Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости. В прямоугольной системе координат рассмотрим элементарную струйку (рис. 2.19). Движение жидкости установившееся и медленно изменяющееся.

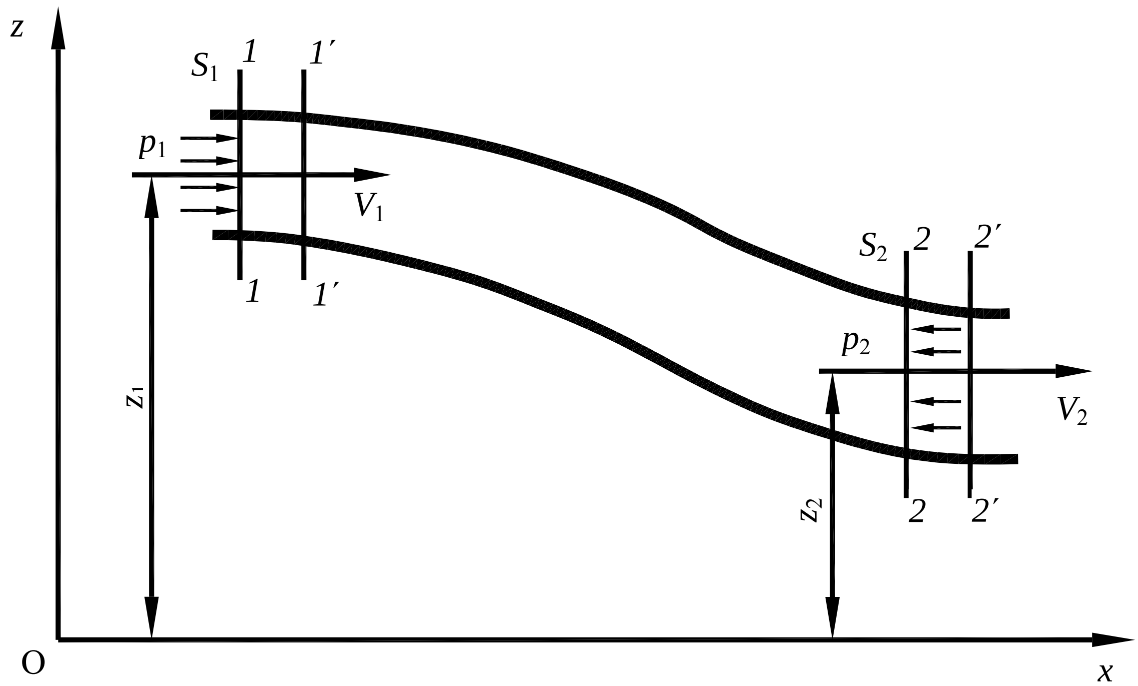

Рис. 2.19. Элементарная струйка жидкости в прямоугольной системе координат

Возьмем два произвольных сечения *1–1* и *2–2* и отметим в сечениях: V_1 и V_2 – средние скорости струйки в сечениях *1–1* и *2–2* соответственно; S_1 и S_2 –площади живых сечений; p_1 и p_2 – давления в центре тяжести сечений; z_1 и z_2 – расстояния до центров тяжести сечений от произвольно выбранной горизонтальной плоскости, называемой плоскостью сравнения.

Расход жидкости, постоянный на всем участке струйки, обозначим Q. За время Δt участок струйки *1–2* переместится в положение $1'-2'$.

Применим к массе жидкости в объеме участка струйки теорему механики, касающуюся изменения кинематической энергии: изменение кинематической энергии тела на некотором его перемещении равно сумме работ всех сил, приложенных к телу на том же перемещении.

Изменение кинетической энергии участка *1–2* при перемещении его в положение $1'-2'$ определяется разностью двух энергий:

$$\Delta K = K_{1'2'} - K_{12} = \left(K_{1'2} + K_{22'}\right) - \left(K_{11'} + K_{1'2}\right) = K_{22'} - K_{11'} =$$

$$= \frac{m_2 V_2^2}{2} - \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{\gamma Q_\Delta t V_2^2}{2g} - \frac{\gamma Q_\Delta t V_1^2}{2g}, \qquad (2.59)$$

где $K_{1'2'}$ – кинетическая энергия участка $1'-2'$; K_{12} – кинетическая энергия участка *1–2*; $K_{1'2}$ – кинетическая энергия промежуточного участка $1'-2$; $K_{22'}$ – кинетическая энергия участка $2-2'$; $K_{11'}$ – кинетическая энергия промежуточного участка $1-1'$; m_2, m_1 – масса жидкости в участках $2-2'$ и $1-1'$ соответственно.

$$m_2 = m_1 = Q_\Delta t\rho = \frac{Q_\Delta t\gamma}{g}.$$

В уравнении (2.59) кинетическая энергия промежуточного участка $1'-2$ сократилась и осталась разность кинетических энергий элементов $2-2'$ и $1-1'$.

