3. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

3.1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы

3.2. Масса и импульс тела

3.3. Второй закон Ньютона. Принцип суперпозиции

3.4. Третий закон Ньютона

3.5. Импульс произвольной системы тел

3.6. Основное уравнение динамики поступательного движения произвольной системы тел

3.7. Закон сохранения импульса

3.8. Движение центра масс

3.9. Реактивное движение тел переменной массы

3.1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы

В основе так называемой классической или ньютоновской механики лежат три закона динамики, сформулированных И. Ньютоном в 1687 г. Эти законы играют исключительную роль в механике и являются (как и все физические законы) обобщением результатов огромного человеческого опыта.

Законы Ньютона рассматривают как *систему взаимосвязанных законов* и опытной проверке подвергают не каждый отдельный закон, а всю систему в целом. Ньютоновская механика оказалась настолько плодотворной, настолько могущественной, что у физиков сложилось представление о том, что любое физическое явление можно объяснить с помощью ньютоновских законов.

Большинство физиков к концу XIX в. было убеждено в том, что они уже знают о природе всё, что можно было узнать. Однако наиболее проницательные физики понимали, что в знании классической физики есть слабые места. Так, например, английский физик У. Томсон (он же лорд Кельвин) говорил, что на горизонте безоблачного неба классической физики имеются два тёмных облачка: неудача попыток создания теории абсолютно чёрного тела и противоречивое поведение эфира – гипотетической среды, в которой предполагалось распространение световых волн. Эти факты получили своё объяснение в новых теориях – специальной теории относительности и квантовой механике.

В специальной теории относительности, созданной А. Эйнштейном в 1905 г., подверглись радикальному пересмотру ньютоновские представления о пространстве и времени. Этот пересмотр привёл к созданию «механики больших скоростей» или, как её называют, *релятивистской механикой*. Новая механика не привела, однако, к полному отрицанию старой ньютоновской механики. Уравнение релятивистской механики, в пределе (для скоростей, малых по сравнению со скоростью света), переходят в уравнения классической механики. Таким образом, классическая механика вошла в релятивистскую механику как её частный случай и сохранила своё прежнее значение для описания движений, происходящих со скоростями, значительно меньше скорости света.

Аналогично обстоит дело и с соотношениями между классической и квантовой механикой, возникшей в 20-ых годах прошлого века в результате развития физики атома.

Уравнения квантовой механики также дают в пределе (для масс, больших по сравнению с массами атомов) уравнения классической механики. Следовательно, классическая механика вошла в квантовую механику в качестве её предельного случая.

Таким образом, развитие науки не перечеркнуло классическую механику, а лишь показало её ограниченную применимость. Классическая механика, основывающаяся на законах Ньютона, является механикой тел больших (по сравнению с массой атомов) масс, движущихся с малыми (по сравнению со скоростью света) скоростями.

Первый закон Ньютона: *всякая материальная точка* (*тело*) *сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит её* (*его*) *изменить это состояние.*

Оба названных состояния схожи тем, что ускорение тела равно нулю. Поэтому формулировке первого закона можно придать следующий вид: *скорость любого тела остаётся постоянной (в частности, равной нулю), пока воздействие на это тело со стороны других тел не вызовет её изменения.*

Стремление тела сохранить состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется ***инертностью***. Поэтому первый закон Ньютона называют *законом инерции.*

Механическое движение относительно, и его характер зависит от системы отсчёта. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчёта, а те системы, по отношению к которым он выполняется, называются *инерциальными системами отсчёта.* ***Инерциальной системой отсчёта*** *является такая система отсчёта, относительно которой материальная точка, свободная от внешних воздействий, либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно* (*т.е. с постоянной скоростью*).

Таким образом, *первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчёта.*

Опытным путём установлено, что инерциальной системой отсчёта можно считать гелиоцентрическую (звёздную) систему отсчёта (начало координат находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении определённых звёзд).

Система отсчёта, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальная, однако эффекты, обусловленные её неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца) при решении многих задач малы, и в этих случаях её можно считать инерциальной.

