7. ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА.
ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА

7.1. Теория тяготения Ньютона

7.2. Поле тяготения. Напряженность гравитационного поля

7.3. Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения

7.4. Масса инертная и масса гравитационная

7.5. Законы Кеплера. Космические скорости

7.1. Теория тяготения Ньютона

Рассмотримболее подробно гравитационные силы – один из видов фундаментальных сил.

Первые высказывания о тяготении как о всеобщем свойстве материи относится к античности. В XVI – XVII вв. в Европе возродились попытки доказать существование взаимного тяготения тел. Немецкий астроном И. Кеплер говорил, что «тяжесть есть взаимное стремление всех тел». Классическая формулировка ***закона всемирного тяготения*** была дана

И. Ньютоном в 1687 году в его труде «Математические начала натуральной философии».

Согласно этому закону, ***сила, с которой два тела притягиваются друг друга, пропорциональна произведению масс этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними***

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (7.1.1)$$

где γ – коэффициент пропорциональности, называемый *гравитационной постоянной.*

В данном случае тела, о которых шла речь, представляют собой очевидно, материальные точки. Надо помнить, что силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела.

Для определения силы взаимодействия тел, которые не могут рассматриваться как материальные точки, их нужно разбить на элементарные массы Δm, каждую из которых можно было бы принять за материальную точку (рисунок 7.1).

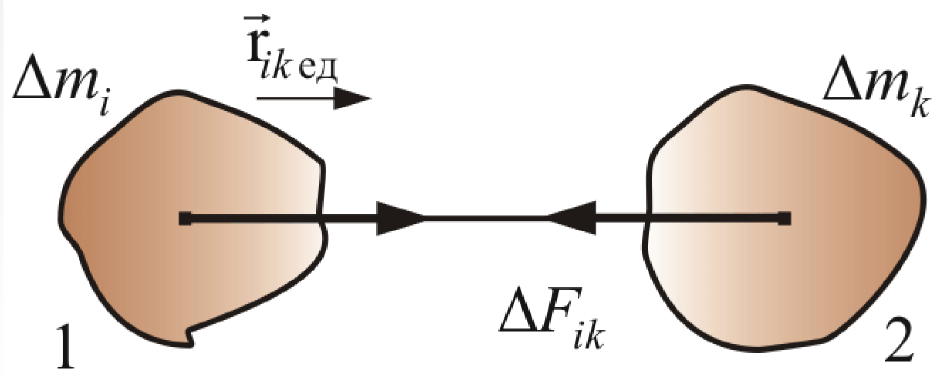


Рисунок 7.1

Тогда *i*-ая элементарная масса тела 1 притягивается к *k*-ой элементарной массе тела 2 с силой

$$\Delta\vec{F}_{ik} = \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2}\vec{r}_{ik\,ед} \qquad (7.1.2)$$

где $\vec{r}_{ik\,ед}$ – единичный вектор (орт) направленный от Δmi к Δmk.

Просуммировав последнее выражение по всем значениям *k*, получим результирующую всех сил, действующую со стороны тела 2 на принадлежащую телу 1 элементарную массу $\Delta m i$

$$\Delta\vec{\mathrm{F}}_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \vec{\mathrm{r}}_{ik\,\text{ед}} \qquad (7.1.3)$$

Наконец, просуммировав полученное выражение по всем значениям индекса *i*, то есть, сложив силы, приложенные ко всем элементарным массам первого тела, получим силу, с которой тело 2 действует на тело 1.

$$\vec{F}_{12} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma\frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2}\vec{r}_{ik\text{ед}} \qquad (7.1.4)$$

Суммирование производилось по всем значениям *i* и *k*, следовательно, если тело 1 разбить на *n*1, а тело 2 на *n*2 элементарных масс, то сумма будет содержать $n_1 \cdot n_2$ слагаемых.

Практически суммирование сводиться к интегрированию и является довольно сложной математической задачей.

Если взаимодействующие тела представляют собой однородные шары, то вычисление последней суммы приводит к следующему результату:

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_{12}, \qquad (7.1.5)$$

где *r* – расстояние между центрами шаров, $\vec{r}_{12}$ – единичный вектор от центра шара 1 к центру шара 2.

