Существование и единственность

А.В. Шаповалов

НИ ТПУ

Томск, 2016

A plan of lectures

- Lecture 1: Introduction
- Lecture 2: Classification of a quasilinear PDF
- Lecture 3: Nonlinear heat transfer
- Lecture 4: The two phase Stefan problem

2 Существование и единственность решения уравнения первого порядка

2.1 Приближенный метод Эйлера

В методе Эйлера приближенного интегрирования уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2.1}$$

искомая интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0), заменяется ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков (Рис.2.1).

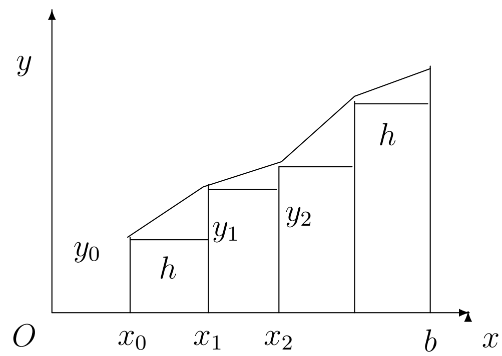

Рис. 2.1:

Построим приближенную интегральную кривую на отрезке $[x_0, b]$. Для этого разделим отрезок на n равных частей точками x_0, x_1, $x_2, \ldots,\ x_n = b$ с шагом $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, n-1$. Приближенные значения искомого решения в точках x_i обозначим через y_i и определим их рекуррентным выражением

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i, \quad \text{где} \quad y'_i = f(x_i, y_i). \tag{2.2}$$

Более подробно

$$\begin{aligned} &y_1 = y_0 + hy'_0, \\ &y_2 = y_1 + hy'_1, \\ &\ldots \\ &y_n = y_{n-1} + hy'_{n-1}. \end{aligned}$$

Выражение (2.2) определяет ломаную (*ломаную Эйлера*) $y_n(x)$, $i-$е звено которой при $x_i \le x \le x_{i+1}$, есть отрезок, соединяющий точки (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}).

Естественно ожидать, что при $h \to 0$, $n \to \infty$ ломаные Эйлера $y_n(x)$ приближаются к искомому точному решению $y = \bar{y}(x)$.

2.2 Теорема Коши и Пеано

Обоснование метода Эйлера дает

Теорема 2.1 *(Коши и Пеано о существовании и единственности решения)*

Если функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна в прямоугольнике

$$D = \{(x,y) \mid \quad x \in [x_0 - a, x_0 + a], y \in [y_0 - b, y_0 + b]\}$$

и удовлетворяет в D условию Липшица

$$\mid f(x,y_1) - f(x,y_2) \mid \leq N \mid y_1 - y_2 \mid, \tag{2.3}$$

где N - постоянная, то существует единственное решение $y = \bar{y}(x)$ уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.4}$$

при

$$x \in [x_0 - H, x_0 + H], \tag{2.5}$$

удовлетворяющее $y_0 = \bar{y}(x_0)$. Здесь

$$H < \min(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}), \tag{2.6}$$

$$M = \max_{(x,y)\in D} f(x,y).$$

Поясним условия теоремы. Соотношения (2.5), (2.6) задают пределы изменения аргумента x, при которых интегральная кривая $\bar{y}(x)$ гарантированно будет оставаться в области D.

РИС.

Интегральная кривая может выйти из области D через ее горизонтальные или вертикальные границы.

Пусть кривая $y = \bar{y}(x)$ пересекает верхнюю горизонтальную границу при $x = x_1$, $x_0 < x_1 < x_0 + a$ (Рис.**??**). Изменение угла α касательной к кривой $\bar{y}(x)$ ограничено неравенством $-M < \tan\alpha < M$.

Так как $\tan\tilde{\alpha} = \dfrac{b}{x_1 - x_0} \leq \tan\alpha_1 = \dfrac{b}{H} = M$, то, очевидно, при $x_0 \leq x \leq x_0 + H$ кривая $\bar{y}(x)$ не выйдет за пределы области D, в которой выполняются условия теоремы.

Условие Липшица можно заменить более сильным, но легко проверяемым условием существования ограниченной по модулю частной производной $f_y(x, y)$ в области D. Если

$$| f_y(x, y) | \leq N \tag{2.7}$$

в области D, то, в соответствии с теоремой о конечном приращении, получим

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2) | = f_y(x, \xi) | y_1 - y_2 | . \tag{2.8}$$

Здесь ξ - промежуточное значение между y_1 и y_2, $y_1 \leq \xi \leq y_2$, и, следовательно, $(x, \xi) \in D$. Поэтому $| f_y(x, \xi) | \leq N$ и мы получаем условие Липшица

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2) | \leq N | y_1 - y_2 | .$$

Пример 1 *Для функции* $f(x, y) = xy^2$ *в области* $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ *имеем*

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2) | = | x(y_1^2 - y_2^2) | = | x(y_1 + y_2) || y_1 - y_2 | \leq 2 | y_1 - y_2 | .$$

Условие Липшица выполняется. Получим это условие с помощью теоремы о конечном приращении (2.8). Так как $f_y(x, y) = 2xy$, *то* $| f(x, y_1) - f(x, y_2) | = 2x\xi | y_1 - y_2 | \leq 2 | y_1 - y_2 |$.

Пример 2 *Для функции* $f(x, y) = | y |$

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2) | = || y_1 | - | y_2 || \leq | y_1 - y_2 | .$$

Условие Липшица выполняется, но функция $f(x, y)$ *не имеет производной при* $y = 0$. *Следовательно, условие (2.7) является более сильным, чем условие Липшица (2.3).*

Перейдем к доказательству теоремы существования и единственности.

