Функция распределения непрерывной случайной величины

- **Случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ называется непрерывной, если для нее существует такая неотрицательная кусочно-непрерывная функция $f_\xi(x)$, что функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ равна**
  - $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt.$
- **Функция $f_\xi(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей*.**

Плотность функции распределения

- **Если функция $f_{\xi}(x)$ непрерывна в точке x_0, то**

$F'_{\xi}(x_0) = f_{\xi}(x_0).$

- $P\{a \le \xi < b\} = \int_a^b f_{\xi}(t)dt$ **или**
- $P\{a \le \xi < b\} = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a).$

Пример 1

- **Случайная величина ξ задана функцией распределения** $F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 2; \\ (x-2)^2, 2 < x \le 3; \\ 1, x > 3 \end{cases}$
- **Найти плотность распределения вероятности** $f_{\xi}(x)$.
- **Построить графики функций** $F_{\xi}(x)$ **и** $f_{\xi}(x)$.
- **Найти вероятность** $P\{2,1 \le \xi < 2,5\}$.

Пример 2

- **Случайная величина ξ задана функцией распределения** $F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, \ x < -a; \\ b + c \cdot arctg\frac{x}{a}, -a \le x < a; \\ 1, x \ge a \end{cases}$
- **Найти**
- **постоянные** b **и** c;
- **плотность распределения вероятностей случайной величины** $f_{\xi}(x)$.

Пример 3

- **Случайная величина задана плотностью распределения вероятностей**
- $$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0,\ x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 2\sin 2x\ , \dfrac{\pi}{4} < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$
- **Найти функцию распределения $F_{\xi}(x)$.**

Пример 4

- Случайная величина ξ, все возможные значения которой принадлежат интервалу $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, задана в этом интервале плотностью распределения вероятностей $f_{\xi}(x) = C \cdot sin\,3x$. Найти коэффициент C.

Пример 5

- **Случайная величина ξ задана функцией распределения**

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le -c; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot arcsin\frac{x}{c}, & -c < x \le c; \\ 1, & x > c \end{cases}$$

- **Найти математическое ожидание этой величины.**

Пример 6

- **Задана плотность распределения случайной величины**

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0; \\ a \cdot x^2, 0 \le x \le 1; \\ a \cdot (2 - x)^2, 1 < x \le 2; \\ 0, x > 2 \end{cases}$$

- **найти постоянную** a;
- **найти функцию распределения** $F_{\xi}(x)$;
- **построить графики функций** $f_{\xi}(x)$ **и** $F_{\xi}(x)$;
- **вычислить математическое ожидание** $M(\xi)$ **и дисперсию** $D(\xi)$;
- **вычислить вероятность** $P\{0,5 \le \xi < 1,5\}$.

Пример 7

- Задана плотность распределения случайной величины $f_\xi(x)=\begin{cases}0,\ x<0;\\ a\cdot\left(4x-x^3\right),0\le x\le 2;\\ 0,x>2\end{cases}$
- найти постоянную a;
- найти функцию распределения $F_\xi(x)$;
- построить графики функций $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$;
- вычислить математическое ожидание $M(\xi)$ и дисперсию $D(\xi)$;
- вычислить вероятность $P\{0,5\le\xi<1,5\}$.

Равномерное распределение

- **Говорят, что непрерывная случайная величина ξ имеет равномерное распределение $\xi \in \boldsymbol{U_{a,b}}$ на отрезке $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, если ее плотность распределения $\boldsymbol{f}_{\xi}(\boldsymbol{x})$ имеет вид**

$$\boldsymbol{f}_{\xi}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}, \text{при } \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]; \\ \mathbf{0}, \text{при } \boldsymbol{x} \notin [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]. \end{cases}$$

Функция распределения равномерного распределения

- **Функция распределения равномерного распределения имеет вид**

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при } a<x\le b;\\ 1, & \text{при } x>b. \end{cases}$$

- **При этом, вероятность попадания случайной величины ξ, имеющей равномерно распределение, в интервал $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ определяется по формуле**

$$P\{\alpha\le\xi\le\beta\}=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Числовые характеристики равномерного распределения

- **По определению математического ожидания, имеем**
- $M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{\xi}(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2\cdot(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$
- **Для вычисления дисперсии случайной величины, найдем**
- $M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_{\xi}(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{2\cdot(b-a)} = \frac{a^2+a\cdot b+b^2}{3}.$

Дисперсия равномерного распределения

- $D(\xi) = \ M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = \frac{a^2+a\cdot b+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$

$$\frac{4\cdot a^2+4\cdot a\cdot b+4\cdot b^2-3\cdot a^2-6\cdot a\cdot b-3\cdot b^2}{12} = \frac{a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Пример 8

- **На шоссе установлен автоматический светофор в котором 1 минуту для транспорта горит зеленый свет и 45 секунд красный, затем опять 1 минуту – зеленый и 45 секунд – красный и т.д. автомашина проезжает по шоссе в случайный момент времени, не связанный с работой светофора. Найти вероятность того, что машина проедет мимо светофора, не останавливаясь.**

Пример 9

- **Цена деления шкалы амперметра равна $0,1$ А. Показания округляют до ближайшего целого деления найти вероятность того, что при отсчете будет допущена ошибка, превышающая $0,02$.**

Пример 10

- Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного значения не более, чем на 20 с.