Переходим к работе действующих сил. Работа сил тяжести жидкости, протекающей в течении времени Δt по пути ее вертикального перемещения на величину $z_1 - z_2$, равна

$$A_z = \gamma Q_\Delta t(z_1 - z_2). \qquad (2.60)$$

Работа сил давления определяется следующим: силой давления, равной произведению pS , и путем перемещения $V\Delta t$. Следовательно, работа сил давления

$$A_p = p_1 S_1 V_{1\Delta} t - p_2 S_2 V_{2\Delta} t = Q_\Delta t(p_1 - p_2). \qquad (2.61)$$

Получили три составляющие. Закон сохранения энергии для элементарной струйки идеальной жидкости можно представить так:

$$\Delta K = A_z + A_p, \qquad (2.62)$$

или

$$\frac{\gamma Q_\Delta t\left(V_2^2 - V_1^2\right)}{2g} = \gamma Q_\Delta t(z_1 - z_2) + Q_\Delta t(p_1 - p_2). \qquad (2.63)$$

Разделим обе части уравнения на величину $\gamma Q_\Delta t$, получим

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}. \qquad (2.64)$$

Произведем перестановку слагаемых таким образом, чтобы в левой части оказались слагаемые с индексом 1, в правой – с индексом 2. В результате получим.

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2. \qquad (2.65)$$

Так как сечения были взяты произвольно, то уравнение действительно для любых поперечных сечений элементарной струйки и в общем виде может быть записано следующим образом:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = \text{const}. \qquad (2.66)$$

Это основное уравнение гидравлики известно под названием уравнения Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости. Оно было выведено Даниилом Бернулли в 1738 году.

Обратим внимание на следующее:

1. Уравнение Бернулли связывает величины z, p, V.

2. Как видно из уравнения (2.66), в случае идеальной жидкости сумма трех слагаемых ($z, \frac{p}{\gamma}, \frac{V^2}{2g}$) является постоянной величиной вдоль рассматриваемой струйки.

3. Зная для данного сечения струйки какие-либо две величины из трех (z, p, V) мы можем, пользуясь уравнением Бернулли (зная постоянную величину), найти третью неизвестную величину для рассматриваемого сечения струйки.

Сумма трех слагаемых, входящих в уравнение (2.66), называется полным напором в данном сечении и обозначается H_0:

$$H_0 = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = \text{const}. \tag{2.67}$$

Умножим все члены уравнения (2.66) на ускорение свободного падения g и заменим γ на произведение $\rho g(\gamma = \rho g)$, получим уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости в энергетической форме:

$$Э = zg + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const}. \tag{2.68}$$

В данном уравнении каждое слагаемое представляет собой величину удельной (по отношению к массе) энергии: zg – удельная постоянная энергия положения; $\frac{p}{\rho}$ – удельная потенциальная энергия давления; $\frac{V^2}{2}$ – удельная кинетическая энергия.

Геометрический, физический (энергетический) смысл уравнения Бернулли. Все члены уравнения Бернулли (2.66) имеют линейную размерность, и каждый из них может называться высотой, например: z – геометрическая высота, $\frac{V^2}{2g}$ – высота скоростного напора.

Сформулируем геометрический смысл уравнения Бернулли.

При установившемся движении жидкости элементарной струйки сумма трех высот есть величина постоянная вдоль элементарной струйки.

Уравнение Бернулли (2.68) выражает один из случаев закона сохранения энергии в любом сечении элементарной струйки.

Таким образом, энергетический смысл уравнения Бернулли заключается в следующем: при установившемся движении жидкости элементарной струйки сумма трех удельных энергий (энергии положения, энергии давления и кинетической энергии) остается неизменной вдоль элементарной струйки. В уравнении Бернулли (2.66) можно слагаемые рассматривать как удельные энергии, но уже по отношению к единице веса жидкости.