* χ^2 распределение

* Пусть $\xi_i, i = 1, \dots, k,$ - независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону распределению, $\xi_i \in \mathcal{N}(0;1)$. Случайная величина η

$$\eta = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^2$$

* называется χ^2 – ***распределенной с k степенями свободы.***
* Случайная величина

$$\zeta = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^2}$$

называется χ - ***распределенной с k степенями свободы.***

Плотность вероятностей χ распределений

* Плотность вероятности χ – распределения имеет вид

$$f_{\chi}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{k-1}}{2^{\frac{k}{2}-1} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}; & x \geq 0, \\ 0; & x < 0. \end{cases}$$

* χ^2 – распределение является частным случаем гамма – распределения с параметрами $\alpha = \frac{k}{2}$ и $\lambda = 1/2$ и его плотность распределения имеет вид

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{k}{2}-1}}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}; & x \geq 0, \\ 0; & x < 0. \end{cases}$$

* Числовые характеристики χ распределения

* Для χ – распределения имеем

$$M\left(\zeta^{l}\right)=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{k+l-1}}{2^{\frac{k}{2}-1}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\left|\begin{matrix}\frac{x^2}{2}=u & x=\sqrt{2u}\\ & dx=\frac{du}{\sqrt{2u}}\end{matrix}\right|$$

$$=\frac{2^{\frac{l}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot\int_{0}^{+\infty}u^{\frac{k+l}{2}-1}\cdot e^{-u^2}du=\frac{2^{\frac{l}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{k+l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.$$

В частности

$$M(\zeta)=\frac{\sqrt{2}\cdot\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.$$

$$D(\zeta)=M(\zeta^2)-M^2(\zeta)=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot\left(\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)-\frac{\Gamma^2\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\right).$$

* Числовые характеристики χ^2 распределения

* Так как χ^2 – распределение является частным случаем гамма распределения при $\alpha = \frac{k}{2}$ и $\lambda = 1/2$, то

$$M(\eta) = \frac{\alpha}{\lambda} = k.$$

$$D(\eta) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = 2k.$$