Из приведённых выше примеров легко понять, что *основным признаком инерциальной системы является отсутствие ускорения.*

Сущность первого закона Ньютона может быть сведена к трём основным положениям:

- *все тела обладают свойствами инерции*;
- *существуют инерциальные системы отсчёта, в которых выполняется первый закон Ньютона*;

- движение относительно. Если тело А движется относительно тела отсчета В со скоростью υ, то и тело В, в свою очередь, движется относительно тела А с той же скоростью, но в обратном направлении $\upsilon = -\upsilon'$

3.2. Масса и импульс тела

Воздействие на данное тело со стороны других тел вызывает изменение его скорости, т.е. сообщает данному телу ускорение.

Опыт показывает, что одинаковое воздействие сообщает разным телам разные по величине ускорения. *Всякое тело противится попыткам изменить его состояние движения.* Это свойство тел, как мы уже говорили, называется *инертностью* (следует из первого закона Ньютона).

Мерой инертности тела является величина, называемая ***массой****.*

Чтобы определить *массу* некоторого тела, нужно сравнить её с массой тела, принятого за *эталон массы* (или сравнить с телом уже известной массы).

Масса – величина ***аддитивная*** *(масса тела равна сумме масс частей, составляющих это тело).*

Система тел, взаимодействующих только между собой, называется ***замкнутой****.*

Рассмотрим замкнутую систему двух тел массами m_1 и m_2

Столкнём эти два тела (рисунок 3.1).

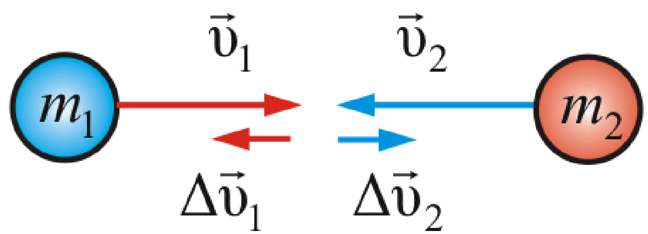


Рисунок 3.1

Опыт показывает, что приращённые скорости $\Delta\vec{\upsilon}_1$ и $\Delta\vec{\upsilon}_2$ всегда имеют противоположное направление (отличное знаком), а модули приращений скорости относятся как:

$$\frac{|\Delta\vec{\upsilon}_1|}{|\Delta\vec{\upsilon}_2|}=\frac{m_2}{m_1} \qquad (3.2.1)$$

(тело, обладающее большей массой, меньше изменяет скорость).

Приняв во внимание направление скоростей, запишем:

$$m_1\Delta\vec{\upsilon}_1=-m_2\Delta\vec{\upsilon}_2.$$

При $\upsilon \ll c$ масса $m=\mathrm{const}$ (ньютоновская, классическая механика), тогда имеем:

$$\Delta(m_1\vec{\upsilon}_1)=-\Delta(m_2\vec{\upsilon}_2).$$

Произведение массы тела m на скорость $\vec{\upsilon}$ *называется* ***импульсом тела*** $\vec{\mathrm{p}}$:

$$\vec{\mathrm{p}}=m\vec{\upsilon}. \qquad (3.2.2)$$

3.3. Второй закон Ньютона. Принцип суперпозиции

Математическое выражение ***второго закона Ньютона***:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{F}} \qquad (3.3.1)$$

скорость изменения импульса тела равна действующей на него силе.

Отсюда можно заключить, что $\mathrm{d}\vec{\mathrm{p}} = \vec{\mathrm{F}}\mathrm{d}t$ – *изменение импульса тела равно импульсу силы.*

Из (3.3.1), получим выражение второго закона через ускорение *a* :

$\dfrac{\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{F}}.$ т. к. $m = \mathrm{const}$ то $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{F}}.$ Но $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \vec{a},$

тогда $m\vec{a} = \vec{\mathrm{F}}$

Это привычная запись второго закона Ньютона ***или основное уравнение динамики поступательного движения материальной точки***.

Принцип суперпозиции или принцип независимости действия сил

Силы в механики подчиняются *принципу суперпозиции*. Если на материальное тело действуют несколько сил, то результирующую силу $\vec{F}$ можно найти из выражения:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \tag{3.3.3}$$

Из второго закона Ньютона, имеем

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{m} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i,$$

где $\vec{a}_i$ – ускорение тела, под действием силы $\vec{F}_i$. Отсюда,

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \tag{3.3.4}$$

Если на материальную точку действует несколько сил, то каждая из них сообщает точке такое же ускорение, как если бы других сил не было.

