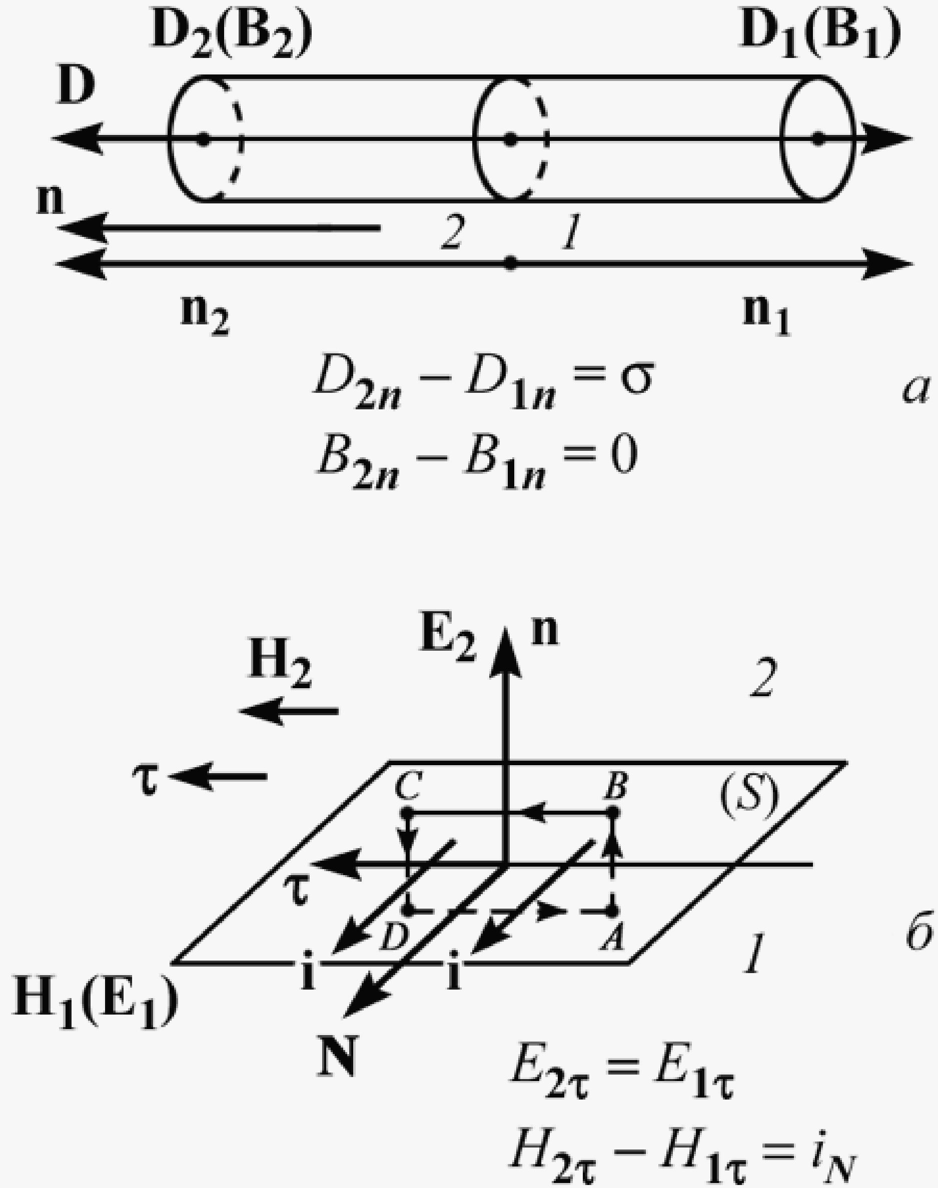
Соответственно по теореме о циркуляции для векторов **H** и **E** получаем

$$[\mathbf{n},\mathbf{E}]_2 - [\mathbf{n},\mathbf{E}]_1 = 0,$$

$$[\mathbf{n},\mathbf{H}]_2 - [\mathbf{n},\mathbf{H}]_1 = \mathbf{i}.$$

Здесь σ, **i** – поверхностная плотность заряда и тока; **n** – вектор нормали к поверхности в направлении от первой сферы ко второй, индексы относятся к разным сторонам границ раздела.