Таким образом, в упрощенном варианте, шары действуют как материальные точки, помещенные в их центры и имеющие их массы.

Если одно из тел представляет собой шар очень больших размеров радиуса *R* (Земной шар), а второе тело имеет размеры гораздо меньше *R* и находится вблизи поверхности большого шара, то их взаимодействие описывается последней формулой, где $r = R$

Физический смысл гравитационной постоянной в том, что она равна силе в 6,67·10–11 Н*, с которой два тела массой* 1 кг *каждое, центры которых отдалены на расстояние* 1 м*, взаимно притягиваются друг к другу.*

Гравитационная постоянная γ, была определена впервые Генри Кавендишем в 1798 г. с помощью изобретенных им крутильных весов.

Наиболее точным, из определенных опытным путём, считается значение

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

Размерность гравитационной постоянной:

$$[\gamma] = \frac{[F][r^2]}{[m^2]} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} = \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}.$$

7.2. Поле тяготения. Напряженность гравитационного поля

Закон всемирного тяготения, устанавливая зависимость силы тяготения от масс взаимодействующих тел и расстояния между ними, не даёт ответа на вопрос о том, *как* осуществляется это взаимодействие.

Тяготение (*гравитационное взаимодействие*), в отличие от таких механических взаимодействий как удар, трение и т.д., принадлежит к особой группе взаимодействий.

Оно *проявляется между телами, удаленными друг от друга. Причем сила тяготения не зависит от того, в какой среде эти тела находятся.* Тяготение существует и в вакууме.

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью ***поля тяготения*** (***гравитационного поля***)*.*

Физики до XIX века считали, что абсолютно пустого пространства не существует, что все заполнено какой-то средой, например, мировым эфиром, через который и осуществляется взаимодействие.

Однако к XX веку выяснилось, что нет никакого эфира, через который якобы передается взаимодействие. Современная физика говорит, что *силовые взаимодействия осуществляются полями,* то есть тело 1 возбуждает в окружающем пространстве силовое поле, которое в месте нахождения тела 2 проявляется в виде действующих на него сил. В свою очередь тело 2 возбуждает аналогичное силовое поле, действующее на тело 1.

Поле *это объективная реальность, посредством которой передаётся взаимодействие.* ***Поле****, наряду с* ***веществом,*** *является одним из* ***видов материи.***

Итак, гравитационное поле порождается телами и, так же как вещество и другие физические поля (например, электромагнитное), является одной из форм материи.

Основное свойство поля тяготения, которое отличает его от других полей, состоит в том, что на любую материальную точку массой m, внесенную в это поле, действует сила притяжения F, пропорциональная m: $\vec{F} = m\vec{G}$ Отсюда

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}, \qquad (7.2.1)$$

где $\vec{G}$ – вектор не зависящий от *m* и названый ***напряженностью поля тяготения***.

Вектор напряженности $\vec{G}$ *численно равен силе, действующей со стороны поля на материальную точку единичной массы, и совпадает с этой силой по направлению.*

Вектор напряженности является силовой характеристикой гравитационного поля и изменяется при переходе от одной точки поля к другой.

Поле тяготения является ***центральным*** *и* ***сферически симметричным****.*

Поле называется ***центральным***, *если во всех его точках векторы напряжённости направлены вдоль прямых, которые пересекаются в одной и той же точки О неподвижной относительно какой либо инерционной системы отсчета. Точка О называется центром сил*.

Центральное поле называют ***сферически симметричным*** *если, численное значение вектора напряженности зависит только от расстояния r до центра сил О*: $G = G(r)$.

При наложении нескольких полей тяготения, напряженность результирующего поля равна векторной сумме напряженностей всех этих полей:

$$\vec{G} = \sum \vec{G}$$

Этот принцип вытекает из принципа независимости действия сил и называется *принцип суперпозиции* (*наложения полей*).

7.3. Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения

Силы тяготения являются консервативными. Это значит, что работа в поле этих сил пропорциональна произведению масс m и M материальных точек и зависит только от начального и конечного положения этих точек. Покажем это на простом примере (рисунок 7.2).

