Метод максимального правдоподобия для дискретной случайной величины

Пусть значения $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ получены в результате n наблюдений за дискретной случайной величиной ξ. Допустим, что вид закона распределения случайной величины ξ задан, но не известен параметр распределения Θ, которым определяется этот закон. Требуется найти точечную оценку этого параметра.

Обозначим $p(x_i, \Theta)$ вероятность того, что ξ приняла значение $x_i, i = 1,2, \dots, n$.

Функцией правдоподобия дискретной случайной величины ξ называют функцию аргумента Θ

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \Theta) = p(x_1, \Theta) \cdot p(x_2, \Theta) \cdot \dots \cdot p(x_n, \Theta).$$

В качестве точечной оценки параметра Θ принимают такое его значение

$$\Theta^* = \Theta(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

при котором функция правдоподобия достигает максимума.

* Метод максимального правдоподобия непрерывной случайной величины

Пусть значения $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ получены в результате n наблюдений за непрерывной случайной величиной ξ. Допустим, что известен вид плотности распределения $f_\xi(x)$ случайной величины ξ , но не известен параметр Θ , которым определяется эта функция. Требуется найти точечную оценку этого параметра.

Функцией правдоподобия непрерывной случайной величины ξ называют функцию аргумента Θ

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \Theta) = f_\xi(x_1, \Theta) \cdot f_\xi(x_2, \Theta) \cdot \cdots \cdot f_\xi(x_n, \Theta).$$

В качестве точечной оценки параметра Θ, как и в случае дискретной случайной величины, принимают такое его значение

$$\Theta^* = \Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

при котором функция правдоподобия достигает максимума.

Реализация метода максимального правдоподобия

В силу монотонности логарифма функции L и $\ln L$ достигают максимума при одном и том же значении Θ, поэтому вместо функции L рассматривают функцию $\ln L$.

1) Находим $\frac{d(\ln L)}{d\Theta}$.

2) Решаем ***уравнение правдоподобия*** $\frac{d(\ln L)}{d\Theta} = 0$, откуда находим критическую точку Θ^*.

3) Находим вторую производную $\frac{d^2(\ln L)}{d\Theta^2}$ в точке Θ^*. Если она отрицательная, то Θ^* - точка максимума функции $\ln L$, а, следовательно, и функции L.

Найденную величину Θ^* принимают в качестве оценки неизвестного параметра Θ.

* Особенности метода максимального правдоподобия для непрерывной случайной величины

Если плотность $f_\xi(x)$ непрерывной случайной величины ξ зависит от двух параметров Θ_1 и Θ_2, то функция правдоподобия

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \Theta_1, \Theta_2) = f_\xi(x_1, \Theta_1, \Theta_2) \cdot f_\xi(x_2, \Theta_1, \Theta_2) \cdot \dots \cdot f_\xi(x_n, \Theta_1, \Theta_2).$$

В этом случае для поиска максимума

1) находим $\frac{\partial(\ln L)}{\partial\Theta_1}$ и $\frac{\partial(\ln L)}{\partial\Theta_2}$;

2) решаем ***системму правдоподобия*** $\begin{cases} \frac{\partial(\ln L)}{\partial\Theta_1} = 0; \\ \frac{\partial(\ln L)}{\partial\Theta_2} = 0 \end{cases}$ откуда находим критическую точку $(\Theta_1{}^*, \Theta_2{}^*)$.

3) Находим вторые частные производные $\mathrm{A} = \frac{\partial^2(\ln L)}{\partial{\Theta_1}^2}$, $\mathrm{C} = \frac{\partial^2(\ln L)}{\partial{\Theta_2}^2}$ и $\mathrm{B} = \frac{\partial^2(\ln L)}{\partial\Theta_1\partial\Theta_2}$ в точке $(\Theta_1{}^*, \Theta_2{}^*)$.

4) Если $A \cdot C - B^2 < 0$, то $(\Theta_1{}^*, \Theta_2{}^*)$ - точка максимума функции $\ln L$, а, следовательно, и функции L.

* # Достоинства и недостатки метода максимального правдоподобия

Оценки метода максимального правдоподобия

+ состоятельны, но могут быть смещенными;
+ распределены асимптотически нормально;
+ имеют наименьшую дисперсию по сравнению с другими асимптотическими нормальными оценками.

Если для оцениваемого параметра Θ существует эффективная оценка Θ^*, то уравнение правдоподобия имеет единственное решение Θ^*.

— Недостаток метода заключается в том, что он иногда требует сложных вычислений.

* Применение метода максимального правдоподобия

Методом максимального правдоподобия найдем точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}; & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Решение. Построим функцию правдоподобия

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \left(\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x_n}\right) = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Логарифмическая функция правдоподобия

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = n \cdot \ln \lambda - \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

1) Найдем $\frac{d(\ln L)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i$.

2) Из уравнения правдоподобия $\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ найдем критическую точку $\lambda^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$.

3) Вычислим $\frac{d^2(\ln L)}{d\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2}$, ее значение в точке $\lambda^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$

$$\frac{d^2(\ln L)}{d\lambda^2}(\lambda^*) = -\frac{n}{n^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 < 0$$

Следовательно, в точке $\lambda^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ функция $\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)$, а, следовательно, и функция $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)$ достигает локального максимума.