Найдем изменение импульса тела за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$

$$m\vec{\upsilon}_2 - m\vec{\upsilon}_1 = \vec{\mathrm{F}}\Delta t,$$ или

$$\Delta\left(m\vec{\upsilon}\right) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathrm{F}}\,\mathrm{d}t \qquad (3.3.5)$$

т.е., изменение импульса тела равно импульсу силы.

В системе СИ семь основных единиц (см. приложение): (м) – метр, (кг) – килограмм, (с) – секунда, (А) – ампер, (К) – кельвин, (кд) – кандела (единица силы света), (кмоль) – единица количества вещества. Остальные единицы называются ***производными*** и получаются из физических законов связывающих их с основными единицами. Например из второго закона Ньютона производная единица силы получается равной 1 кг·м/с2 = 1 Н.

3.4. Третий закон Ньютона

Действие тел друг на друга носит характер взаимодействия.

Третий закон Ньютона отражает тот факт, что сила есть результат взаимодействия тел, и устанавливает, что ***силы, с которыми действуют друг на друга два тела, равны по величине и противоположны по направлению.***

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} . \qquad (3.4.1)$$

Однако, третий закон справедлив не всегда. Он выполняется в случае контактных взаимодействий, т.е. при соприкосновении тел, а также при взаимодействии тел, находящихся на расстоянии друг от друга, но покоящихся друг относительно друга.

Законы Ньютона плохо работают при $\upsilon \approx c$ (релятивистская механика) а также, при движении тел очень малых размеров, сравнимых с размерами элементарных частиц. Так, например, нуклоны внутри ядра, кварки внутри нуклонов, и даже электроны внутри атома, не подчиняются законам Ньютона.

3.5. Импульс произвольной системы тел

Центр инерции или *центр масс* системы материальных точек называют такую точку *C* (рисунок 3.2), радиус-вектор которой:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i, \qquad (3.5.1)$$

где $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – общая масса системы, *n* – число точек системы.

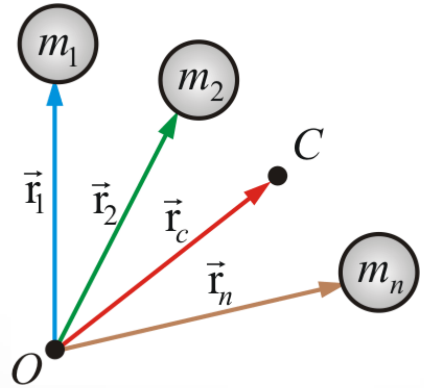


Рисунок 3.2

При этом не надо путать *центр масс* с центром *тяжести системы* – с точкой приложения равнодействующей сил тяжести всех тел системы.

Центр тяжести совпадает с центром масс (центром инерции), если *g* (ускорение силы тяжести) для всех тел системы одинаково (когда размеры системы гораздо меньше размеров Земли).

Скорость центра инерции системы $\vec{\upsilon}_c$ равна:

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i.$$

Здесь

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i \qquad (3.5.2)$$

– импульс системы тел, $\vec{\upsilon}_i$ – скорость *i*-го тела системы. Так как

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = m \vec{\upsilon}_c$$

то импульс системы тел можно определить по формуле

$$\vec{\mathrm{p}} = m \vec{\upsilon}_c \qquad (3.5.3)$$

***– импульс системы тел равен произведению массы системы на скорость её центра инерции*.**

3.6. Основное уравнение динамики поступательного движения произвольной системы тел

Тела, не входящие в состав рассматриваемой системы, называют ***внешними телами****, а силы, действующие на систему со стороны этих тел –* ***внешними силами****. Силы взаимодействия между телами внутри системы, называют* ***внутренними силами****.*

Результирующая всех внутренних сил действующих на *i*-ое тело:

$$\vec{F}_i^{\text{внутр.}} = \sum_{k \neq i}^{n} \vec{F}_{ik} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots + \vec{F}_{in},$$

где $k \neq i$ – т.к. *i*-ая точка не может действовать сама на себя.

Обозначим $\vec{\mathrm{F}}_i^{\text{внеш.}}$ – *результирующая всех внешних сил* приложенных к *i*-ой точке системы.