Определим работу, совершенную силами поля тяготения при перемещении в нём материальной точки массой m (работу по удалению материальной точки массой m от Земли массой M на расстояние r).

На данную точку в положении 1 действует сила $F = \gamma mM / r^2$

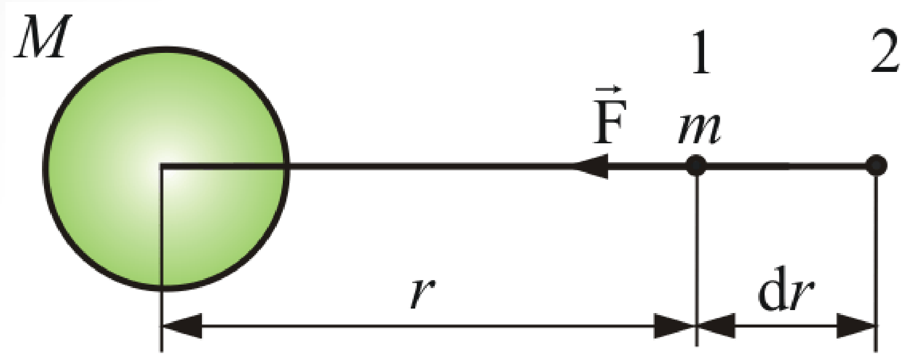


Рисунок 7.2

При перемещении этой точки на расстояние d*r*, совершается работа

$$\mathrm{d}A = -\gamma \frac{mM}{r^2} \mathrm{d}r$$

(знак минус показывает, что сила и перемещение противоположны). Тогда общая работа:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}A = -\int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mM}{r^2} \mathrm{d}r = m\left(\gamma \frac{M}{r_2} - \gamma \frac{M}{r_1}\right). \qquad (7.3.1)$$

Из этой формулы вытекает, что затраченная работа не зависит от траектории, а зависит лишь от координат точки.

Работа консервативных сил при перемещении точки m вдоль произвольного, замкнутого контура L тождественно равна нулю:

$$\oint_L \vec{F}, d\vec{r} \equiv 0 \quad \text{или} \quad \oint_L \vec{G}, d\vec{r} \equiv 0 \qquad (7.3.2)$$

Эти интегралы называются *циркуляцией* соответствующих векторов $\vec{F}$ и $\vec{G}$ вдоль замкнутого контура. Равенство нулю этих циркулирующих векторов является *необходимым и достаточным* признаком консервативности силового поля $\vec{F}$

Из (7.3.1) следует, что *работа A*, *совершенная консервативными силами, равна уменьшению потенциальной энергии системы*.

В нашем случае работа равна уменьшению потенциальной энергии U материальной точки, перемещающейся в поле тяготения.

$$A_{12} = -\Delta U = U_1 - U_2 \text{ или } \mathrm{d}A = -\mathrm{d}U \quad (7.3.3)$$

В случае поля тяготения создаваемого материальной точкой с массой *M*.

$$U_1 - U_2 = -\gamma mM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad (7.3.4)$$

При рассмотрении гравитационного поля Земли, формулу (7.3.4) можно переписать в виде:

$$U - U_з = mgR_з^2\left(\frac{1}{R_з} - \frac{1}{r}\right). \qquad (7.3.5)$$

На рисунке 7.3 показана зависимость гравитационной потенциальной энергии от расстояния до центра Земли.

