Общая физика
Электричество
Лекция № 3

- Закон Гаусса в интегральной и дифференциальной форме

1. *Поток вектора напряженности электрического поля*
2. *Закон Гаусса в интегральной форме*
3. *Поле бесконечной равномерно заряженной нити*
4. *Поле равномерно заряженной сферы*
5. *Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости*
6. *Поле двух равномерно заряженных бесконечных плоскостей с поверхностной плотностью зарядов + σ и - σ*
7. *Теорема Ирншоу*
8. *Закон Гаусса в дифференциальной форме*

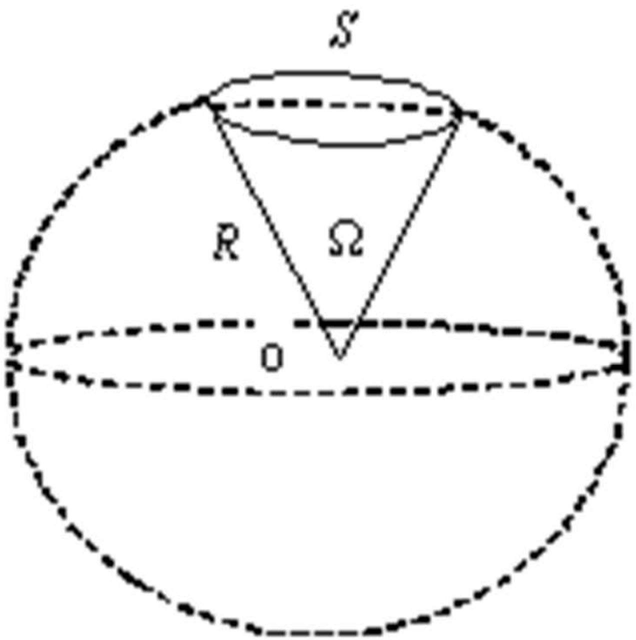
Поток вектора напряженности электрического поля

Поток вектора напряженности электрического поля через площадку dS: $d\Phi_E = E_n dS = \vec{E} d\vec{S}$ [В · м]

где $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$

Произвольная замкнутая поверхность S:

$$\Phi_E = \oint_S d\Phi_E = \oint_S E_n dS$$



ЗАКОН (ТЕОРЕМА) ГАУССА ДЛЯ ВЕКТОРА В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Поток $d\Phi_E$ напряженности электрического поля, создаваемого этим зарядом, через бесконечно малую площадку dS, радиус - вектор которой $\boldsymbol{r}$.

dS_n - проекция площадки dS на плоскость перпендикулярную вектору $\boldsymbol{r}$ ($\perp \vec{r}$).

Начало отсчета совмещаем с точечным зарядом

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$$

$$d\Phi_E = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot d\vec{S} = \frac{qrdS}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \cos(\angle\vec{r}, d\vec{S}) = \frac{qdS_n}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$d\Phi_E = \frac{q\,dS_n}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q r^2 d\Omega}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot d\Omega$$

Для конической поверхности: $\Phi_E = \int d\Phi_E = \int_0^{\Omega} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot d\Omega = \frac{q\Omega}{4\pi\varepsilon_0}$

Для замкнутой поверхности:

$$\Phi_E = \oint_S E\,dS_n = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot dS_n = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

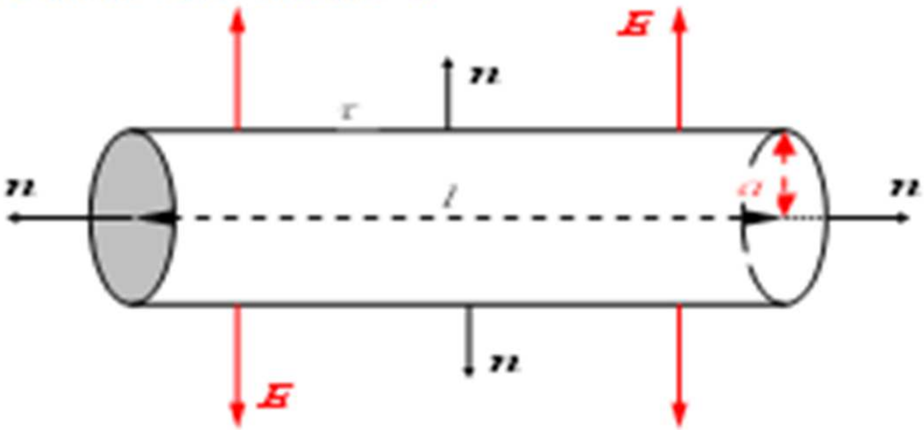
Теорема Гаусса: поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленных на ε_0.

Заметим : с физической точки зрения закон Гаусса можно рассматривать как закон сохранения потока в том смысле, что поток не зависит от поверхности. , а также и от времени при условии, что заряды не пересекают поверхность.