Дифференциальное уравнение (2.1) с начальным условием

$$y(x_0) = x_0 \tag{2.9}$$

заменим эквивалентным интегральным уравнением

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) dt. \tag{2.10}$$

Действительно, дифференцируя уравнение (2.10) по переменной x, получаем уравнение (2.1). Подставляя в (2.10) значение $x = x_0$, получим (2.9). Построим ломанную Эйлера $y = y_n(x)$, проходящую через точку (x_0, y_0) с шагом $h_n = \dfrac{H}{n}$ на отрезке $x \in [x_0, x_0 + H]$, где n - целое положительное число.

Замечание 2.1 *Мы докажем существование решения на отрезке* $[x_0, x_0 + H]$*, аналогично доказывается существование решения на отрезке* $[x_0 - H, x_0]$.

Замечание 2.2 *Ломанная Эйлера не может выйти из области* D *при* $x \in [x_0, x_0 + H]$ *так как угловые коэффициенты ее звеньев по модулю меньше* M.

Докажем, что последовательность $y_n(x)$ сходится равномерно по x к некоторой функции $\bar{y}(x)$. По определению ломанной Эйлера, при $x_i \le x \le x_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $y_n'(x) = f(x_i, y_i)$.

Положим

$$y_n'(x) = f(x, y_n(x)) + [f(x_i, y_i) - f(x, y_n(x))] \tag{2.11}$$

и обозначим

$$\eta_n(x) = f(x_i, y_i) - f(x, y_n(x)), \quad x_i \le x \le x_{i+1}. \tag{2.12}$$

Для функции $\eta_n(x)$ имеем

$$\mid x - x_i \mid < h_n = \frac{H}{n}, \quad \mid y_n(x) - y_i \mid < M \cdot h_n,$$

так как $y_n'(x)$ не превосходит M в области D, заметим также, что $h_n \to 0$ при $n \to \infty$. В силу равномерной непрерывности $f(x, y)$ в D можно выбрать последовательность $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n > 0$, $n \to \infty$ так, что

$$\mid \eta_n(x) \mid = \mid f(x_i, y_i) - f(x, y_n(x)) \mid < \varepsilon_n \tag{2.13}$$

(то есть $\eta_k(x) < \varepsilon_n$ при $k > N(n)$).

Интегрируя (2.11), получим

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt + \int_{x_0}^{x} \eta_n(t)dt.$$

Заменим n на $n + m$,

$$y_{n+m}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n+m}(t))dt + \int_{x_0}^{x} \eta_{n+m}(t)dt.$$

Отсюда

$$| y_n(x) - y_{n+m}(x) | \leq \int_{x_0}^{x} | f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n+m}(t)) dt +$$
$$+ \int_{x_0}^{x} | \eta_n(t) | dt + \int_{x_0}^{x} | \eta_{n+m}(t) | dt,$$

при $x_0 \leq x \leq x_0 + H$.

Примем во внимание условие Липшица и неравенство (2.13), получим

$$| y_{n+m}(x) - y_n(x) | \leq N \int_{x_0}^{x} | y_{n+m}(t) - y_n(t) | dt + (\varepsilon_{n+m} + \varepsilon_n) \cdot H.$$

Следовательно,

$$\max_{x \in [x_0, x_0+H]} | y_{n+m}(x) - y_n(x) | \leq N \max \int_{x_0}^{x} | y_{n+m}(t) - y_n(t) | dt +$$
$$+ (\varepsilon_{n+m} + \varepsilon_n) \cdot H.$$

Откуда

$$\max_{x \in [x_0, x_0+H]} | y_{n+m}(x) - y_n(x) | \leq \frac{(\varepsilon_{n+m} + \varepsilon_n) H}{1 - N \cdot H}. \qquad (2.14)$$

Подчеркнем, что данное условие имеет смысл при

$$NH < 1. \qquad (2.15)$$

Величину $\dfrac{(\varepsilon_{n+m} + \varepsilon_n) H}{1 - N \cdot H}$ можно сделать меньше любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом номере $n > N_1(\varepsilon)$ в силу сходимости $\varepsilon_n \to 0$.

В результате мы получим

$$\max_{x \in [x_0, x_0+H]} | y_{n+m}(x) - y_n(x) | < \varepsilon$$

при $n > N_0(\varepsilon)$, то есть последовательность непрерывных функций $y_n(x)$ равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $\bar{y}(x)$ при $x \in [x_0, x_0 + H]$.

Докажем, что функция $\bar{y}(x)$ является решением интегрального уравнения (2.10). Перейдем в нем к пределу

$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t)) dt + \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} \eta_n(t) dt,$$

получим

$$\bar{y}(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} \eta_n(t)dt. \qquad (2.16)$$

Покажем, что последовательность $f(x, y_n(x))$ равномерно по x сходится к $f(x, \bar{y}(x))$.

Действительно,

$$| f(x, \bar{y}(x)) - f(x, y_n(x)) | \leq N \mid \bar{y}(x) - y_n(x) \mid < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$, если $| \bar{y}(x) - y_n(x) | < \delta(\varepsilon)$, при соответствующем выборе $\delta(\varepsilon)$. Но последнее неравенство выполняется при $n > N_1(\delta(\varepsilon))$, а номер N_1 не зависит от x.

Это и означает равномерную сходимость $f(x, y_n(x))$ и $f(x, \bar{y}(x))$.

Равномерная сходимость $f(x, y_n(x))$ к $f(x, \bar{y}(x))$ позволяет (ссылка на теорему в Фихтенгольце) перейти к пределу под знаком интеграла в (2.16). В результате получаем

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(t, y_n(t))dt + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} \eta_n(t)dt =$$
$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \bar{y}(t))dt.$$

Предел подынтегральных функций во втором интеграле равен нулю. Утверждение доказано.

