Нормальное распределение случайной величины

- **Говорят, что непрерывная случайная величина ξ имеет *нормальное распределение* $\xi \in \mathcal{N}(a;\sigma)$ или подчиняется закону Гаусса, если ее плотность имеет вид**

$$f_{\xi}(x) = \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}},$$

- **где a и σ – параметры распределения.**

$$M(\xi) = a$$

$$D(\xi) = \sigma^2$$

Функция распределения случайной величины

$$\xi \in \mathcal{N}(a; \sigma)$$

- **Функция распределения нормального закона распределения $\xi \in \mathcal{N}(a;\sigma)$ имеет вид**

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Нормированное нормальное распределение

- **Распределение с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ называют *нормированным нормальным распределением* $\xi \in \mathcal{N}(0; 1)$.**
- **Плотностью нормального распределения является функция Гаусса**

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Значения функции Гаусса $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Целые и десятичные доли x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001338									
4,5	0,0000160									
5,0	0,0000015									

Функция распределения нормированного нормального распределения

- **Функция распределения нормированного нормального закона распределения $\xi \in \mathcal{N}(0;1)$ имеет вид**

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Функция распределения нормального распределения

- **Интеграл функции распределения нормального закона распределения** $\xi \in \mathcal{N}(a;\sigma)$

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

не может быть представлен в виде суммы элементарных функций, но может быть приведен к специальной функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Значения функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,499952									
4,0	0,499968									
4,5	0,499997									
5,0	0,49999971									

Пример 1

- Математическое ожидание нормально распределенной случайно величины ξ равно

$$M(\xi) = 3,$$

- а среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = 2.$$

- Найти плотность распределения вероятностей случайной величины ξ.

Пример 2

- Математическое ожидание нормально распределенной случайно величины ξ равно

$$\boldsymbol{M(\xi) = 3,}$$

- а дисперсия

$$\boldsymbol{D(\xi) = 16.}$$

Найти плотность распределения вероятностей случайной величины ξ.

Пример 3

- **Нормально распределенная случайная величина ξ задана плотностью распределения**

$$f_\xi(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}.$$

- **Найти математическое ожидание и дисперсию ξ.**

Пример 4

- **Дана функция распределения нормированного нормального закона**

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Найти плотность распределения $f_{\xi}(x)$.

Пример 5

- На станке изготавливают шарики для подшипников. Номинальный диаметр шариков 5 мм. Фактический размер диаметра шарика вследствие неточности изготовления представляет собой случайную величину ξ, распределенную по нормальному закону распределения с математическим ожиданием $a = 5$ мм и среднеквадратичным отклонением $\sigma = 0,05$ мм.
- Найти
- процент шариков для подшипников, которые будут иметь диаметр от $4,8$ мм до 5 мм;
- процент брака, если известно, что при контроле бракуются все шарики, диаметр которых отклоняется от номинального значения по абсолютной величине больше, чем на $0,1$ мм.

Пример 6

- **Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки ξ взвешивания подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.**

Пример 7

- **Математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины ξ равны 10 и 2, соответственно. Найти вероятность того, что в результате испытания ξ примет значение, заключенное в интервале $(12; 14)$.**

Пример 8

- **Автомат штампует детали. Контролируется длина детали ξ, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектной длиной) равным 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой а) детали большей 55 мм; б) меньше 40 мм.**

Показательное распределение

- **Говорят, что непрерывная случайная величина ξ имеет экспоненциальное (показательное) распределение с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность распределения имеет вид**

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

- **Функция распределения случайной величины ξ, имеющей экспоненциальное распределение, при этом**

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Числовые характеристики показательного распределения

- **Математическое ожидание показательного распределения**

$$\boldsymbol{M}(\xi) = \frac{\mathbf{1}}{\lambda}.$$

- **Дисперсия показательного закона распределения**

$$\boldsymbol{D}(\xi) = \frac{\mathbf{1}}{\lambda^{\mathbf{2}}}.$$

Пример 9

- **Найти плотность и функцию распределения показательного закона распределения случайно величины ξ, если математическое ожидание $M(\xi) = 6$.**

Пример 10

- Непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону распределения, заданному плотностью распределения вероятностей

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ 0,04 \cdot e^{-0,04x}, x \geq 0. \end{cases}$$

- Найти вероятность того, что в результате испытания ξ попадет в интервал $(1; 2)$.

Пример 11

- **Непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону распределения, заданному функцией распределения**

$$\boldsymbol{F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ 1 - e^{-0,5x}, x \geq 0. \end{cases}}$$

- **Найти вероятность того, что в результате испытания ξ попадет в интервал $(2; 5)$.**

Пример 12

- **На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния автомобилей. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины τ – время ожидания очередной машины контролером, если поток машин простейший и время (в часах) между прохождениями машин через контрольный пункт распределено по показательному закону $f_{\xi}(t) = 5 \cdot e^{-5t}$.**

Пример 13

- **Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F_{\xi}(t) = 1 - e^{-0,03t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью $t = 100$ ч. а) элемент откажет; б) элемент не откажет.**

Пример 14

- Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0,02t}$, второго $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью $t = 6$ ч. а) оба элемента откажут; б) оба элемента не откажут; в) только один элемент откажет; г) хотя бы один элемент откажет.