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ГАУССА

Поле бесконечной равномерно заряженной нити (цилиндра) с линейной плотностью τ

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = 2\int_{S_{осн}} \vec{E}d\vec{S} + \int_{S_{бок}} \vec{E}d\vec{S}$$



$$\angle \vec{E},\vec{n} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{E осн} = 2\int_{S_{осн}} EdS\cos(\angle \vec{E},\vec{n}) = 0$$

$$\Phi_E = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\int_l \tau \cdot dl}{\varepsilon_0} = \frac{\tau \cdot l}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_E = \Phi_{E\,осн} + \Phi_{E бок} = 0 + \int_{S_{бок}} EdS\cos(\angle \vec{E},\vec{n}) = \int_{S_{бок}} EdS = E\int_{S_{бок}} dS = E2\pi a l$$

$$E2\pi a l = \frac{\tau \cdot l}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

Поле равномерно заряженной сферы радиуса *R*.

$a) r \geq R$

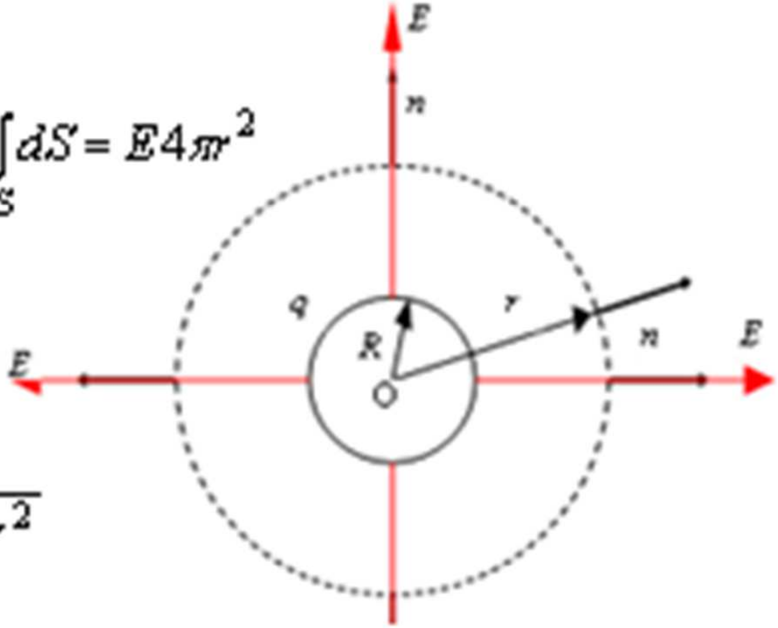
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \int_{S_{бок}} EdS\cos(\angle\vec{E}, d\vec{S}) = E\int_S dS = E4\pi r^2$$

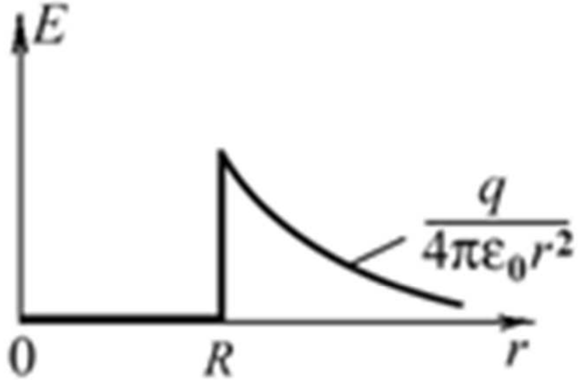
$$\Phi_E = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_E = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

При $r<R$

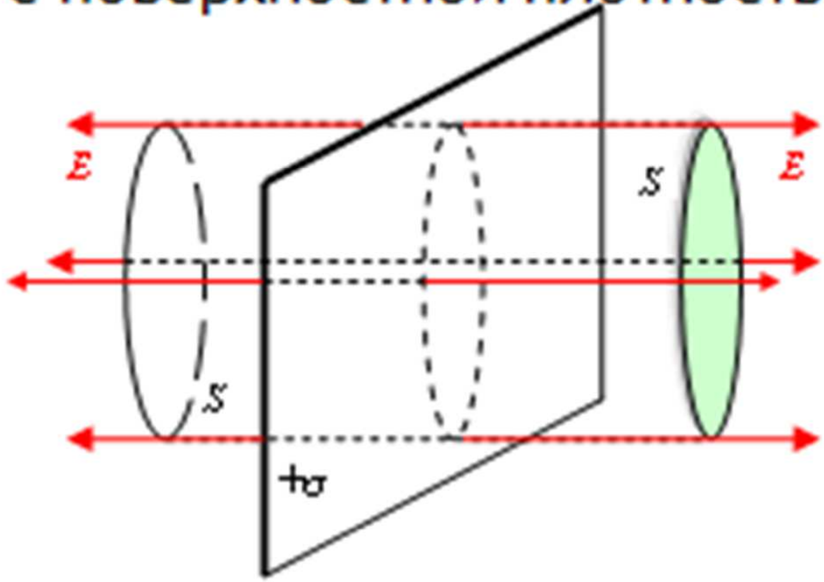
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = E4\pi r^2 \quad \Phi_E = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = 0$$