По второму закону Ньютона можно записать систему уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\vec{\upsilon}_1\right)=\vec{\mathrm{F}}_1^{\text{внеш.}}+\vec{\mathrm{F}}_{12}+\vec{\mathrm{F}}_{13}+\ldots+\vec{\mathrm{F}}_{1n},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\vec{\upsilon}_2\right)=\vec{\mathrm{F}}_2^{\text{внеш.}}+\vec{\mathrm{F}}_{21}+\vec{\mathrm{F}}_{23}+\ldots+\vec{\mathrm{F}}_{2n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\vec{\upsilon}_n\right)=\vec{\mathrm{F}}_n^{\text{внеш.}}+\vec{\mathrm{F}}_{n1}+\ldots+\vec{\mathrm{F}}_{n,n-1}.$$

Сложим эти уравнения и сгруппируем попарно силы $\vec{F}_{ik}$ и $\vec{F}_{ki}$:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{\upsilon}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\text{внеш.}}+\left(\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}\right)+\ldots+\left(\vec{F}_{n-1,n}+\vec{F}_{n,n-1}\right).$$

По третьему закону Ньютона, $\vec{F}_{ik}=-\vec{F}_{ki}$ поэтому все выражения в скобках в правой части уравнения равны нулю. Тогда остаётся:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{\upsilon}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\text{внеш.}}=\frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Назовем $\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\text{внеш.}}$ – *главным вектором всех внешних сил,* тогда:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}. \tag{3.6.1}$$

*Скорость изменения импульса системы равна главному вектору всех внешних сил, действующих на эту систему***.**

Это уравнение называют ***основным уравнением динамики поступательного движения системы тел***.

Так как импульс системы $\vec{\mathrm{p}} = m\vec{\upsilon}_c$ то

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\vec{\upsilon}_c\right) = \vec{\mathrm{F}}$$

Отсюда можно записать ***основное уравнение динамики поступательного движения системы тел*** в виде:

$$m\vec{a}_c = \vec{\mathrm{F}} \qquad (3.6.3)$$

Здесь $\vec{a}_c$ – ускорение центра инерции.

Центр механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, и на которую действует сила, равная главному вектору внешних сил, приложенных к системе.

На основании третьего закона Ньютона, силы, действующие на тела системы со стороны других тел системы (внутренние силы), взаимно компенсируют друг друга. Остаются только внешние силы.

В общем случае движение тела можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного со скоростью $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_c$ и вращательного вокруг *центра инерции.*

3.7. Закон сохранения импульса

Механическая система называется ***замкнутой*** (*или изолированной*), *если на неё не действуют внешние силы, т.е. она не взаимодействует с внешними телами.*

Строго говоря, каждая реальная система тел всегда не замкнута, т.к. подвержена, как минимум воздействию гравитационных сил. Однако если внутренние силы гораздо больше внешних, то такую систему можно считать замкнутой (например – Солнечная система).

Для замкнутой системы равнодействующий вектор внешних сил тождественно равен нулю:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \equiv 0, \qquad (3.7.1)$$

отсюда

$$\vec{\mathrm{p}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_c = \mathrm{const}. \qquad (3.7.2)$$

Это есть ***закон сохранения импульса****: импульс замкнутой системы не изменяется во времени.*

Импульс системы тел может быть представлен в виде произведения суммарной массы тел на скорость центра инерции: $\vec{\mathrm{p}} = m\vec{\upsilon}_c,$ тогда

$$m\vec{\upsilon}_c = \mathrm{const}. \qquad (3.7.3)$$

При любых процессах, происходящих в замкнутых системах, скорость центра инерции сохраняется неизменной.

Закон сохранения импульса является одним из основных законов природы. Он был получен как следствие законов Ньютона, но он справедлив и для микрочастиц и для релятивистских скоростей, когда $\upsilon \approx c$

Если система не замкнута, но главный вектор внешних сил $\vec{F} = 0$ **, то** $\vec{p}_{\text{сист.}} = \text{const},$ **как если бы внешних сил не было (например, прыжок из лодки или реактивное движение).**

Рассмотрим физическую систему, состоящую из двух взаимодействующих материальных точек массами m_1 и m_2 с координатами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

$$-\vec{F}_{12} = -m_1 \frac{d^2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{dt^2} = \vec{F}_{21} = m_2 \frac{d^2(\vec{r}_2 - \vec{r}_{1})}{dt^2}$$

Откуда следует соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = 0$$

– импульс системы двух взаимодействующих точек при отсутствии внешних сил остается постоянным:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const}.$$

Закон сохранения импульса есть следствие однородности пространства.

