

6. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

6.1. Динамика вращательного движения твердого тела относительно точки

6.2. Динамика вращательного движения твердого тела относительно оси

6.3. Расчет моментов инерции некоторых простых тел. Теорема Штейнера

6.4. Кинетическая энергия вращающегося тела

6.5. Закон сохранения момента импульса

6.6. Законы сохранения и их связь с симметрией пространства и времени

6.7. Сходство и различие линейных и угловых характеристик движения

6.1. Динамика вращательного движения твёрдого тела относительно точки

Рассмотрим твёрдое тело, как некую систему (рисунок 6.1), состоящую из n точек ($m_1 m_2 \dots m_n$); \vec{r}_i – радиус-вектор i -ой точки, проведенный из точки O – центра неподвижной инерциальной системы отсчета. Обозначим \vec{F}_i – внешняя сила, действующая на i -ую точку, \vec{F}_{ik} – сила действия со стороны k -ой точки на i -ую.

Запишем основное уравнение динамики для точки (см. п. 3.6):

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i.$$

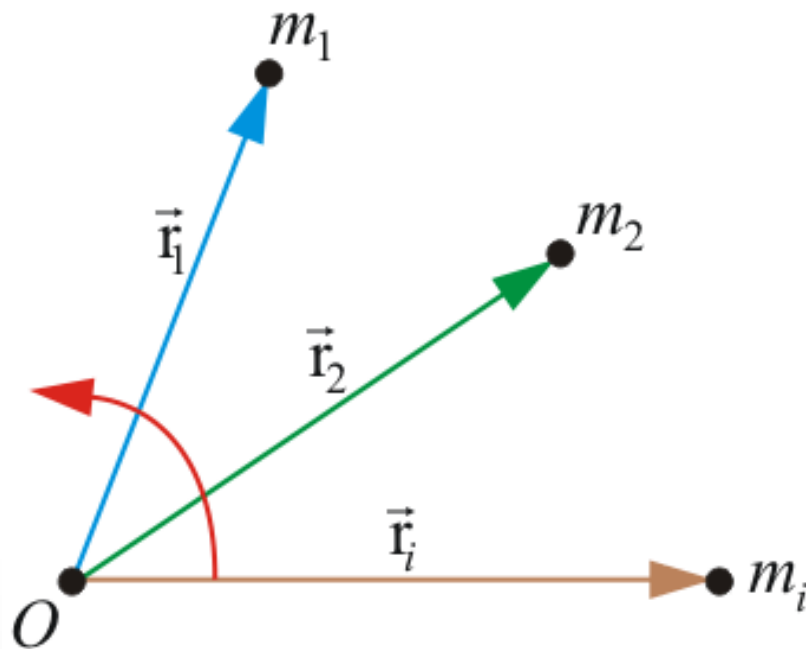


Рисунок 6.1

Умножим обе части векторно на \vec{r}_i

$$\left[\vec{r}_i, \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) \right] = \left[\vec{r}_i, \sum_k \vec{F}_{ik} \right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i \right].$$

Знак производной можно вынести за знак векторного произведения (и знак суммы тоже), тогда:

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i \right] = \sum_k \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik} \right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i \right].$$

Векторное произведение \vec{r} точки на её импульс называется **моментом импульса** \vec{L}_i этой точки относительно точки O .

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]. \quad (6.1.1)$$

Эти три вектора образуют правую тройку векторов, связанных «правилом буравчика» (рисунок 6.2).

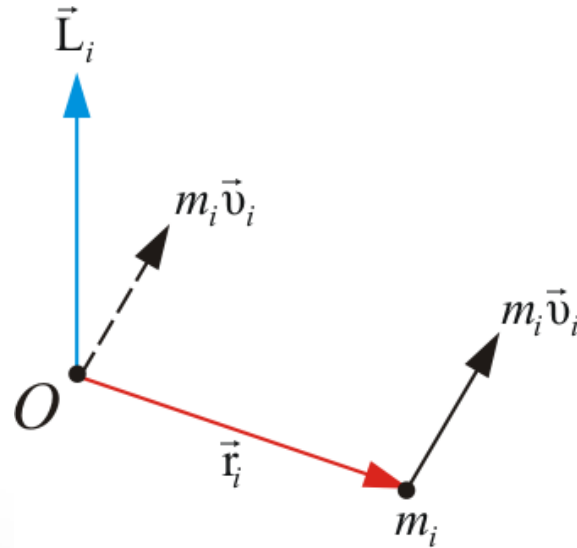


Рисунок 6.2

Векторное произведение \vec{r}_i проведенного в точку приложения сил, на эту силу называется **моментом силы** \vec{M}_i :