Завершая доказательство теоремы, докажем единственность решения уравнения (2.10). Допустим существование двух решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$, имеющих различные значения в области $[x_0, x_0 + H]$, то есть

$$\max_{x\in[x_0, x_0+H]} | y_1(x) - y_2(x) | \neq 0.$$

Подстановка $y_1(x)$, $y_2(x)$ в (2.10) приводит к тождествам по переменной x

$$y_1(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt,$$
$$y_2(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt.$$

Отсюда получаем

$$\max_{x\in[x_0, x_0+H]} | y_1(x) - y_2(x) | \leq \max_{x\in[x_0, x_0+H]} \left| \int_{x_0}^{x} | f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) | \, dt \right| .$$

С помощью условия Липшица получаем

$$\max_{x\in[x_0,x_0+H]} \mid y_1(x)-y_2(x) \mid \leq N \max_{x\in[x_0,x_0+H]} \mid \int_{x_0}^{x} \mid y_1(t)-y_2(t) \mid dt \leq$$
$$\leq N \max_{x\in[x_0,x_0+H]} \mid y_1(x)-y_2(x) \mid \cdot \max_{x\in[x_0,x_0+H]} \mid \textstyle\int_{x_0}^{x} dt \mid=$$
$$= N \cdot H \max_{x\in[x_0,x_0+H]} \mid y_1(x)-y_2(x) \mid .$$

Мы получим соотношение

$$\max_{x\in[x_0,x_0+H]} \mid y_1(x)-y_2(x) \mid \leq NH \max_{x\in[x_0,x_0+H]} \mid y_1(x)-y_2(x) \mid .$$

Отсюда, в силу неравенства нулю $\max\limits_{x_0,x_0+H} \mid y_1(x)-y_2(x) \mid$, имеем

$$NH \geq 1.$$

Это неравенство противоречит условию теоремы (2.15). Противоречие устраняется лишь при $\max\limits_{x\in[x_0,x_0+H]} \mid y_1(x)-y_2(x) \mid= 0$, то есть если $y_1(x) = y_2(x)$, при $x \in [x_0, x_0 + H]$. Теорема доказана.

Замечание 2.3 *Теорема доказана для некоторой области значений аргумента $x_0 \leq x \leq x_0 + H$. В приложениях представляет интерес возможность продолжить решение на максимально широкую область изменения переменной x.*

Чтобы продолжить решение, построенное при доказательстве теоремы в области $[x_0, x_0+H]$ следует выбрать в качестве начальной точки $(x_0 + H, y(x_0 + H))$ и повторить рассуждение теоремы. Решение будет продолжено на отрезок длины H_1, на котором выполняется условия теоремы. Продолжая этот процесс, можно распространить решение на всю полуось $[x_0, \infty)$, или на всю ось $(-\infty, +\infty)$, если продолжать решение и в сторону меньших значений x, если не возникнут нарушения условий теоремы. Однако, интегральная кривая может оказаться непродолжаемой при приближении к точке, в которой нарушаются условия теоремы.

Пример 3

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(0) = 1$$

Интегрируя уравнение с учетом начального условия, находим $y^2 + x^2 = 1$, откуда $y = \sqrt{1-x^2} \geq 0$. Решение от точки $(0, 1)$ может *быть продолжено только до точек* $(-1,0)$, $(1,0)$. *В этих точках правая часть уравнения* $f(x,y) = -\dfrac{x}{y}$ *терпит разрыв.*

В заключение отметим следующее важное обстоятельство. Правую часть интегрального уравнения (2.10) представим в виде оператора A, действующего на функцию $y(x)$. Если $y(x)$ некоторая произвольно взятая непрерывная функция, то в результате чего получается в общем случае функция $v(x)$

$$v(x) = Ay(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t.y(t))dt. \tag{2.17}$$

Если оператор A действует на решение $\bar{y}(x)$ уравнения (2.10). то получим

$$A\bar{y}(x) = \bar{y}(x).$$

То есть оператор A не изменяет решение уравнения(2.10). В этом случае говорят, что $\bar{y}(x)$ есть неподвижная точка оператора A.

Многие теоремы существования и единственности решений уравнений различных типов, не обезательно дифференциальных, доказывается методами неподвижных точек.

Простейший из таких методов основан *на принципе сжимающих отображений.*

Перейдем к рассмотрению этого принципа.

2.3 Метрические пространства

Определение и примеры

В анализе для одних и тех же объектов используются различные понятия предела. Например, сходимость последовательности функций $f_n(x)$ к функции $f(x)$ может пониматься как поточечная сходимость, равномерная сходимость, сходимость в среднем и другая. Общим для всех определений является неограниченное "сближение"элементов f_n и f при $n \to \infty$. В зависимости от того, как определяется понятие "близости расстояния между элементами, получаются различные определения предела.

Поэтому целесообразно аксиоматизировать понятие расстояния между элементами произвольного множества и изучать общие свойства предельного перехода, отвлекаясь от специфики элементов множества.

Простейшим нетривиальным общим понятием расстояния между элементами множества является понятие *метрики.*

Определение 2.1 *Метрикой на множестве X (или расстоянием между $x, y \in X$) назовем вещественную функцию*

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}^1,$$

удовлетворяющую *трем аксиомам метрики:*

$$\begin{aligned}
&1.\ \text{неотрицательность и невырожденность}:\\
&\rho(x,y) \geq 0, \quad \rho(x,y) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = y,\\
&2.\ \text{симметричность}:\ \rho(x,y) = \rho(y,x),\\
&3.\ \text{аксиома треугольника}: \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y). \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Определение 2.2 *Множество X с определенной на нем метрикой ρ назовем метрическим пространством $\langle X, \rho \rangle$.*

Приведем некоторые примеры метрических пространств.

1. Множество вещественных чисел $\mathbb{R}^1$ с метрикой $\rho(x,y) = |x-y|$.