Третий закон Ньютона позволяет выполнить переход от описания движения отдельной материальной точки к механике системы материальных точек. Силы, действующие на материальные точки системы, можно разделить на внутренние и внешние. *Внутренние* – силы взаимодействия между материальными точками самой системы.

Внешние силы **– это силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела.**

Согласно третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_{jk}$ + $\mathbf{F}_{kj}$ = 0, поэтому геометрическая сумма всех внутренних сил равна нулю:

$$\mathbf{F}_{1(i)} + \mathbf{F}_{2(i)} + \ldots + \mathbf{F}_{n(i)} = 0$$

(*i* – intrinsic – внутренний), где $\mathbf{F}_{n(i)}$ – полная внутренняя сила, действующая на *n*-ю материальную точку. Пусть $\mathbf{F}_{1(e)}$, $\mathbf{F}_{2(e)}$,…, $\mathbf{F}_{n(e)}$ – внешние силы (*e* – extrinsic – внешний), действующие на материальные точки системы.

На основании второго закона Ньютона имеем

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_1^{(i)} + \mathbf{F}_1^{(e)}, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_2^{(i)} + \mathbf{F}_2^{(e)}, \ldots, \quad \frac{d\mathbf{p}_n}{dt} = \mathbf{F}_n^{(i)} + \mathbf{F}_n^{(e)}$$

Сложив эти уравнения, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots + \mathbf{p}_n\right) = \mathbf{F}_1^{(e)} + \mathbf{F}_2^{(e)} + \ldots + \mathbf{F}_n^{(e)}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)}$$

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{p}_k$$ - суммарный импульс всей системы,

$$\mathbf{F}^{(e)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^{(e)}$$

– равнодействующая всех внешних сил, действующих на систему.
Если геометрическая сумма всех внешних сил равна нулю, то

$$\frac{d\,\mathrm{p}}{dt} = 0$$

и, следовательно, **p** = const. То есть, **если геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то импульс системы сохраняется со временем.**

Закон сохранения импульса является фундаментальным законом природы, не знающим исключений. И он в этом смысле не является следствием законов Ньютона.

3.8. Движение центра масс

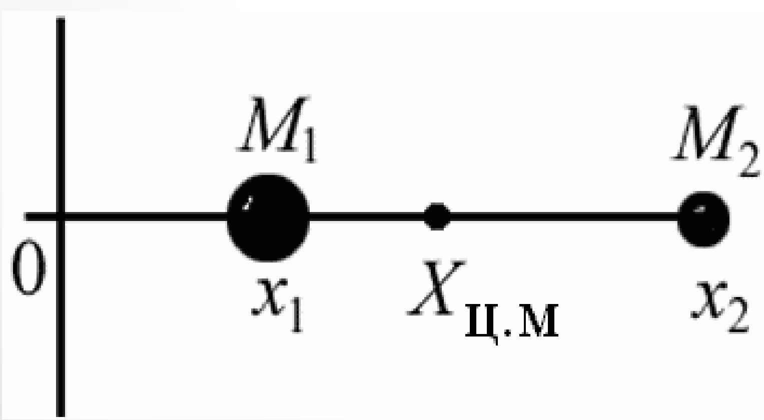
Пусть геометрическая сумма внешних сил, действующая на систему материальных точек отлична от нуля и движение описывается уравнением

$$\mathbf{F}^{(e)} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots + \mathbf{p}_n) = \frac{d^2}{dt^2}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_n\mathbf{r}_n).$$

Домножим и разделим правую часть этого равенства на $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ – общую массу системы

$$\mathbf{F}^{(e)} = m\frac{d^2\mathbf{R}_{\text{ц.м}}}{dt^2}, \mathbf{R}_{\text{ц.м}} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_n\mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

Воображаемая точка массой *m* с радиус-вектором Rц.м называется *центром масс* или *центром инерции* системы.