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i], \quad (6.1.2)$$

Обозначим l_i – плечо силы F_i , (рисунок 6.3).

Т.к $\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$ то

$$|\vec{M}_i| = F_i r_i \sin \alpha = F_i l_i, \quad (6.1.3)$$

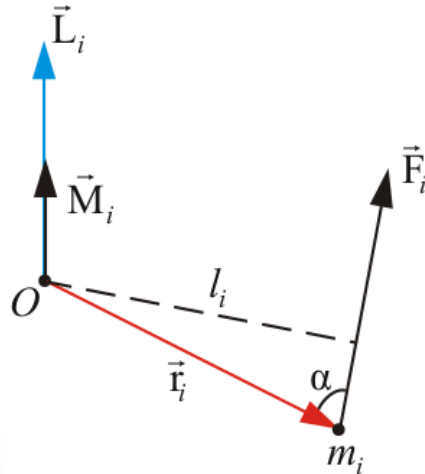


Рисунок 6.3

С учетом новых обозначений:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_{ik} + \vec{M}_i \quad (6.1.4)$$

Запишем систему n уравнений для всех точек системы и сложим, левые и правые части уравнений:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{M}_{ik} + \sum_{i=1}^n \vec{M}_i.$$

Здесь сумма производных равна производной суммы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt},$$

где \vec{L} – момент импульса системы,
 \vec{M} – результирующий момент всех
внешних сил относительно точки O .

Так как

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki} \quad \text{то} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{M}_{ik} = 0.$$

Отсюда получим основной закон динамики вращательного движения твердого тела, вращающегося вокруг точки.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}} \quad (6.1.5)$$

Момент импульса системы \vec{L} является основной динамической характеристикой вращающегося тела.

Сравнивая это уравнение с основным уравнением динамики поступательного движения (3.6.1), мы видим их внешнее сходство

6.2. Динамика вращательного движения твёрдого тела относительно оси

Описанное нами движение твёрдого тела относительно неподвижной точки является основным видом движения. Однако вычислить вектор \vec{L} – момент импульса системы относительно произвольной точки не просто: надо знать шесть проекций (три задают положение тела, три задают положение точки).

Значительно проще найти момент импульса \vec{L} тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (z) (рисунок 6.4).

В этом случае составляющие \vec{M} – момента внешних сил, направленные вдоль x и y , компенсируются моментами сил реакции закрепления.