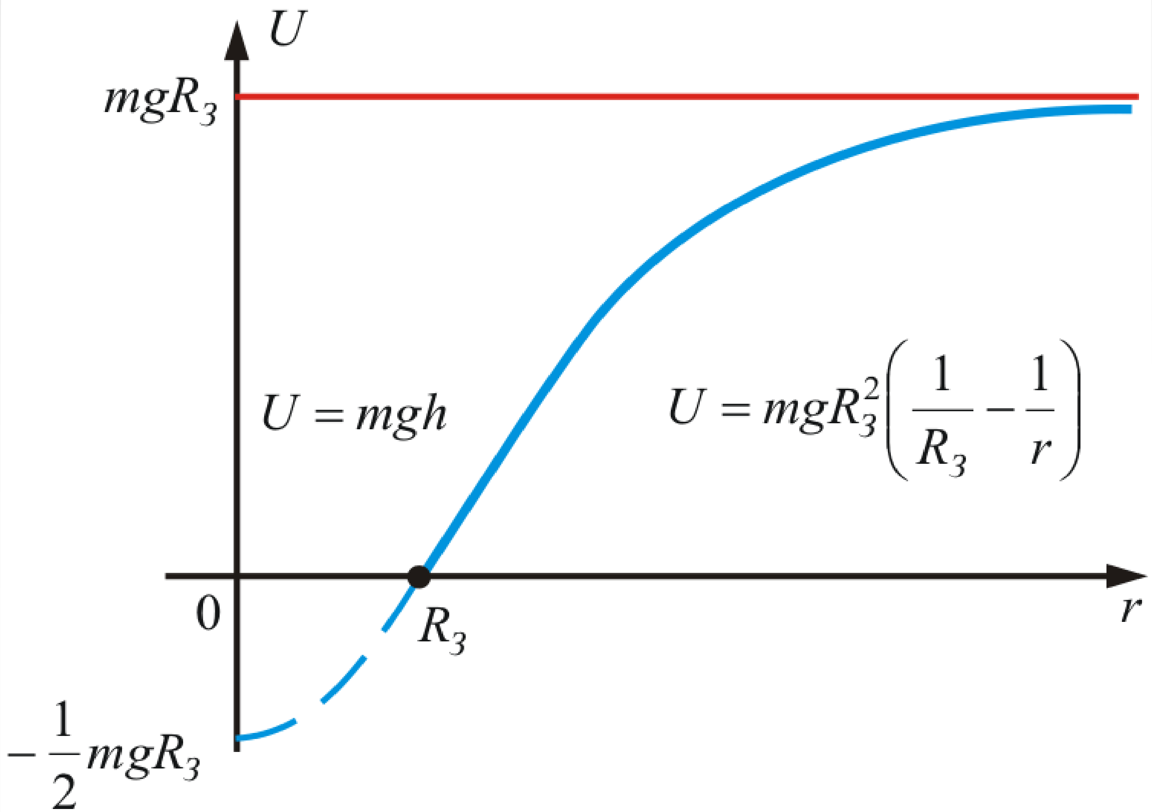


Рисунок 7.3

Принято считать, что потенциальная энергия на поверхности Земли равна нулю. Штрихованной линией показана потенциальная энергия внутри Земли.

При $r = 0: U - U_з = -\frac{1}{2} mgR_з.$

Если условиться считать, что потенциальная энергия точки *m* стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от источника поля точки *M*, тогда

$$\lim_{r_2 \to \infty} U = 0 \quad \text{и} \quad U_1 = -\gamma \frac{mM}{r_1}$$

или, в силу произвольности выбора точки 1,

$$U = -\gamma \frac{mM}{r}$$

Величину *U* называют *взаимной* потенциальной энергией обеих точек.

Величина φ*, равная отношению потенциальной энергии материальной точки в поле тяготения к массе m:*

$$\phi = \frac{U}{m} = -\sum_{i=1}^{n} \gamma \frac{m_i}{r_i} \qquad (7.3.6)$$

является энергетической характеристикой самого поля тяготения и называется ***потенциалом поля тяготения.***

По аналогии с электростатическим полем, роль заряда здесь выполняет масса *m*.

Потенциал поля тяготения, создаваемый одной материальной точкой с массой *M*,

равен $\phi = -\gamma \dfrac{M}{r}$,

где *r* – расстояние от этой точки до рассматриваемой точки поля.

Из сопоставления двух последних, соотношений следует

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \qquad (7.3.7)$$

т.е. потенциал в некоторых точках поля, являющегося результатом наложения полей, равен сумме потенциалов в этой точке, соответствующих каждому из полей в отдельности (*принцип суперпозиции*).

Между двумя характеристиками поля тяготения: его напряженностью и потенциалом существует взаимосвязь.