2. Пространство $\mathbb{R}^n$ с элементами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_i - вещественные числа, $x_i \in \mathbb{R}^1$, $i = 1, \dots, n$, и метрикой

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Замечание 2.4 *Неравенство треугольника следует из неравенства Коши-Буняковского*

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2) \cdot (\sum_{i=1}^{n} b_i^2).$$

3. Пространство $\mathbb{C}[a,b]$ всех непрерывных вещественных функций $x(t)$, заданных на отрезке $[a,b]$, с расстоянием

$$\rho(x,y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|, \quad x(t), y(t) \in \mathbb{C}[a,b].$$

4. Пространство $\mathbb{L}_2$ вещественных функций $x(t)$, заданных на отрезке $[a,b]$, квадратично интегрируемых, $\displaystyle\int_a^b (x(t))^2 dt < \infty$, с расстоянием

$$\rho(x,y) = (\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt)^{1/2}.$$

Замечание 2.5 *Пространство $\mathbb{L}_2[a,b]$ называется гильбертовым. Неравенство треугольника следует из интегрального неравенства Коши-Буняковского*

$$(\int_a^b x(t)y(t)dt)^2 \leq (\int_a^b (x(t))^2 dt)(\int_a^b (y(t))^2 dt).$$

5. Пространство l_2 бесконечных последовательностей

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

с расстоянием

$$\rho(x,y) = (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^2)^{1/2}.$$

Замечание 2.6 *Пространство l_2 называется гильбертовым пространством последовательностей.*

Сходимость в метрическом пространстве

Пусть задано некоторое метрическое пространство X с метрикой $\rho(x,y)$, $x, y \in X$.

Определение 2.3 *Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ элементов метрического пространства X сходится к элементу $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что $\rho(x_n, x) < \varepsilon$, для всех $n > N(\varepsilon)$.*

Данное определение не отличается от известного определения предела последовательности вещественных чисел. Для обозначения предела используем стандартные обозначения: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Основные свойства предела в вещественном анализе сохраняются и в метрическом пространстве.

Например.

1. Если предел существует, то он единственный.

2. Из сходящей последовательности $x_n \to x$ можно извлечь сходящуюся последовательность $x_{nk} \to x$.

3. Предел суммы (произведения) равен сумме (произведению) пределов, если последние существуют.

Понятие предела позволяет дать определение непрерывности функции, заданной в метрическом пространстве.

Пусть заданы метрические пространства $\langle X, \rho_X \rangle$ и $\langle Y, \rho_Y \rangle$.

Определение 2.4 *Функция*

$$A : X \to Y$$

называется непрерывной в точке x_0 *пространства* X*, если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что* $\rho_Y(Ax, Ax_0) < \varepsilon$*, когда* $\rho_X(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$*,* $\forall x \in X$*.*

При вычислении пределов в различных задачах используются признаки сходимости. Например, в теории пределов последовательностей вещественных чисел выполняются признаки Коши, Даламбера и некоторые другие.

В метрическом пространстве $\langle X, \rho \rangle$ общего вида существование признаков сходимости не предполагается. Такая общность ограничивает набор свойств и область приложений метрических пространств.

Естественно выделить класс метрических пространств, в которых выполняется какой-либо признак сходимости.

В качестве такового выбирают признак сходимости Коши, играющий важную роль во многих теоремах анализа.

Метрические пространства, в которых выполняются признак сходимости Коши, называется *полными*. Сформулируем точные определения.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Определение 2.5 *Последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*,* $x_n \in X$*, называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* $N(\varepsilon)$*, что*

$$\rho(x_{n'}, x_{n''}) < \varepsilon, \quad \text{\textit{если}} \quad n', n'' > N(\varepsilon).$$

Замечание 2.7 *Сходящаяся последовательность фундаментальна.*

Действительно, если $x_n \to x$, $n \to \infty$, то при $n > N(\varepsilon)$ $\rho(x_n, x) < \varepsilon$, тогда

$$\rho(x_{n'}, x_{n''}) \leq \rho(x_{n'}, x) + \rho(x, x_{n''}) < 2\varepsilon.$$

Определение 2.6 *Метрическое пространство $\langle X, \rho \rangle$ называется полным, если в нем всякая фундаментальная последовательность имеет предел.*

Важнейшим примером полного метрического пространства является множество вещественных чисел $\mathbb{R}^1$. Действительно, если $|x_n - x_m| \to 0$ при $n, m \to \infty$, то $x_n \to x \in \mathbb{R}^1$ согласно признаку сходимости Коши.

Евклидово n - мерное пространство $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_i \in \mathbb{R}^1$, $i = 1, \dots, n$, с метрикой $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ также является полным. Действительно, пусть $x^{(l)} = (x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \dots, x_n^{(l)})$, $l = 1, 2, \dots, \infty$, является фундаментальной последовательностью:

$$\rho(x^{(l)}, x^{(m)}) < \varepsilon, \quad \text{если} \quad l, m > N(\varepsilon),$$

то есть

$$\sum_{i=1}^n (x_i^{(l)} - x_i^{(m)})^2 < \varepsilon^2.$$

Отсюда следует:

$$(x_i^{(l)} - x_i^{(m)})^2 < \varepsilon^2, \quad \text{или} \quad |x_i^{(l)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon.$$

Это, в свою очередь, означает, что последовательность вещественных чисел $x_i^{(l)}$ при фиксированном i является фундаментальной и имеет предел в соответствии с признаком Коши:

$$x_i^{(l)} \to x_i, \quad \text{при} \quad l \to \infty.$$

Отсюда получаем, что последовательность $x^{(l)} \in \mathbb{R}^n$ сходится, то есть $x^{(l)} \to x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ при $l \to \infty$.

Принцип сжимающих отображений

Перейдем к формулировке и доказательству принципа сжимающих отображений.

Пусть задано метрическое пространство $\langle X, \rho \rangle$ и отображение $A : X \to X$.

Определение 2.7 *Отображение $A : X \to X$ называется сжимающим, если существует вещественное число α, $0 < \alpha < 1$, такое, что $\forall x, y \in X$*

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha \rho(x, y). \tag{2.19}$$

Следствие 2.1.1 *Сжимающее отображение непрерывно: если $x_n \to x$, то $Ax_n \to Ax$.*

Действительно, $\forall \varepsilon > 0$, $\rho(x_n, x) \le \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$. Тогда

$$\rho(Ax_n, Ax) \le \alpha\rho(x_n, x) < \alpha\varepsilon < \varepsilon.$$

Последнее неравенство справедливо вследствие $\alpha < 1$.