Вращение вокруг оси z происходит только под действием \vec{M}_z

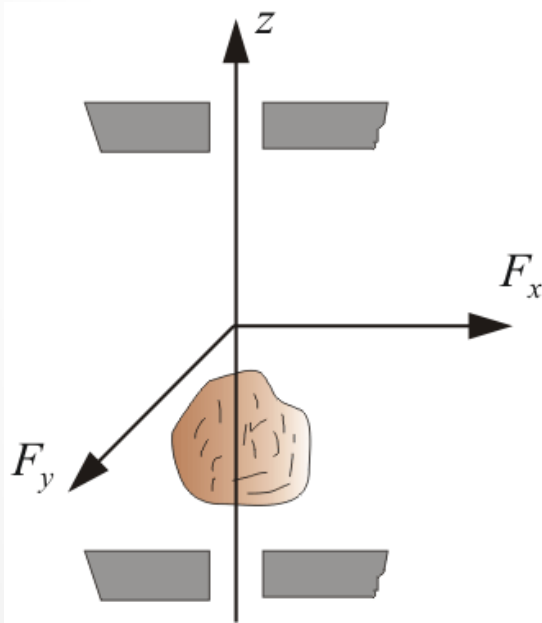


Рисунок 6.4

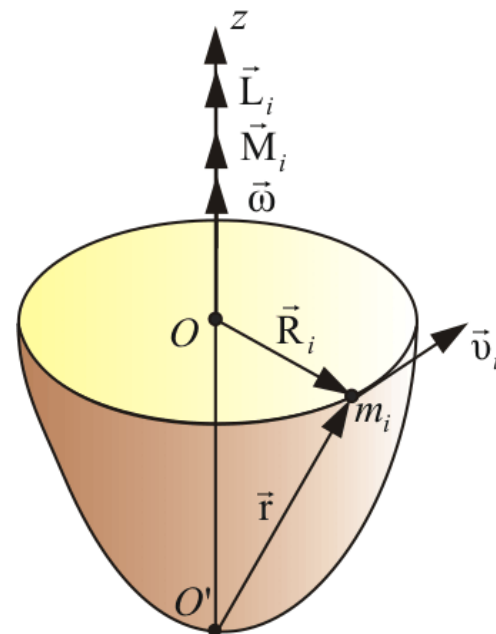


Рисунок 6.5

Пусть некоторое тело вращается вокруг оси z (рисунок 6.5).

Получим уравнение динамики для некоторой точки m_i этого тела находящегося на расстоянии R_i от оси вращения. При этом помним, что \vec{L}_z и \vec{M}_z направлены всегда вдоль оси вращения z , поэтому в дальнейшем опустим значок z .

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} [\vec{R}, m_i \vec{v}] = \vec{M}_i$$

Так как \vec{v}_i у всех точек разная, введем,
вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ причем $\omega = \frac{v}{R}$.

Тогда
$$\frac{d}{dt} (m_i R_i^2 \vec{\omega}) = \vec{M}_i$$

Так как тело абсолютно твердое, то в процессе вращения m_i и R_i останутся неизменными. Тогда:

$$m_i R_i^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_i.$$

Обозначим I_i – момент инерции точки находящейся на расстоянии R от оси вращения:

$$I_i = m_i R_i^2. \quad (6.2.1)$$

Так как тело состоит из огромного количества точек и все они находятся на разных расстояниях от оси вращения, то момент инерции тела равен:

$$I = \int_0^m R^2 dm, \quad (6.2.2)$$

где R – расстояние от оси z до dm .

Как видно, момент инерции I – величина скалярная.

Просуммировав (6.2.1) по всем i -ым точкам,

получим
$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M} \quad \text{или}$$

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M} \quad (6.2.3)$$

Это основное уравнение динамики тела вращающегося вокруг неподвижной оси. (Сравним: $m\vec{a} = \vec{F}$ – основное уравнение динамики поступательного движения тела).

$$I d\vec{\omega} = \vec{M} dt; \quad I d\vec{\omega} = d\vec{L}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (6.2.4)$$

Где \vec{L} – момент импульса тела вращающегося вокруг оси z
(Сравним: $\vec{p} = m\vec{v}$ – для поступательного движения).

При этом помним, что \vec{L} и \vec{M} динамические характеристики вращательного движения направленные всегда вдоль оси вращения. Причем, \vec{L} определяется направлением вращения, как и $\vec{\omega}$ а \vec{M} – зависит от того, ускоряется или замедляется вращение.

6.3. Расчет моментов инерции некоторых простых тел. Теорема Штейнера

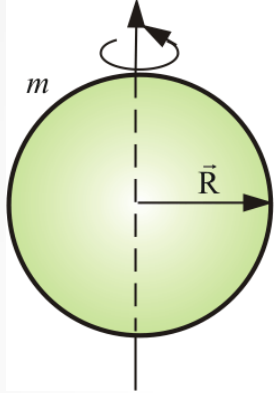
По формуле $I = \int_0^m R^2 dm$ не всегда

просто удастся рассчитать момент инерции тел произвольной формы.

Наиболее легко эта задача решается для тел простых форм, вращающихся вокруг оси, проходящей через центр инерции тела I_c . В этом случае, при вычислении I_c по формуле (6.2.3), появляется коэффициент k .

$$I_c = kmR^2$$

Момент инерции шара, диска, стержня приведены на рисунке 6.6.