Вектор напряженности $\vec{G} = \dfrac{\vec{F}}{m}$

может быть выражен как градиент скалярной функции гравитационного потенциала φ :

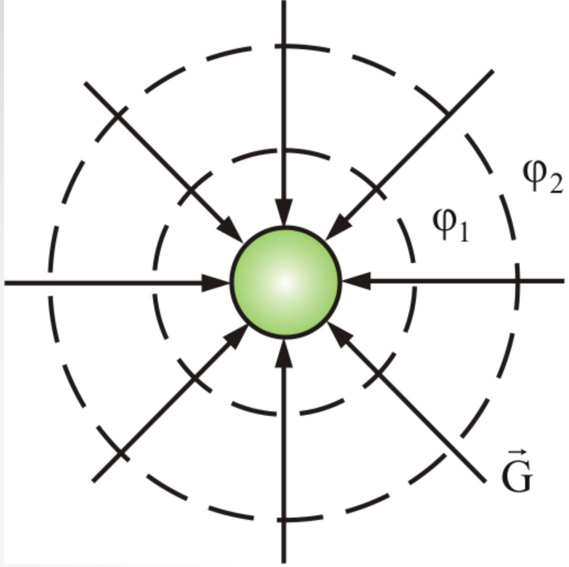
$$\vec{G} = -\mathrm{grad}\phi.$$

Знак минус показывает, что в каждой точке поля тяготения, вектор напряженности $\vec{G}$ направлен в сторону *наиболее быстрого убывания потенциала*. Здесь

$$\mathrm{grad}\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

– вектор, называемый градиентом потенциала.

Гравитационное поле можно изобразить с помощью силовых линий и эквипотенциальных поверхностей (рисунок 7.4).



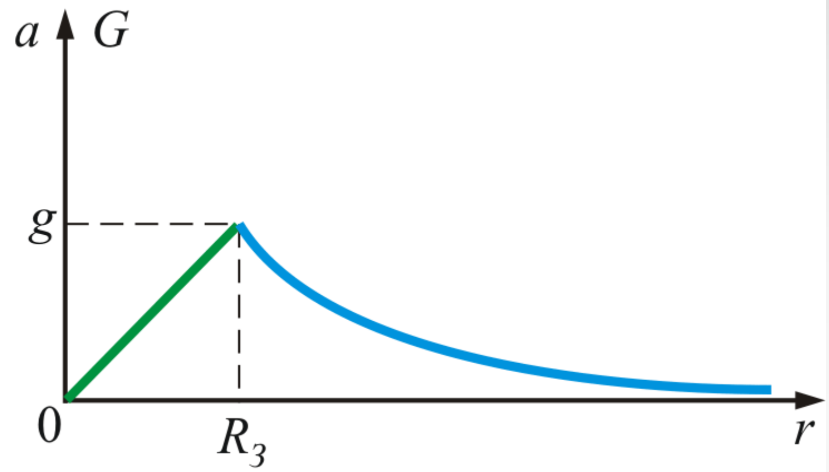


Рисунок 7.4 Рисунок 7.5

Эквипотенциальные поверхности – *геометрическое место точек с одинаковым потенциалом*. Линии напряженности $\vec{G}$ (*силовые линии поля*) всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

Графическая зависимость напряженности гравитационного поля Земли (и ускорения *a*) от расстояния до центра Земли изображена на рисунке 7.5.

Из рисунка видно, что внутри Земли $\vec{G}$ растет пропорционально *r*, а вне Земли

Убывает $\sim \dfrac{1}{r^2}$ Так же и ускорение: $a = \dfrac{gr}{R_з}$

– внутри Земли $a = \dfrac{gR_з^2}{r^2}$ - вне Земли.

Закон всемирного тяготения и механика Ньютона явились величайшим достижением естествознания.

Они с большой точностью описывают обширный круг явлений, в том числе движение в иных системах небесных тел: двойных звезд, в звездных скоплениях, галактиках. На основе теории тяготения Ньютона было предсказано существование планеты Нептун, спутников Сириуса и др. В астрономии закон тяготения Ньютона является фундаментом, на основе которого вычисляются движение, строение и эволюция небесных тел. Однако, в некоторых случаях, поле тяготения и движение физических объектов в полях тяготения не может быть описано законами Ньютона.

