Блочные методы дифференцирования назад

Формулы дифференцирования назад (ФДН) являются одними из наиболее популярных в классе неявных методов решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений. Запишем начальную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка вида

$y' = f(x, y)$, (1)

с заданным начальным условием $y(a) = y_0$, $a \le x \le b$.

Цель состоит в том, чтобы построить множество неявных методов ФДН в виде r-точечных блочных методов BDF с использованием ранее вычисленных значений решения и их производные, где r обозначает размер блока для получения значений решения в блоке в точках $x_{n+1}, ..., x_{n+i}, ..., x_{n+r}$. В каждом случае применение r-точечного блочного метода одновременно вычисляются r новых значений численного решения: $y_{n+1}, ..., y_{n+i}, ..., y_{n+r}$ в точках $x_{n+1}, ..., x_{n+i}, ..., x_{n+r}$.

Если r обозначает размер блока, h размер шага, то размер блока во времени $r \cdot h$. Пусть m=0, 1, 2, ... представляют номер блока, пусть $n = m \cdot r$, то k-блочный r-точечный метод можно записать в следующем общем виде:

$$A^{(0)}Y_m = \sum_{i=1}^{k} A^{(i)}Y_{m-i} + h\sum_{i=0}^{k} B^{(i)}F_{m-i}, \quad (2)$$

где $Y_m = (y_{n+1}, ..., y_{n+i}, \ldots, y_{n+r})^T$, $F_m = (f_{n+1}, ..., f_{n+i}, \ldots, f_{n+r})^T$, $\boldsymbol{A}^{(i)}$ и $\boldsymbol{B}^{(i)}$ являются матрицами коэффициентов размера r на r.

Предположим, что точное решение $y(x)$ локально представлена в диапазоне $[x_0, x_0+6h]$ непрерывным решением $Y(x)$ в виде

$$Y(x) = \sum_{j=0}^{6} b_j \varphi_j(x), \quad (3)$$

где b_j неизвестные коэффициенты, которые будут определены и $\varphi_j(x)$ – полиномиальные базисные функций степени j= 0,1, ... , 6.

Построим один блок 6-точечного блочного метода ФДН с $\varphi_j(x) = x^j$ путем наложения следующих коллокационных условий

$$Y(x_{n+j}) = y_{n+j},\ j = 0,1, ..., 5, \text{ and } Y'(x_{n+6}) = f_{n+6}, \quad (4)$$

где y_{n+j} является приближением для точного решения $y(x_{n+j})$, $f_{n+6} = f(x_{n+6}, y_{n+6})$, n – номер.

Следует отметить, что уравнение (4) приводит к системе уравнений, которые должны быть решены для получения коэффициентов b_j, j= 0,1, ..., 6, которые подставляются в (3) и после некоторых алгебраических вычислений

$$Y(x) = \sum_{j=0}^{6} \alpha_j(x) y_{n+j} + h\beta_6(x) f_{n+6}, \quad (5)$$

где $\alpha_j(x)$ и $\beta_6(x)$ являются непрерывными коэффициентами. Способ (5) затем используется для генерации 6-точечного блочного метода ФДН:

$$y_{n+6} = -\frac{10}{147}y_n + \frac{24}{49}y_{n+1} - \frac{75}{49}y_{n+2} + \frac{400}{147}y_{n+3} - \frac{150}{49}y_{n+4} + \frac{120}{49}y_{n+5} + \frac{20}{49}hf_{n+6}, \quad (6)$$

в точке $x = x_{n+6}$ с постоянной ошибкой C_7 = -20/343. Остальные формулы блочного метода получаются с помощью вычисления первой производной выражения (5) в точках $x = x_{n+j}$, j=1,2,…, 6.

$$Y'(x) = \frac{1}{h}\left(\sum_{j=0}^{5} \alpha_j'(x) y_{n+j} + h\beta_6'(x) f_{n+6}\right) = f(x_{n+j}, y_{n+j}). \quad (7)$$

Окончательно имеем

$$hf_{n+1} + \frac{24}{1764}f_{n+6} = -\frac{298}{1764}y_n - \frac{2235}{1764}y_{n+1} + \frac{4320}{1764}y_{n+2} - \frac{2780}{1764}y_{n+3} + \frac{1290}{1764}y_{n+4} - \frac{297}{1764}y_{n+5}, \quad (8)$$

$$hf_{n+2} + \frac{15}{2205}f_{n+6} = \frac{76}{2205}y_n - \frac{900}{2205}y_{n+1} - \frac{1230}{2205}y_{n+2} + \frac{2840}{2205}y_{n+3} - \frac{990}{2205}y_{n+4} + \frac{204}{2205}y_{n+5}, \quad (9)$$

$$hf_{n+3} + \frac{60}{8820}f_{n+6} - \frac{157}{8820}y_n + \frac{1395}{8820}y_{n+1} - \frac{6840}{8820}y_{n+2} + \frac{400}{8820}y_{n+3} + \frac{6165}{8820}y_{n+4} - \frac{963}{8820}y_{n+5}, \quad (10)$$