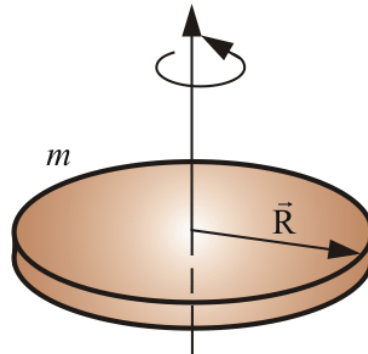
Шар

$$k = 2/5;$$

$$I_c = 2/5 \cdot m \cdot R^2;$$

Сфера

$$I_c = 2/3 \cdot m \cdot R^2;$$



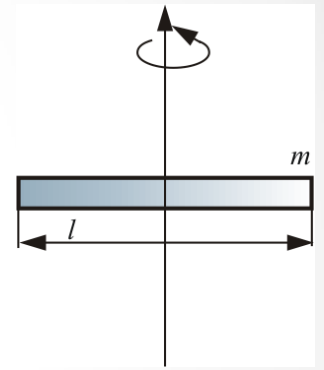
Диск

$$k = 1/2;$$

$$I_c = 1/2 \cdot m \cdot R^2;$$

Обруч

$$I_c = m \cdot R^2$$



Стержень

$$k = \frac{1}{12}$$

$$I_c = \frac{1}{12} \cdot ml^2$$

При вычислении момента инерции тела, вращающегося вокруг оси, не проходящей через центр инерции (рисунок 6.7), следует пользоваться *теоремой о параллельном переносе осей* или *теоремой Штейнера* (Якоб Штейнер, швейцарский геометр 1796 – 1863 г.).

$$I = I_c + md^2 \quad (6.3.1)$$

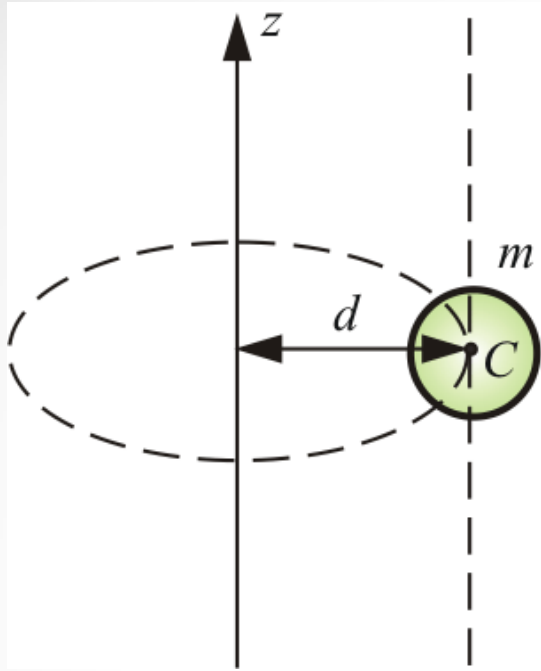


Рисунок 6.7

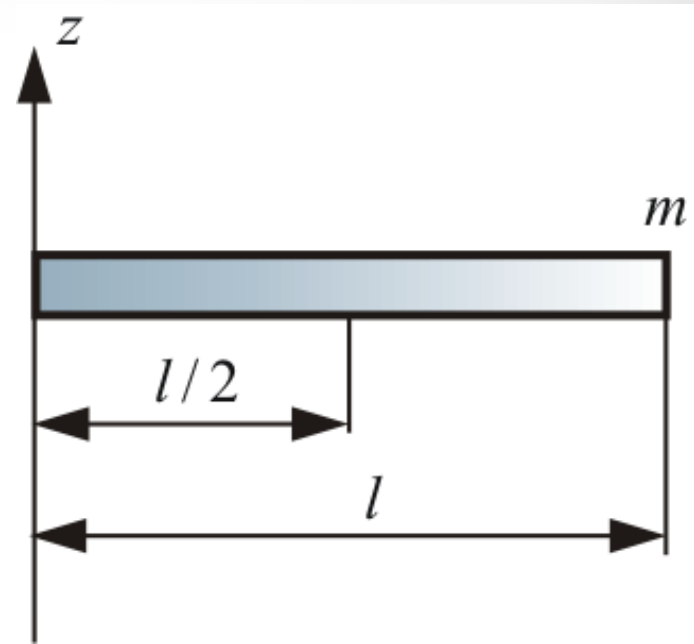


Рисунок 6.8

Например: стержень массой m , длиной l , вращается вокруг оси, проходящей через конец стержня (рисунок 6.8).