Сильные гравитационные поля и движения в них с большими скоростями $\upsilon \approx c$ описываются в общей теории относительности (ОТО), созданной А. Эйнштейном.

7.4. Масса инертная и масса гравитационная

Понятие «масса» фигурирует в двух разных законах: во втором законе Ньютона и в законе всемирного тяготения.

В первом случае она характеризует инертные свойства тела, во втором гравитационные свойства, то есть способность тел притягиваться друг к другу. В связи с этим возникает вопрос, не следует ли различать инертную массу *min* и массу гравитационную (или тяготеющую) m_g ?

Ответ на этот вопрос может дать только опыт.

Всякое тело вблизи поверхности Земли испытывает силу притяжения

$$F = \gamma \frac{m_g M}{R_з^2} = m_g g \tag{7.4.1}$$

Под действием этой силы тело приобретает ускорение:

$$a = \frac{F}{m_{in}} = \gamma \frac{M}{R_з^2} \frac{m_g}{m_{in}} = g \frac{m_g}{m_{in}} \tag{7.4.2}$$

Опыт показывает, что ускорение *a* для всех тел одинаково: $a = g$ следовательно, и $m_g = m_{in}$ Поэтому говорят просто о массе.

1867 г. Ньютон доказал это равенство с точностью до 10–3.

1901 г. венгерский физик Этвеш получил такое совпадение с точностью до 10–8.

1964 г. американский ученый Дикке улучшил точность измерения в 300 раз.

Тождественность ***инерциальной*** *и* ***гравитационной масс*** *Эйнштейн положил в основу общей теории относительности.*

Следствием этого факта является то, что, находясь внутри закрытой кабины невозможно определить, чем вызвана сила mg, тем, что кабина движется с ускорением $a = g$ или действием притяжения Земли.

7.5. Законы Кеплера. Космические скорости

Еще в глубокой древности было замечено, что в отличие от звезд, которые неизменно сохраняют свое взаимное расположение в пространстве в течение столетий, планеты описывают среди звезд сложнейшие траектории. Для объяснения петлеобразного движения планет древнегреческий ученый К. Пталомей (II н. э.), считая Землю расположенной в центре Вселенной, предположил, что каждая из планет движется по малому кругу (эпициклу), центр которого равномерно движется по большому кругу, в центре которого находится Земля. Эта концепция получила название *пталомеевой или геоцентрической системой мира.*

В начале XVI века польским астрономом Н. Коперником (1473 – 1543) обоснована *гелиоцентрическая система*, согласно которой движения небесных тел объясняются движением Земли (а также других планет) вокруг Солнца и суточным вращением Земли.

Теория наблюдения Коперника воспринимались как занимательная фантазия. В XVI в. это утверждение рассматривалось церковью как ересь. Известно, что Джордано Бруно, открыто выступивший в поддержку гелиоцентрической системы Коперника, был осужден инквизицией и сожжен на костре.

Однако к началу XVII столетия большинство ученых убедилось в справедливости гелиоцентрической системы мира. Иоганн Кеплер, обработав результаты многочисленных наблюдений, проведенных Тихо Браге (которого называют «человеком, измерившим небо»), получил законы движения планет вокруг Солнца.

Кеплер Иоганн (1571 – 1630) – немецкий ученый, один из творцов небесной механики. Работы в области астрономии, механики, математике. Используя наблюдения Тихо Браге и свои собственные, открыл законы движения планет (три закона Кеплера). Известен как конструктор телескопа (так называемая зрительная труба Кеплера, состоящая из двух двояковыпуклых линз).

Закон всемирного тяготения был открыт Ньютоном на основе трех законов Кеплера.

Первый закон Кеплера. *Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце* (рисунок 7.6).