Напряженность электрического поля, создаваемая сферой радиусом R

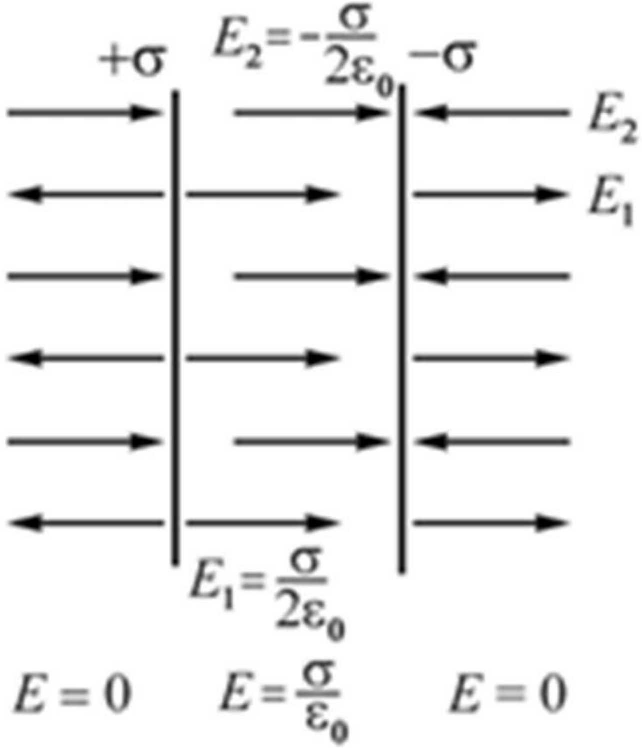
Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$



$$\Phi_E = \Phi_{E\,осн} + \Phi_{E\,бок} = 2\int\limits_{S_{осн}} \vec{E}d\vec{S} + \int\limits_{S_{бок}} \vec{E}d\vec{S} = 2ES_{осн} + 0(\Leftarrow \vec{E} \perp d\vec{S}) = 2ES$$

$$\Phi_E = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \qquad 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Поле двух равномерно заряженных бесконечных плоскостей с поверхностной плотностью зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

вне плоскостей получаем:

$$E = E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0$$

между плоскостями поле равно:

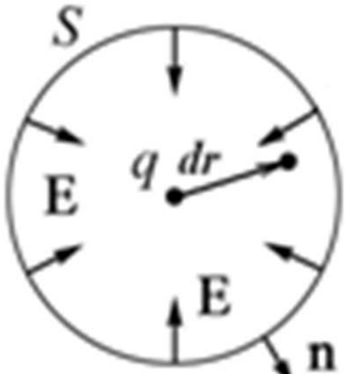
$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Теорема Ирншоу

Система неподвижных электрических зарядов не может находиться в устойчивом равновесии.

Имеется система зарядов q_1, q_2, ... q_n

Поток вектора напряженности $\boldsymbol{E}$ через поверхность S отрицательный:



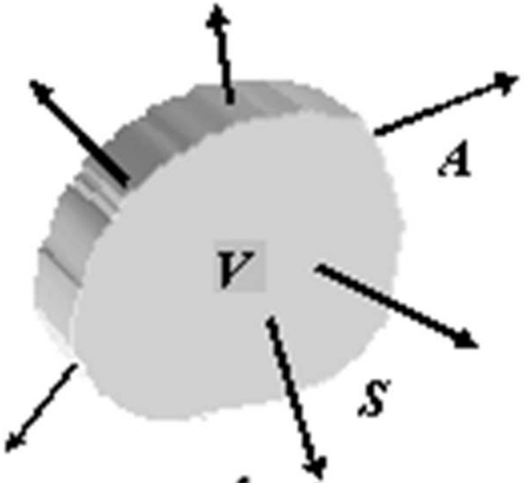
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S} E dS \cos(\angle \vec{E}, d\vec{S}) = \int_S E dS \cos 180^0 < 0 \quad (1)$$

С другой стороны, согласно теореме Гаусса, если заряды не охватываются замкнутой поверхностью, то поток вектора напряженности $\boldsymbol{E}$ электрического поля, создаваемого ими, через эту поверхность $\Phi_E = 0$.

Следовательно, условие (1) не выполняется. Полученное противоречие доказывает теорему Ирншоу. Поэтому модель атома Резерфорда - планетарная модель атома, в которой электроны движутся вокруг ядра по окружностям.

ЗАКОН ГАУССА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Дивергенция вектора - число силовых линий, приходящихся на единицу объема, или плотность потока силовых линий



$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta V} = \frac{dN}{dV} = div\vec{A}$$

Теорема Остроградского-Гаусса: $\oint\limits_S \vec{A}d\vec{S} = \int\limits_V div\vec{A}dV$

$$\oint\limits_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{\int\limits_V \rho dV}{\varepsilon_0} \qquad \oint\limits_S \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_V div\vec{E}dV = \frac{\int\limits_V \rho dV}{\varepsilon_0} \qquad div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$