$$I_c = \frac{1}{12} ml^2$$

$$I_z = I_c + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} ml + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

6.4. Кинетическая энергия вращающегося тела

Кинетическая энергия – величина аддитивная, поэтому кинетическая энергия тела, движущегося произвольным образом, равна сумме кинетических энергий всех n материальных точек, на которое это тело можно мысленно разбить:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (6.4.1)$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью $\vec{\omega}$ то линейная скорость i -ой точки $\vec{v}_i = \vec{\omega} R_i$ R_i – расстояние до оси вращения.

Следовательно,

$$K_{\text{вращ.}} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \frac{I \omega^2}{2}. \quad (6.4.2)$$

Сопоставив (6.4.1) и (6.4.2) можно увидеть, что момент инерции тела I – является мерой инертности при вращательном движении. Так же как масса m – мера инерции при поступательном движении.

В общем случае движение твердого тела можно представить в виде суммы двух движений – поступательного со скоростью v_c и вращательного с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси, проходящей через центр инерции. Тогда полная кинетическая энергия этого тела:

$$K_{\text{полн.}} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2} \quad (6.4.3)$$

Здесь I_c – момент инерции относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр инерции.

6.5. Закон сохранения момента импульса

Для замкнутой системы тел момент внешних сил \vec{M} всегда равен нулю, так как внешние силы вообще не действуют на замкнутую систему.

Поэтому $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \equiv 0$ то есть

$$\vec{L} = \text{const}, \quad \text{или} \quad I\vec{\omega} = \text{const}$$

Закон сохранения момента импульса

– момент импульса замкнутой системы тел относительно любой неподвижной точки не изменяется с течением времени.

Это один из фундаментальных законов природы.

Аналогично для замкнутой системы вращающихся вокруг оси z :

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z \equiv 0, \text{ отсюда } \vec{L}_z = \text{const} \text{ или } I_z \vec{\omega} = \text{const}$$

Если момент внешних сил относительно неподвижной оси вращения тождественно равен нулю, то момент импульса относительно этой оси не изменяется в процессе движения.

Момент импульса и для незамкнутых систем постоянен, если результирующий момент внешних сил, приложенных к системе, равен нулю.

Очень нагляден закон сохранения момента импульса в опытах с уравновешенным гироскопом – быстро вращающимся телом, имеющим три степени свободы (рисунок 6.9).



Рисунок 6.9



Рисунок 6.10

Используется гироскоп в различных навигационных устройствах кораблей, самолетов, ракет (гироскоп, гироскоп, гироскоп). Один из примеров навигационного гироскопа изображен на рисунке 6.10.

Именно закон сохранения момента импульса используется танцорами на льду для изменения скорости вращения. Или еще известный пример – скамья Жуковского.

Изученные нами законы сохранения есть следствие симметрии пространства – времени.

Принцип симметрии был всегда путеводной звездой физиков, и она их не подводила.

Но вот в 1956 г. Ву Цзянь, обнаружил асимметрию в слабых взаимодействиях: ●

он исследовал β – распад ядер изотопа $\text{Co}60$ в магнитном поле и обнаружил, что число электронов, испускаемых вдоль направления магнитного поля не равно числу электронов испускаемых в противоположенном направлении.

В этом же году Л. Ледерман и Р. Гарвин (США) обнаружили нарушение симметрии при распаде пионов и мюонов.

Эти факты означают, что законы слабого взаимодействия, не обладают зеркальной симметрией.