Определение 2.8 *Точка $x \in X$ называется неподвижной точкой отображения A, если*

$$Ax = x \tag{2.20}$$

Теорема 2.2 *(Принцип сжимающих отображений). Всякое сжимающее отображение A в полном метрическом пространстве $\langle X, \rho\rangle$ имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть A - сжимающее отображение в пространстве $\langle X, \rho\rangle$. Выберем в X произвольный элемент x_0, $x_0 \in X$, и составим последовательность

$$x_0, \quad x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1, \quad \ldots, \quad x_n = Ax_{n-1} \quad \ldots. \tag{2.21}$$

Покажем, что последовательность (2.21) фундаментальна. Пусть $m > n$. Применяя неравенство треугольника (2.18), получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{gathered}\rho(x_n, x_m) = \rho(A^n x_0, A^m x_0) \le \alpha\rho(A^{n-1}x_0, A^{m-1}x_0) \le \ldots \\ \ldots \le \alpha^n \rho(x_0, A^{m-n}x_0) \le \alpha^n\{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots \\ \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \le \alpha^n\{1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}\} \times \\ \times \rho(x_0, x_1) = \alpha^n \rho(x_0, x_1)\frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha}.\end{gathered} \tag{2.22}$$

Последнее неравенство получается суммированием геометрической прогрессии $1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-n-1}$. Наконец, отбрасывая в числителе α^{m-n}, получаем

$$\rho(x_n, x_m) \le \alpha^n \rho(x_0, x_1)\frac{1}{1 - \alpha}. \tag{2.23}$$

При $\alpha < 1$ $\alpha^n \to 0$ при $n \to \infty$, следовательно, $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n \to \infty$, что и доказывает фундаментальность последовательности $\{x_n\}$.

В силу полноты пространства $\langle X, \rho \rangle$ существует предел

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} A^n x_0.$$

Вследствие непрерывности отображения A

$$Ax = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty}(Ax_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

то есть предельная точка x является неподвижной для отображения A.

Докажем единственность неподвижной точки отображения A. Предположим, что существуют две неподвижные точки x, y, то есть $Ax = x$, $Ay = y$. Тогда

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y).$$

Если $\rho(x, y) \ne 0$, то $\alpha \ge 1$, что противоречит определению 2.7, в котором предполагается, что $\alpha < 1$. Противоречие снимается, если $\rho(x, y) = 0$, тогда по первой аксиоме метрики (определение 2.1) $x = y$.

Замечание 2.8 *Из формулы (2.22) следует*

$$\rho(x_n, x_m) \le \alpha^n \rho(x_0, x_1)\frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha}. \qquad (2.24)$$

Переходя к пределу $m \to \infty$, находим

$$\rho(x_n, x) \le \rho(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha}. \qquad (2.25)$$

Это выражение дает оценку точности n - го приближения элементов последовательности x_n к неподвижной точке x.

Замечание 2.9 *В определении 2.7 существенна независимость α от x и y. Нельзя условие (2.19) заменить более слабым*

$$\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y), \quad x, y \in X, \quad x \ne y. \qquad (2.26)$$

Рассмотрим, например, непрерывную функцию $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$,

$$\rho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y|.$$

Последнее равенство получается с помощью теоремы Лагранжа.

Если функция такова, что $|f'(\xi)| < 1$, то условие (2.26) выполнено. Может оказаться, что не существует $\alpha < 1$ такого, что $|f'(\xi)| \le \alpha$, тогда для функции $f(x)$ неподвижная точка может не существовать.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$f(x) = x + \operatorname{arcctg} x, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \le 1.$$

Неподвижная точка $\tilde{x}$ для функции $f(x)$ в соответствии с (2.20) определяется условием $\tilde{x} = f(\tilde{x})$, или $\tilde{x} + \operatorname{arcctg} \tilde{x}$, $\operatorname{arcctg} \tilde{x} = 0$. График функции $\operatorname{arcctg} x$ приведен на (Рис. **??**), из которого видно, что $\tilde{x} = +\infty$.

3 Существование и единственность решения дифференциальных уравнений

Принцип сжимающих отображений, как мы отметили выше, является эффективным методом доказательства существования и единственности решений уравнений различного вида. Он также дает фактический рецепт построения приближенного решения и оценку точности данного приближения.

Докажем существование и единственность решения дифференциального уравнения (2.1) с помощью принципа сжимающих отображений. Решение $y(x)$ уравнения (2.1), проходящее через точку (x_0, y_0) для функции $f(x,y)$, непрерывной в области $D = \{(x,y)|x \in [x_0 - a, x_0 + a],\ y \in [y_0 - b, y_0 + b]\}$ определяется интегральным уравнением (2.10) в области $x \in [x_0 - h_0, x_0 + h_0]$, где $h_0 \le \min(a, b/M)$ будет выбрано ниже.

