Основные понятия и обозначения

А.В. Шаповалов

НИ ТПУ

Томск, 2016

A plan of lectures

- Lecture 1: Introduction
- Lecture 2: Classification of a quasilinear PDF
- Lecture 3: Nonlinear heat transfer
- Lecture 4: The two phase Stefan problem

1 Основные понятия и обозначения

1.1 Система обыкновенных дифференциальных уравнений

Обобщая примеры, приведенные во Введении, рассмотрим процесс, состояние которого описывается совокупностью x из n вещественных чисел

$$x = (x_1, \ldots, x_n). \tag{1.1}$$

Величину x будем рассматривать как вектор вещественного n — мерного пространства, которое назовем *фазовым пространством* и обозначим через $\mathcal{M}$, $x \in \mathcal{M}$. Компоненты x_i, $i = 1, \ldots n$, будем считать *координатами* точки пространства $\mathcal{M}$.

Процесс называется *детерминированным*, если его состояние в любой момент времени определяется состоянием в некоторый данный (начальный) момент $t = t_0$. Состояние процесса в момент времени $t > t_0$ задается векторной функцией

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)). \tag{1.2}$$

Будем считать функции $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ бесконечно дифференцируемыми. Тогда значение вектор-функции x в момент $t + \Delta t$ при малом Δt можно представить в виде ряда

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{d^2x(t)}{dt^2}(\Delta t)^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\frac{d^kx(t)}{dt^k}(\Delta t)^k + \ldots. \tag{1.3}$$

Состояние $x(t+\Delta t)$ в момент $t+\Delta t$ определяется состоянием $x(t)$ в момент t, если первая производная $dx(t)/dt$ выражается через $x(t)$, т.е.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t), \tag{1.4}$$

или, для компонент $x_i(t)$,

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), t). \tag{1.5}$$

Здесь $f_i(x_1, \ldots, x_n, t)$, $i = 1, \ldots, n$, — заданные функции указанных аргументов.

Если в (1.4), (1.5) вектор-функция $x(t)$ неизвестна, то эти равенства следует рассматривать как *систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка*, определяющую $x(t)$.

Заданная вектор-функция $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t))$, подстановка которой в (1.4), (1.5) обращает эти равенства в тождества по переменной t, называется *решением* системы (1.4), (1.5).

Выражение (1.4) определяет второе слагаемое ряда (1.3) через $x(t)$. Дифференцируя (1.4) и подставляя производную $dx(t)/dt$ из (1.4), получим

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{\partial f(x(t),t)}{\partial t}|_{x(t)=\mathrm{const}} + \sum_{i=1}^{n} f_i(x(t),t)\frac{\partial f(x,t)}{\partial x_i}|_{x=x(t)}. \quad (1.6)$$

Выражение (1.6) позволяет записать третье слагаемое ряда (1.3) через $x(t)$. Продолжая процесс дифференцирования равенства (1.4) и подстановки первых производных, можно выразить все слагаемые ряда (1.3). Если сумму ряда удается вычислить, то тем самым находится $x(t+\Delta t)$.

В заключение этого пункта сформулируем основную задачу теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Она состоит в построении и исследовании решений системы (1.7), (1.8).

1.2 Векторное поле на фазовом пространстве

Обсудим более детально смысл системы (1.4) и ее решений с точки зрения геометрических представлений.

Для простоты возьмем частный случай системы (1.4), (1.5), в которой правая часть $f(x,t)$ не зависит явно от t, $f(x,t) = f(x)$. В этом случае ситема принимает вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) \quad (1.7)$$

и называется *автономной*. В общем случае система (1.4) *неавтономна*. В подробной записи для компонент функции $x(t)$ система имеет вид

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t)). \quad (1.8)$$

Функцию $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots\ f_n(x_1, \dots, x_n))$ можно рассматривать как n — мерный вектор, заданный в каждой точке $x = (x_1, \dots, x_n)$ фазового пространства. Другими словами, $f(x)$ есть векторная функция векторного аргумента $x \in \mathcal{M}$. Такая векторная функция называется *векторным полем* на $\mathcal{M}$.

1.3 Фазовый поток

Математической моделью детерминированного процесса является понятие фазового потока.

Сформулируем это понятие. Пусть $x_0 \in \mathcal{M}$ есть некоторая точка фазового пространства, которую будем рассматривать как начальное состояние системы. В результате интегрирования системы (1.8) получим векторную функцию $x(t, x_0)$, зависящую как от времени t, так и от начальной точки фазового пространства x_0. При каждом фиксированном t выражение $x(t, x_0)$ можно рассматривать как отображение фазового пространства в себя

$$g^t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}. \tag{1.9}$$

Если считать начальным момент времени $t = 0$, то g^t есть отображение точки x_0 за время t:

$$x(t, x_0) \equiv g^t x_0. \tag{1.10}$$

Зафиксируем точку x_0, тогда $x(t, x_0) = g^t x_0$ определяет *фазовую кривую* в фазовом пространстве $\mathcal{M}$.

Определение 1.1 *Семейство отображений g^t фазового пространства называется* фазовым потоком.

Фазовый поток порождается векторным полем $f(x)$ на фазовом пространстве. Под действием фазового потока начальная точка $x(0) = x_0$ перемещается в фазовом пространстве, проходя последовательно положения $x(t_1)$, $x(t_2)$, $x(t_3)$ в моменты $t_1 < t_2 < t_3$ и т.д.

Естественно назвать величину

$$v(x_0) = \frac{dx(t, x_0)}{dt} = \frac{d}{dt}|_{t=0} g^t x_0 \tag{1.11}$$

фазовой скоростью потока g^t в точке x_0.

Будем рассматривать векторное поле $f(x)$ как поле скоростей на фазовом пространстве $\mathcal{M}$, а вещественные функции $f_i(x)$ как компоненты векторного поля $f(x)$ в системе координат $(x_1, \ldots, x_n)$.

Тогда система (1.7) определяет фазовый поток g^t по полю скоростей $f(x)$.