-
-

6.6. Законы сохранения и их связь с симметрией пространства и времени

В предыдущих разделах нами были рассмотрены *три фундаментальных закона природы*: закон сохранения импульса, момента импульса и энергии. Следует понимать, что эти законы выполняются только в инерциальных системах отсчета. В самом деле, при выводе этих законов мы пользовались вторым и третьим законами Ньютона, а последние применимы только в инерциальных системах.

-

Напомним также, что импульс и момент импульса сохраняются в том случае, если систему можно считать *замкнутой* (сумма всех внешних сил, и собственно, всех моментов сил, равна нулю). Для сохранения же энергии тела условия замкнутости недостаточно – тело должно быть еще и *адиабатически изолированным* (т.е. не участвовать в теплообмене).

Во всей истории развития физики, законы сохранения оказались, чуть ли не единственными законами, сохранившими свое значение при замене одних теорий другими. Эти законы тесно связаны с основными свойствами пространства и времени.

*В основе закона сохранения энергии лежит **однородность времени**, т. е. равнозначность всех моментов времени (симметрия по отношению к сдвигу начала отсчета времени).*

Равнозначность следует понимать в том смысле, что замена моментом времени t_1 на момент времени t_2 , без изменения значений координат и скорости частиц не изменяет механические свойства системы. Это означает то, что после указанной замены, координаты и скорости частиц имеют в любой момент времени $t_2 + t$ такие же значения, какие имели до замены, в момент времени $t_1 + t$

2. В основе закона сохранения импульса лежит **однородность пространства**, т. е. одинаковость свойств пространства во всех точках (симметрия по отношению к сдвигу начала координат). Однородность следует понимать в том смысле, что параллельный перенос замкнутой системы из одного места пространства в другое, без изменения взаимного расположения и скоростей частиц, не изменяет механические свойства системы.

3. В основе закона сохранения момента импульса лежит **изотропия пространства**, т. е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям (симметрия по отношению к повороту осей координат). Одинаковость следует понимать в том смысле, что поворот замкнутой системы, как целого, не отражается на её механических свойствах.

Между законами типа основного уравнения динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса.

Так, если задана сила, действующая на материальную точку и начальные условия, то можно найти закон движения, траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п. Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены и потому в природе не происходят.

*Таким образом, законы сохранения проявляются как **принципы запрета**:*

любое явление, при котором не выполняются хотя бы один из законов сохранения, запрещено, и в природе такие явления никогда не наблюдаются. Всякое явление, при котором не нарушается ни один из законов сохранения, в принципе может происходить.

Рассмотрим следующий пример. Может ли покоящееся тело за счет внутренней энергии начать двигаться? Этот процесс не противоречит закону сохранения энергии. Нужно лишь, чтобы возникающая кинетическая энергия точно равнялась убыли внутренней энергии.

На самом деле такой процесс никогда не происходит, ибо он противоречит закону сохранения импульса. Раз тело покоилось, то его импульс был равен нулю. А если оно станет двигаться, то его импульс сам собой увеличится, что невозможно. Поэтому внутренняя энергия тела не может превратиться в кинетическую, если тело не распадётся на части.

Если же допустить возможность распада этого тела на части, то запрет, налагаемый законом сохранения импульса, снимается.

•

При этом возникшие осколки могут двигаться так, чтобы их центр масс оставался в покое, – а только этого и требует закон сохранения импульса.

Итак, для того чтобы внутренняя энергия покоящегося тела могла превратиться в кинетическую, это тело должно распадаться на части. Если же есть еще один какой-либо закон, запрещающий распад этого тела на части, то его внутренняя энергия и масса покоя будут постоянными величинами.

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных, и др.). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления и в макромире.

6.7. Сходство и различие линейных и угловых характеристик движения

Формулы кинематики и динамики вращательного движения легко запоминаются, если сопоставить их с формулами поступательного движения (см. таблицу 6.1).

Поступательное движение

$$v = \frac{dS}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$v = v_0 \pm at$$

$$S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$$

$$S = \int_0^t v dt$$

Вращательное движение

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

$$\phi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\phi = \int_0^t \omega dt$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$m\vec{v} = \text{const}$$

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$I\vec{\omega} = \text{const}$$

$$\frac{I\omega^2}{2} + mgh = \text{const}$$