Будем рассматривать $y(x)$ как элемент полного метрического пространства $\mathbb{C}$ функций непрерывных на отрезке $[x_0 - h_0, x_0 + h_0]$

Метрика в пространстве $\mathbb{C}$ определяется выражением

$$\rho(y,z) = \max_{x \in [x_0 - h_0, x_0 + h_0]} |y(x) - z(x)|.$$

Данное пространство называется *пространством равномерной сходимости*, так как сходимость в пространстве $\mathbb{C}$ означает равномерную сходимость. Дифференциальное уравнение (2.1) с граничным условием $y_0 = y(x_0)$ эквивалентно интегральному уравнению (2.10)

$$y(x) = Ay(x), \tag{3.1}$$

где оператор A определен выражением (2.17).

$$Ay(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{3.2}$$

Так как

$$|\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|dt \leq Mh_0,$$

где $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x, y)$, то для

$$h_0 \leq \frac{b}{M} \tag{3.3}$$

функция $Ay(x)$ не выходит за границы области D при $x \in [x_0 - h_0, x_0 + h_0]$. Это позволяет многократно действовать оператором A на функцию $y(x)$. Найдем условие, при котором оператор A удовлетворяет условию сжатия.

$$\rho(Ay, Az) = \max_{x\in[x_0-h_0, x_0+h_0]} |\int_{x_0}^{x} [f(t, y(t)) - f(t, z(t))]dt|.$$

Принимая во внимание условие Липшица (2.3), получим

$$\rho(Ay, Az) \leq N \max_{x\in[x_0-h_0, x_0+h_0]} |y(x) - z(x)| \cdot \max |\int_{x_0}^{x} dx| =$$
$$= N \cdot h_0 \max_{x\in[x_0-h_0, x_0+h_0]} |y(x) - z(x)| = Nh_0\rho(y, z).$$

Последнее соотношение запишем в виде

$$\rho(Ay, Az) \leq \alpha\rho(y, z), \quad \alpha = Nh_0. \tag{3.4}$$

Оператор A является сжимающим, если

$$\alpha = Nh_0 < 1,$$

отсюда

$$h_0 < \frac{1}{N}. \tag{3.5}$$

Выбор

$$h_0 = \min(\frac{b}{M}, \frac{1}{N}) \tag{3.6}$$

обеспечивает одновременное выполнение условия (3.3) и условие сжатия оператора A, при котором существует единственное решение уравнения (3.1). Теорема доказана.

Исследуем вопрос о существовании и единственности решения системы уравнений

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \quad i = 1, \dots, n \tag{3.7}$$

$$y_i(x_0) = y_{0i}$$

с помощью принципа сжимающих отображений.

Запишем систему (3.7) в виде системы интегральных уравнений

$$y_i(x) = y_{0i} + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t), \dots, y_n(t))dt, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.8}$$

в предположении, что в области

$$\begin{gathered} D = \{(x, y_1, \dots, y_n) | x \in [x_0 - a, x_0 + a], \\ y_i \in [y_{i0} - b_i, y_{i0} + b_i], \quad i = 1, \dots, n\} \end{gathered} \tag{3.9}$$

1. Функции $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ непрерывны и ограничены, $|f_i| \leq M$,

2. Функции f_i удовлетворяют условию Липшица

$$\begin{gathered} |f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \dots, z_n)| \leq \\ \leq N \textstyle\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|. \end{gathered}$$

Будем рассматривать n - мерную вектор-функцию $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ как элемент пространства $\mathbb{C}^n$.

Здесь функции $y_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, непрерывны на отрезке

$$x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0,$$

$$h_0 = \min(a, \frac{b_1}{M}, \frac{b_2}{M}, \dots, \frac{b_n}{M}).$$

Расстояние в пространстве $\mathbb{C}^n$ определяется равенством

$$\rho(y, z) = \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in [x_0 - h_0, x_0 + h_0]} |y_i(x) - z_i(x)|. \tag{3.10}$$

Здесь $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$, $z(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))$ - две вектор-функции принадлежащие пространству $\mathbb{C}^n$. Пространство $\mathbb{C}^n$ с метрикой (3.10) является полным.

Запишем уравнение (3.8) в виде

$$y(x) = Ay(x).$$

Функция $Ay(x)$ принадлежит пространству $\mathbb{C}^n$, так как каждая ее компонента

$$y_{0i} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t))dt$$

непрерывна и не выходит за пределы области D (3.9).

Выясним условия, при которых оператор A является сжимающим

$$\rho(Ay, Az) = \sum_{i=1}^{n} \max_{x\in[x_0-h_0, x_0+h_0]} |\int_{x)}^{x} [f_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) -$$
$$- f_i(t, z_1(t), \dots, z_n(t))]dt| \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \max_{x\in[x_0-h_0, x_0+h_0]} | \int_{x_0}^{x} |f_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) -$$
$$- f_i(t, z_1(t), \dots, z_n(t))|dt| \leq$$
$$\leq N \sum_{i=1}^{n} \max_{x\in[x_0-h_0, x_0+h_0]} \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} |y_i(t) - z_i(t)|dt \leq$$
$$\leq N \sum_{i=1}^{n} \max_{x\in[x_0-h_0, x_0+h_0]} |y_i(x) - z_i(x)| \sum_{i=1}^{n} \max_{x\in[x_0-h_0, x_0+h_0]} | \int_{x_0}^{x} dt| \leq$$
$$\leq N \sum_{i=1}^{n} \max_{x\in[x_0-h_0, x_0+h_0]} |y_i(x) - z_i(x)| \cdot n \cdot h_0 =$$
$$= Nnh_0\rho(y, z).$$

Отсюда следует, что оператор A является сжатием, если

$$Nnh_0 = \alpha < 1. \tag{3.11}$$

Условие (3.11) обеспечивается выбором

$$h_0 \leq \frac{\alpha}{nN}.$$

Тогда уравнение (3.8) будет иметь единственное решение

$$y = \bar{y}(x) = (\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_n(x)).$$

Непрерывная зависимость решения от параметра и от начального условия

Дифференциальные уравнения, возникающие в приложениях, как правило, содержат параметры. В частности, уравнение первого порядка с параметром μ записывается в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu). \tag{3.12}$$

Естественно, решение этого уравнения также будет зависеть от параметра: $y = y(x, \mu)$.

Условия существования и единственности решения уравнения (3.12) и характер зависимости решения от параметра описывает теорема 3.1

Теорема 3.1 *Если функция $f(x, y, \mu)$ в уравнении (3.12) непрерывна по μ и в области $\mu \in [\mu_0, \mu_1]$ удовлетворяет условиям существования и единственности решения и постоянная N в условии Липшица не зависит от μ, то решение $y(x, \mu)$ уравнения (3.12), проходящее через точку (x_0, y_0), $y_0 = y(x_0, \mu)$, непрерывно зависит от μ.*

Для доказательства представим уравнения (3.12) в виде интегрального уравнения

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t), \mu)dt = Ay(x) \tag{3.13}$$

и будем строить решение $y = \bar{y}(x, \mu)$ с помощью последовательных приближений в соответствии с теоремой о сжимающих отображениях 2.2.