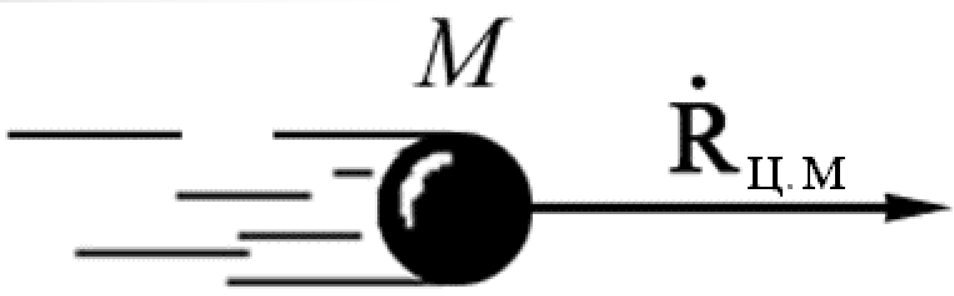
Две массы M_1 и M_2, расположенные на оси X в точках с координатами X_1 и X_2, обладают центром масс, расположенным в точке с координатой

$$X_{\text{ц.м}} = \frac{M_1x_1 + M_2x_2}{M_1 + M_2}$$

Центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы, а действующая сила равна геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему, – теорема о движении центра масс. Если система замкнута, то $\mathbf{F}^{(e)} = 0$. В этом случае имеем

$$\frac{d\mathbf{v}_{ц.м}}{dt} = 0, \quad \mathbf{v}_{ц.м} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \mathrm{const}$$

– центр масс замкнутой системы движется равномерно и прямолинейно. Это соотношение выражает замечательное свойство центра масс: **скорость центра масс постоянна в отсутствие внешних сил. .**



В отсутствие внешних сил скорость центра масс постоянна.

$$\dot{R}_{ц.м} = \mathrm{const}$$

3.9. Реактивное движение тел переменной массы

Принцип движения ракеты основан на законе сохранения импульса. Ракета с топливом представляет замкнутую систему. Сгорая, газы с большой скоростью истекают из сопла ракеты и воздействуют на ракету, сообщая ей ускорение. Импульс такой системы не изменяется со временем. Поэтому ракета должна начать двигаться в сторону, противоположную истечению газов.

Пусть $m(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $m\mathbf{v}(t)$ – масса, скорость и импульс ракеты в момент времени t. Спустя время dt масса ракеты уменьшится на dm, скорость увеличится на $d\mathbf{v}$, а импульс ракеты станет равным $(m - dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$. Импульс газов, образовавшихся за время dt, равен $\mathbf{v}_{\text{г}}\, dm_{\text{г}}$, где $\mathbf{v}_{\text{г}}$ – скорость истечения газов. Изменение импульса системы равно:

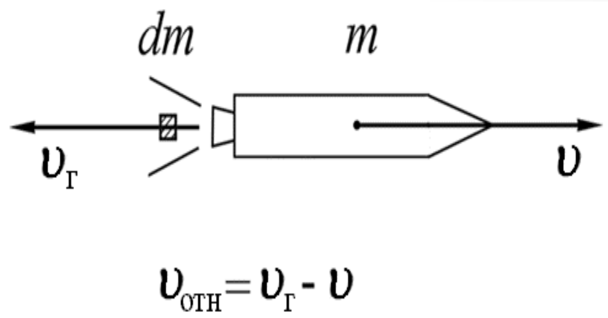
$$(m - dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + \mathbf{v}_{\text{г}}\, dm_{\text{г}} - m\mathbf{v} = \mathbf{F}dt.$$

Пусть на ракету не действуют внешние силы: **F** = 0. Уравнение движения ракеты примет в таком случае вид:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{v}_{\text{отн}}\frac{dm}{dt}$$

$\mathbf{v}_{г} - \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{отн}}$ – скорость газовой струи относительно ракеты

$$v = v_{\text{отн}} \ln\frac{m_0}{m}$$



или

$$\frac{m_0}{m} = \exp\left(\frac{v}{v_{\text{отн}}}\right)$$

.

Последнее соотношение получено К.Э. Циолковским (1857 – 1935) и называется **формулой Циолковского.**

Для сообщения ракете первой космической скорости v = 8 км/с, при скорости газовой струи $v_{\text{отн}}$ = 1 км/с необходимо (m_0/m) = 3000. Практически вся масса ракет приходится на топливо. При $v_{\text{отн}}$ = 2 км/с (m_0/m) = 55, а при $v_{\text{отн}}$ = 4 км/с (m_0/m) =7,4.