Рис. 1. К выводу граничных условий для уравнений Максвелла в дифференциальной форме: σ – поверхностная плотность свободных электрических зарядов на границе раздела (*а*); **i** – поверхностная плотность тока проводимости на рассматриваемой поверхности *S* (*б*).
D_{2n}, D_{1n}, B_{2n}, B_{1n} – проекции векторов $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_1$ на нормаль **n**.
H_{2t}, E_{2t}, H_{1t}, E_{1t} – тангенциальные составляющие векторов **H**, **E** вдоль нормали к контуру
N = = [**n**,τ]



В частности, когда на границах раздела нет поверхностных токов и зарядов $i = 0$, $\sigma = 0$, то можем записать

$$D_{1n} = D_{2n}, \qquad B_{1n} = B_{2n},$$

$$E_{1t} = E_{2t}, \qquad H_{1t} = H_{2t}$$

– на границах раздела не изменяются нормальные компоненты векторов индукции и тангенциальные – напряженностей.

В случае стационарных полей $\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$ уравнения Максвелла распадаются на две группы независимых уравнений.

Электростатики:

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho, \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$$

Магнитостатики:

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}.$$

В этом случае электрическое и магнитное поля независимы друг от друга.

Источниками электрических полей являются заряды, магнитных – токи проводимости.

Уравнения Максвелла для поля линейны.

Уравнения состояния, в общем случае, нелинейны.

Нелинейность уравнений состояний обычно проявляется в сильных полях.

В вакууме и линейных средах, удовлетворяющих условиям $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$, уравнения Максвелла линейны, и поэтому для них справедлив принцип суперпозиции – при наложении полей они не оказывают влияние друг на друга.

Поэтому поле, созданное совокупностью электрических зарядов и токов, равно сумме полей, создаваемых этими зарядами и токами по отдельности.

Как мы увидим в дальнейшем, уравнения Максвелла приводят к фундаментальному выводу о конечности скорости распространения электромагнитных взаимодействий.

Это означает, что при изменении плотности заряда или тока источников электромагнитного поля эти изменения на расстоянии R от источников скажутся лишь спустя конечное время $t = R/v$, где v – скорость распространения электромагнитных полей.

Вследствие конечности скорости распространения электромагнитных взаимодействий возможно существование электромагнитных волн, частным случаем которых являются световые волны.

Электромагнитные явления, как и все другие физические явления, должны удовлетворять принципу относительности.

В соответствии с этим принципом уравнения Максвелла не должны менять своей формы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Выполнение принципа относительности для электромагнитных процессов оказалось несовместимым с классическими представлениями о пространстве и времени как о независимых понятиях, где реализуется бесконечная скорость передачи взаимодействия.

Пересмотр этих представлений привел А. Эйнштейна к созданию специальной теории относительности.

Релятивистки инвариантная форма уравнений Максвелла подчеркивает тот факт, что электрическое и магнитное поля образуют единое электромагнитное поле.

Уравнения Максвелла описывают огромную область явлений.

Они лежат в основе электротехники и радиотехники и играют важнейшую роль в раскрытии таких актуальных направлений современной физики, как физика плазмы и проблема управляемого термоядерного синтеза, магнитная термодинамика, нелинейная оптика, конструирование ускорителей заряженных частиц, астрофизика и т.п.

Уравнения Максвелла неприменимы лишь при очень больших частотах электромагнитных волн, когда становятся существенными квантовые эффекты, т.е. когда энергия отдельных квантов электромагнитного поля – фотонов – велика и в процессах участвует сравнительно небольшое число фотонов.