Так как постоянная N в условии Липшица не зависит от μ, доказательство не изменится. Последовательные приближения $y_n(x, \mu)$ непрерывны не только по x, но и по μ и равномерно сходятся к решению $\bar{y}(x, \mu)$, так как условие сжатия $\alpha = Nh < 1$ не зависит от μ. Тогда, в соответствии с теоремами о сходимости функциональных последовательностей [Фихтенгольц Г.М. т.II. No 431, с 430], решений $\bar{y}(x, \mu)$ непрерывно зависит от x и μ.

Замечание 3.1 *Число параметров, входящих в правую часть уравнения (3.12) может быть больше одного. Чтобы теорема осталась верной, следует, очевидно, потребовать непрерывность правой части по каждому из параметров и независимость постоянной Липшица N от каждого из них.*

Замечание 3.2 *Зависимость решения уравнения*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{3.14}$$

от начальных условий (x_0, y_0) можно свести к предыдущей задаче - изучению зависимости решения от параметров с помощью следующей замены:

$$x = t + x_0, \quad y(x) = z(t) + y_0. \tag{3.15}$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz(t)}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dz(t)}{dt}$$

и уравнение (3.14) запишется в виде

$$\frac{dz(t)}{dt} = f(t + x_0, z(t) + y_0), \quad z(0) = 0, \tag{3.16}$$

к которому можно применить теорему 3.1.

Замечание 3.3 *Аналогично можно доказать теоремы о непрерывной зависимости решения системы дифференциальных уравнений первого порядка от параметров и начальных данных.*

Анализ непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметров, входящих в уравнение, приводит к понятию *устойчивости* решения.

Поясним основную идею на примере уравнения (3.12).

Непрерывная зависимость решения от начальных условий (x_0, y_0) и параметра μ по условиям теорем ??? 3.1 имеет место при $x_0 \le x \le x_0 + h$, $\mu_1 \le \mu \le \mu_2$. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon, h, \mu_1, \mu_2)$ для двух решений $y(x, x_0, y_0, \mu)$, $y(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \mu)$, исходящих из двух близко расположенных в начальных точек (x_0, y_0), $(\bar{x}_)), \bar{y}_0)$, для которых

$$|x_0 - \bar{x}_0| < \delta(\varepsilon, h, \mu_1, \mu_2), \quad |y_0 - \bar{y}_0| < \delta(\varepsilon, h, \mu_1, \mu_2)$$

будет выполняться неравенство

$$|y(x, x_0, y_0, \mu) - y(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \mu)| < \varepsilon$$

при $x_0 \le x \le x_0 + h$. Если пытаться продолжать решение в область больших значений h, $h \to \infty$, то может оказаться, что $\delta(\varepsilon, h, \mu_1, \mu_2) \to 0$. То есть решения близкие при начальных значениях независимой переменной x не обязательно будут оставаться близкими при сколь угодно больших значениях x. Кроме того, близость решений при возрастании аргумента x может нарушится при выходе параметра из области $[\mu_1, \mu_2]$.

Решение уравнения (3.12), которое мало изменяется при произвольном возрастании аргумента x называют *устойчивым.*

Дифференцируемость решений

Свойства гладкости решения уравнения (2.1) определяются возможностями дифференцирования решения.

Теорема 3.2 *Если в окрестности точки x_0, y_0 функция $f(x, y)$ имеет непрерывные производные до k - го порядка включительно, то решение $y(x)$ уравнения (2.1)*

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)),$$

удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), имеет непрерывные производные до $k+1$ - го порядка включительно.

Доказательство.

Существование решения $y(x)$ предполагает и существование первой производной.

Подставим решение $y(x)$ в уравнение, получим тождество

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)). \tag{3.17}$$

В силу существования непрерывных производных правой части тождества (3.17), будут существовать и непрерывные производные решения

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y(x)),$$

аналогично

$$\frac{d^3y(x)}{dx^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f^2 + \\ + \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f).$$

Повторяя это рассуждение k раз, докажем утверждение теоремы.

Точки (x_0, y_0), в окрестности которых условия теоремы существования и единственности решения не выполняются, называются *особыми точками.*

Кривая, состоящая из особых точек называется *особой.*

Решение уравнения, состоящее из особых точек, называется *особым решением.*

Условия теоремы существования и единственности решения уравнения нарушается в точках (x, y) разрыва функции $f(x, y)$.

Замечание 3.4 *Уравнение* $dy/dx = f(x, y(x))$ *можно заменить уравнением*

$$\frac{dx(y)}{dy} = \frac{1}{f(x(y), y)}. \tag{3.18}$$

Поэтому, если в точке (x_0, y_0) *функция* $f(x_0, y_0)$ *обращается в бесконечность, то* $1/f(x_0, y_0) = 0$ *и правая часть уравнени (3.18) не имеет особенности.*

Таким образом, в задачах, в которых переменные y и x равноправны, особыми являются точки (x, y) разрыва функций $f(x, y)$, $1/f(x, y)$.

Пример 1 *Для уравнения* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x}$ *особой является точка* $(0, 0)$.

Уравнения, не разрешенные относительно производной

Уравнение, не разрешенное относительно производной имеет вид

$$F(x, y, y') = 0, \tag{3.19}$$

где $F(x, y, p)$ – гладкая функция своих аргументов.

Разрешая уравнение (3.19) относительно y', получим в общем случае несколько действительных решений (ветвей)

$$y' = f_i(x, y), \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Если каждое из уравнений $y' = f_i(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности (2.2), то для каждого из этих уравнений найдется единственное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$. Поэтому для уравнений вида (3.19) через некоторую точку (x_0, y_0) проходит не одна, а несколько интегральных кривых.