$$hf_{n+4} + \frac{120}{8820}f_{n+6} = \frac{167}{8820}y_n - \frac{1320}{8820}y_{n+1} + \frac{4860}{8820}y_{n+2} - \frac{12560}{8820}y_{n+3} + \frac{6045}{8820}y_{n+4} + \frac{2808}{8820}y_{n+5}, \quad (11)$$

$$hf_{n+5}+\frac{600}{8820}f_{n+6}-\frac{394}{8820}y_n+\frac{2925}{8820}y_{n+1}-\frac{9600}{8820}y_{n+2}+\frac{18700}{8820}y_{n+3}-\frac{26550}{8820}y_{n+4}+\frac{14919}{8820}y_{n+5}.(12)$$

Порядок работы

A. Построить блочные методы

1. Записать матрицу с помощью цикла матрицу A в символьном виде

$$A := \begin{bmatrix} 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & x_n^4 & x_n^5 & x_n^6 \\ 1 & x_n+h & (x_n+h)^2 & (x_n+h)^3 & (x_n+h)^4 & (x_n+h)^5 & (x_n+h)^6 \\ 1 & x_n+2h & (x_n+2h)^2 & (x_n+2h)^3 & (x_n+2h)^4 & (x_n+2h)^5 & (x_n+2h)^6 \\ 1 & x_n+3h & (x_n+3h)^2 & (x_n+3h)^3 & (x_n+3h)^4 & (x_n+3h)^5 & (x_n+3h)^6 \\ 1 & x_n+4h & (x_n+4h)^2 & (x_n+4h)^3 & (x_n+4h)^4 & (x_n+4h)^5 & (x_n+4h)^6 \\ 1 & x_n+5h & (x_n+5h)^2 & (x_n+5h)^3 & (x_n+5h)^4 & (x_n+5h)^5 & (x_n+5h)^6 \\ 0 & 1 & 2x_n+12h & 3(x_n+6h)^2 & 4(x_n+6h)^3 & 5(x_n+6h)^4 & 6(x_n+6h)^5 \end{bmatrix}$$

2. Вычислить обратную матрицу $B=A^{-1}$.
3. Записать символьное выражение с помощью
   E = *a*(1)**y*[n]+*a*(2)**y*[n+1]+*a*(3)**y*[n+2]+*a*(4)**y*[n+3]+*a*(5)**y*[n+4]+*a*(6)**y*[n+5]+*a*(7)**y*[n+6],
где *a*(*i*) это *i*-ый столбец матрицы B, i= 1, 2, ..., 7.
4. В матрице сделать E замену *x*[*n*]=*k*, результат сохранить в матрице Z.
5. В матрице сделать Z замену *x*=x[*n*]+6*h*, результат сохранить в матрице F.
6. В матрице сделать F замену *k*=*x*[*n*], результат сохранить в матрице G.
7. Упростить матрицу G (привести подобные), результат сохранить в матрице H.
8. Сделать присвоение *y*[*n*+6]:=H; % должна получиться формула (6)
9. Вычислить производную матрицы Z по x, результат записать в матрицу FF.
10. Для всех i начиная 6 до 1 с шагом 1 выполнить
11. Сделать в матрице FF замену *x* = *x*[*n*]+*i***h*, результат записать в матрице AA.
12. сделать в матрице AA замену *k* = *x*[*n*], результат записать в матрице BB.
13. Упростить матрицу BB, результат записать в CC.
14. Сделать присвоение *f*[*n*+*i*]:=CC; % должны получаться формулы (8)-(12).
15. Конец цикла.

Самостоятельно выполнить построение 4-точечного и 8-точечного блочных методов.
Для проверки использовать системы:

$$
\left.\begin{aligned}
f_{n+1} &= \frac{1}{50h}[2hf_{n+4} - 13y_n - 39y_{n+1} + 69y_{n+2} - 17y_{n+3}] \\
f_{n+2} &= \frac{1}{75h}[-3hf_{n+4} + 7y_n - 54y_{n+1} + 9y_{n+2} + 38y_{n+3}] \\
f_{n+3} &= \frac{1}{150h}[18hf_{n+4} - 17y_n + 99y_{n+1} - 279y_{n+2} + 197y_{n+3}] \\
y_{n+4} &= \frac{1}{25}[12hf_{n+4} - 3y_n + 16y_{n+1} - 36y_{n+2} + 48y_{n+3}]
\end{aligned}\right\}.
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&y_{n+8} = \frac{280h}{761}f_{n+8} - \frac{35}{761}y_n + \frac{320}{761}y_{n+1} - \frac{3920}{2283}y_{n+2} + \frac{3136}{761}y_{n+3} - \frac{4900}{761}y_{n+4} + \frac{15680}{2283}y_{n+5} - \frac{3920}{761}y_{n+6} + \frac{3920}{761}y_{n+7} \\
&hf_{n+1} - \tfrac{5h}{761}f_{n+8} = -\tfrac{383}{3040}y_n - \tfrac{24129}{15220}y_{n+1} + \tfrac{15841}{4566}y_{n+2} - \tfrac{5215}{1522}y_{n+3} + \tfrac{25585}{9132}y_{n+4} - \tfrac{14861}{9132}y_{n+5} + \tfrac{4627}{7610}y_{n+6} - \tfrac{521}{4566}y_{n+7} \\
&hf_{n+2} + \tfrac{5h}{2283}f_{n+8} = \tfrac{1159}{63924}y_n - \tfrac{658}{2283}y_{n+1} - \tfrac{128731}{136980}y_{n+2} + \tfrac{4510}{2283}y_{n+3} - \tfrac{11065}{9132}y_{n+4} + \tfrac{4286}{6849}y_{n+5} - \tfrac{2003}{9132}y_{n+6} + \tfrac{3166}{79905}y_{n+7} \\
&hf_{n+3} - \tfrac{h}{761}f_{n+8} = -\tfrac{391}{63924}y_n + \tfrac{111}{1522}y_{n+1} - \tfrac{2311}{4566}y_{n+2} - \tfrac{1325}{3044}y_{n+3} + \tfrac{3735}{3044}y_{n+4} - \tfrac{2171}{4566}y_{n+5} + \tfrac{677}{4566}y_{n+6} - \tfrac{537}{21308}y_{n+7} \\
&hf_{n+4} + \tfrac{h}{761}f_{n+8} = \tfrac{199}{53270}y_n - \tfrac{425}{11415}y_{n+1} + \tfrac{2353}{11415}y_{n+2} - \tfrac{620}{761}y_{n+3} + \tfrac{35}{1522}y_{n+4} + \tfrac{8852}{11415}y_{n+5} - \tfrac{691}{3805}y_{n+6} + \tfrac{2204}{79905}y_{n+7} \\
&hf_{n+5} - \tfrac{5h}{2283}f_{n+8} = -\tfrac{1229}{319620}y_n + \tfrac{349}{9132}y_{n+1} - \tfrac{2423}{13698}y_{n+2} + \tfrac{2395}{4566}y_{n+3} - \tfrac{11765}{9132}y_{n+4} + \tfrac{67241}{136980}y_{n+5} + \tfrac{2143}{4566}y_{n+6} - \tfrac{1723}{31962}y_{n+7} \\
&hf_{n+6} + \tfrac{5h}{761}f_{n+8} = \tfrac{433}{63924}y_n - \tfrac{246}{3805}y_{n+1} + \tfrac{2563}{9132}y_{n+2} - \tfrac{1690}{2283}y_{n+3} + \tfrac{4155}{3044}y_{n+4} - \tfrac{4846}{2283}y_{n+5} + \tfrac{15859}{15220}y_{n+6} + \tfrac{1242}{5327}y_{n+7} \\
&hf_{n+7} - \tfrac{35h}{761}f_{n+8} = -\tfrac{503}{21308}y_n + \tfrac{1001}{4566}y_{n+1} - \tfrac{20881}{22830}y_{n+2} + \tfrac{6895}{3044}y_{n+3} - \tfrac{33985}{9132}y_{n+4} + \tfrac{19901}{4566}y_{n+5} - \tfrac{6307}{1522}y_{n+6} + \tfrac{208903}{106540}y_{n+7}
\end{aligned}\right\}
$$

В. Выполнить проверку согласованности коэффициентов и вычислить порядок точности построенных методов.

Для проверки согласованности коэффициентов 6-точечного метода использовать формулы:

```
for q to 7 do
   c7 = 0
         for i to s do
         c7 = c7+i^q*a[i]
         end
   c7 = (c7-q*s^(q-1)*b[0])/factorial(q)
   disp(c7)
end;
```

В результате должно получиться 0, 0, 0, 0, 0, 0, - 20/343. В данной формуле a[i] и b[0] выбраны из (6).

Самостоятельно выполнить проверку согласованности коэффициентов для формул (8)-(12). В результате должны получиться значения: $-\frac{53}{2085}$ $\frac{18}{1715}$ $-\frac{167}{20580}$ $\frac{59}{5145}$ $-\frac{23}{686}$ соответственно (приведены только последние значения).

Самостоятельно выполнить проверку согласованности коэффициентов для 4-точечных и 8-точесных блочных методов. В результате должны получиться значения: $-\frac{29}{500}$ $\frac{31}{750}$ $-\frac{37}{500}$ $-\frac{12}{125}$ и $\frac{89}{6088}, -\frac{2423}{575316}, \frac{817}{383544}, -\frac{277}{159810}, \frac{2563}{1150632}, -\frac{901}{191772}, \frac{347}{18264}, \frac{280}{6849}$.