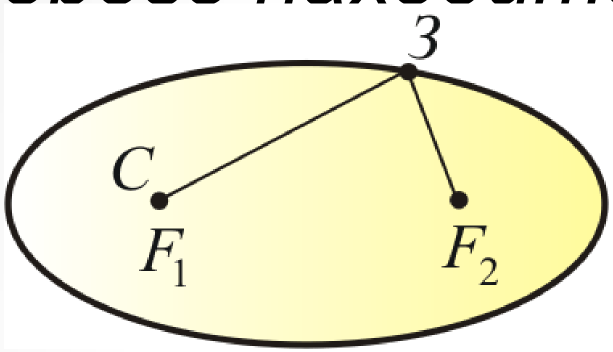


Рисунок 7.6

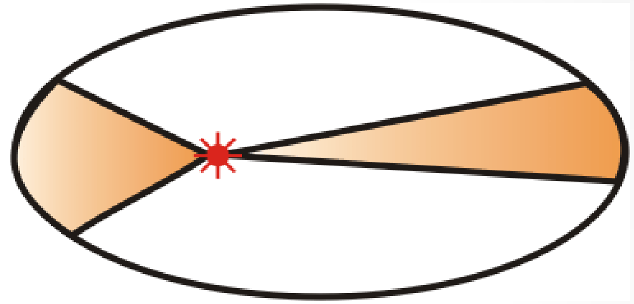


Рисунок 7.7

Второй закон Кеплера. *Радиус-вектор планеты описывает в равные времена равные площади* (рисунок 7.7).

Третий закон Кеплера. *Квадраты времен обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит.*

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3. \qquad (7.5.1)$$

Почти все планеты (кроме Плутона) движутся по орбитам, близким к круговым. Для круговых орбит первый и второй законы Кеплера выполняются автоматически, а третий закон утверждает, что $T^2 \sim R^3$ (*T* – период обращения; *R* – радиус орбиты).

Ньютон решил *обратную задачу механики* и из законов движения планет получил выражение для гравитационной силы

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2}. \qquad (7.5.2)$$

Как мы уже говорили, гравитационные силы являются силами *консервативными.* При перемещении тела в гравитационном поле консервативных сил по замкнутой траектории работа равна нулю.

Свойство консервативности гравитационных сил позволило нам ввести понятие *потенциальной энергии.*

Потенциальная энергия тела массы m, расположенного на расстоянии r от большого тела массы M, есть

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r}. \qquad (7.5.3)$$

Здесь знак минус указывает, что гравитационные силы являются силами притяжения.

Если тело находится в гравитационном поле на некотором расстоянии *r* от центра тяготения и имеет некоторую скорость υ, его полная механическая энергия равна

$$E = K + U = \frac{m\upsilon^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r} = \text{const}. \qquad (7.5.4)$$

Таким образом, в соответствии с законом сохранения энергии *полная энергия тела в гравитационном поле остается неизменной*.

Полная энергия может быть положительной и отрицательной, а также равняться нулю. Знак полной энергии определяет характер движения небесного тела.

При $E < 0$ тело не может удалиться от центра притяжения на расстояние $r_0 > r_{max}$

В этом случае небесное тело движется по *эллиптической орбите* (планеты Солнечной системы, кометы).

Период обращения небесного тела по эллиптической орбите равен периоду обращения по круговой орбите радиуса *R*, где *R* – большая полуось орбиты.

При $E = 0$ тело движется по *параболической траектории.* Скорость тела на бесконечности равна нулю.

При $E > 0$ движение происходит по *гиперболической траектории.* Тело удаляется на бесконечность, имея запас кинетической энергии.

Первой космической скоростью *называется скорость движения тела по круговой орбите вблизи поверхности Земли.*

Для этого, как следует из второго закона Ньютона, центробежная сила должна уравновешиваться гравитационной силой:

$$\frac{m\upsilon_1^2}{R_з} = \gamma \frac{Mm}{R_з^2} = gm,$$ отсюда

$$\upsilon_1 = \sqrt{gR_з} \approx 7{,}9 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Второй космической скоростью *называется скорость движения тела по параболической траектории. Она равна минимальной скорости, которую нужно сообщить телу на поверхности Земли,* *чтобы оно, преодолев земное притяжение, стало искусственным спутником Солнца* (*искусственная планета*). Для этого необходимо, чтобы кинетическая энергия была не меньше работы по преодолению тяготения Земли

$$E = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \gamma\frac{Mm}{R} = 0,$$ отсюда

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gR} \approx 11{,}2 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Третья космическая скорость *– скорость движения, при которой тело может покинуть пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца*

$$\upsilon_з = 16{,}7 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$