Свойство единственности решения уравнения (3.19), удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, обычно понимается в том смысле, что через данную точку (x_0, y_0) по данному направлению проходит не более одной интегральной кривой уравнения $F(x, y, y') = 0$.

Например, для решений уравнения $(\dfrac{dy}{dx})^2 - 1 = 0$ свойство единственности всюду выполнено, так как через каждую точку (x_0, y_0) проходят две интегральные кривые, но по различным направлениям. Действительно,

$$\frac{dy}{dx} = \pm 1, \quad y = x + c \quad \text{и} \quad y = -x + c.$$

Для уравнения $(y')^2 - (x+y)y' + xy = 0$ в точках прямой $y = x$ свойство единственности нарушено, так как через точки этой прямой проходят интегральные кривые уравнений $y' = x$ и $y' = y$ по одному и тому же направлению.(рис.).

Теорема 3.3 *Для уравнения*

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3.20}$$

существует единственное решение $y = y(x)$, $x_0 - h_0 \le x \le x_0 + h_0$, *где* h_0 *достаточно мало, удовлетворяющее условию* $y(x_0) = y_0$, *для которого* $y'(x_0) = y'_0$, *где* y'_0 *- один из действительных корней уравнения* $F(x_0, y_0, y') = 0$, *если в замкнутой окрестности точки* (x_0, y_0, y'_0) *функция* $F(x, y, y')$ *удовлетворяет условиям:*

1) $F(x, y, y')$ *непрерывна по всем аргументам;*

2) производная $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ *существует и отлична от нуля;*

3) существует ограниченная по модулю производная $\dfrac{\partial F}{\partial y}$,

$$|\frac{\partial F}{\partial y}| \le N_1.$$

Доказательство.
Согласно известной теореме о неявной функции можно утверждать, что условия 1) и 2) гарантируют существование единственной непрерывной в окрестности точки (x_0, y_0) функции $y' = f(x, y)$, определяемой уравнением (3.20) и удовлетворяющей условию $y'_0 = f(x_0, y_0)$. Остается проверить, будет ли функция $f(x, y)$ удовлетворять условию Липшица или более грубому условию $|\dfrac{\partial f}{\partial y}| \le N$ в окрестности точки x_0, y_0, так как тогда можно будет утверждать, что уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{3.21}$$

удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности и, следовательно, существует единственное решение уравнения (3.21), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, а вместе с тем существует единственная интегральная кривая уравнения (3.19), проходящая через точку (x_0, t_0) и имеющая в ней угловой коэффициент касательной y'_0.

Согласно теореме о неявной функции, при выполнении условий 1), 2), 3) производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ существует и может быть вычислена по правилу дифференцирования неявных функций.

Выразим $y' = f(x, y)$ и подставим в $F(x, y, y') = 0$ получим выражение $F(x, y, f(x, y)) = 0$, которое представляет собой тождество по x, y. Дифференцируя его по y, получим

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}},$$

откуда, принимая во внимание условия 2) и 3), следует, что $|\dfrac{\partial f}{\partial y}| \leq N$ в замкнутой окрестности точки (x_0, y_0).

Множество точек (x, y), в которых нарушается единственность решений уравнения (3.19) называется *особым* множеством.

В точках особого множества должно быть нарушено по крайней мере одно из условий теоремы 3.3. В прикладных задачах чаще всего нарушается условие 2) $\dfrac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$.

Если условия 1) и 2) выполнены, то в точках особого множества должны одновременно удовлетворяться уравнения

$$F(x, y, y') = 0, \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{3.22}$$

Исключая из этих уравнений y', получим уравнение

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{3.23}$$

которому должны удовлетворять точки особого множества.

Уравнение (3.23) определяет кривую, которая называется $p-$ *дискриминантной* кривой, так как уравнения (3.22) чаще записываются в виде $F(x, y, p) = 0$ и $\dfrac{\partial F}{\partial p} = 0$. Заметим, что точки особого множества могут быть только среди точек кривой $\Phi(x, y) = 0$.

Однако не в каждой точке $p-$дискриминантной кривой обязательно нарушается единственность решения уравнения (3.19), так как условия теоремы 3.3 достаточны для единственности решения, но не являются необходимыми, и следовательно, нарушение какого-нибудь условия теоремы не обязательно влечет за собой нарушение единственности.

Если какая-нибудь ветвь $y = \varphi(x)$ кривой $\Phi(x, y) = 0$ принадлежит особому множеству и в то же время является интегральной кривой, то она называется *особой интегральной кривой*, а функция $y = \varphi(x)$ называется *особым решением.*

Для нахождения особого решения уравнения (3.19) следует:

a) найти p–дискриминантную кривую, определяемую уравнениями

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 0,$$

b) путем непосредственной подстановки в уравнение (3.19) выяснить, есть ли среди ветвей p–дискриминантной кривой интегральные кривые,

c) если такие кривые есть, то проверить, нарушена ли в точках этих кривых единственность или нет.

Если единственность нарушена, то такая ветвь p- дискриминантной кривой является особой интегральной кривой.

Пример 2 *Имеет ли уравнение Лагранжа $y = 2xy' - (y')^2$ особое решение?*

Условия 1) и 3) теоремы существования и единственности выполнены. p-дискриминантная кривая определяется уравнениеми: $y = 2xp - p^2$, $2x - 2p = 0$, или, исключая p, $y = x^2$. Парабола $y = x^2$ не является интегральной кривой, так как функция $y = x^2$ не удовлетворяет исходному уравнению. Особого решения нет.

Определение 3.1 *Огибающей семейства кривых*

$$\phi(x, y.c) = 0 \tag{3.24}$$

назовем кривую, которая в каждой своей точке касается некоторой кривой семейства (3.24) и каждого отрезка которой касается бесконечное множество кривых рассматриваемого семейства.