Асимптотически нормальная оценка

* Построение асимптотических доверительных интервалов основано на асимптотически нормальных оценках. Предположим, что оценка $\Theta^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является ***асимптотически нормальной***, то есть,

  * $\sqrt{n} \cdot (\Theta^* - \Theta) \Longrightarrow \zeta \in \mathcal{N}(0; \sigma)$ по распределению,

* где дисперсия $\sigma^2 = \sigma^2(\Theta)$ – коэффициент асимптотического рассеивания.

* Предположим, что функция $\sigma^2(\Theta)$ непрерывна по Θ и отлична от нуля. Тогда

  * $\frac{\sqrt{n} \cdot (\Theta^* - \Theta)}{\sigma(\Theta^*)} \Longrightarrow \eta \in \mathcal{N}(0; 1)$ по распределению.

* Асимптотический доверительный интервал

* Для любого $\alpha \in (0;1)$ справедливо следующее соотношение

$$P\left\{-\tau_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sqrt{n}\cdot(\Theta^* - \Theta)}{\sigma(\Theta^*)} < \tau_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\tau_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{\tau_{1-\frac{\alpha}{2}}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz,$$

* где $\tau_{1-\frac{\alpha}{2}}$ – квантиль нормального распределения уровня $1-\frac{\alpha}{2}$, то есть, $F(\tau_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\frac{\alpha}{2}$, где $F(x)$ – функция нормального распределения.

* Асимптотический доверительный интервал

* Получаем асимптотический доверительный интервал с уровнем доверия $1 - \alpha$

$$P\left\{\Theta^* - \tau_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma(\Theta^*)}{\sqrt{n}} < \Theta < \Theta^* + \tau_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma(\Theta^*)}{\sqrt{n}}\right\} \approx 1 - \alpha.$$

Ширина доверительного интервала характеризует точность интервальной оценки.