Дифференциальные уравнения в экономических моделях

А.В. Шаповалов

НИ ТПУ

Томск, 2016

0.2 Дифференциальные уравнения в экономических моделях

Основу экономической теории составляют экономические законы, выраженные в виде количественных соотношений между величинами, характеризующими экономическую систему, или процесс. Такие законы дают возможность исследовать реальные экономические системы на основе математических моделей. Построение и изучение этих моделей составляет предмет математической экономики, которая рассматривает экономику как сложную динамическую систему.

Для изучения математических моделей экономики, помимо экономической науки, необходимо владеть математическими методами, среди которых аппарат дифференциальных уравнений играет важную роль. Экономические закономерности, как правило, представляют собой сложные нелинейные соотношения между экономическими величинами, явный вид которых непосредственно установить затруднительно. При наличии устойчивой закономерности малые изменения величин можно приближенно заменить дифференциалами. Тогда нелинейные соотношения между величинами, соответственно, заменяются более простыми линейными соотношениями между величинами и их производными. Эти соотношения представляют собой дифференциальные уравнения, с помощью которых строится математическая модель экономической системы или процесса. В виде дифференциальных уравнений записываются соотношения между экономическими переменными, такими как цены, заработная плата, капитал, процентная ставка и др. Рассмотрим некоторые примеры.

0.3 Равновесная цена в модели Вальраса

Рассмотрим процесс, в ходе которого предложение и спрос уравновешиваются. Предполагается, что при любой цене, если спрос превышает предложение, то цена будет расти, если предложение превышает спрос, то цена будет падать. Обозначим цену через p, величины спроса и предложения, соответственно, через $D(p, \alpha)$, $S(p)$, $\alpha-$ параметр, соответствующий экзогенным (внешним) факторам. Тогда изменение цены при изменении времени t можно описать следующим соотношением:

$$\frac{dp}{dt} = D(p, \alpha) - S(p).$$

Что можно увидеть из этого соотношения? Например, поставим вопрос о том, существует ли равновесная цена, не изменяющаяся со временем? Ее следует определять из условия

$$\frac{dp}{dt} = 0,$$

откуда

$$D(p, \alpha) - S(p) = 0.$$

Пусть p_0 есть решение данного уравнения. Разложим правую часть $D(p, \alpha) - S(p)$ в окрестности значения $p = p_0$, тогда изменение цены p при малом отклонении от равновесной цены $p = p_0$ будет определяться уравнением

$$\frac{dp}{dt} = (D_p - S_p)(p - p_0),$$

где опущены слагаемые выше первой степени степени величины $(p - p_0)$ и обозначено: $D_p = \dfrac{\partial D(p, \alpha)}{\partial p}|_{p=p_0}$, $S_p = \dfrac{\partial S(p)}{\partial p}|_{p=p_0}$. Решение последнего уравнения дается выражением

$$p(t) = p_0 + [p(0) - p_0] \exp[(D_p - S_p)t].$$

Пусть $(D_p - S_p) < 0$. Тогда, если начальная цена $p(0)$ отличалась от равновесной p_0, то при $t \to \infty$ имеет место предел $p(t) \to p_0$, т.е. в процессе обращения товара на рынке его цена будет приближаться к равновесной цене. В этом случае можно сказать, что то равновесная цена устойчива. Очевидно, с увеличением цены падает спрос ($D_p < 0$) и увеличивается предложение, т.е. $S_p > 0$. В этих условиях существует равновесная цена. Данная модель предсказывает рост предложения при росте спроса на данный товар, выраженного в виде роста цены на товар.

Если $(D_p - S_p) > 0$, то цена $p(t)$ будет отклоняться от равновесной в ту или другую сторону. В этом случае равновесная цена неустойчива. В соответствии с положениями экономической теории, при неустойчивой цене данная модель не дает разумных предсказаний.

0.4 Модель Р. Со́лоу

Рассмотрим упрощенную экономическую модель Р. Со́лоу, в которой экономическая система производит один универсальный продукт [1]. Этот продукт может потребляться и инвестироваться в производство. Такая модель отображает важнейшие макроэкономические аспекты процесса воспроизводства.

Обозначим через X валовый общественный продукт, I — объем инвестиций, L — число занятых в производстве, K — объем производственных фондов, C — объем фондов непроизводственного потребления. Будем считать все величины зависящими от непрерывного времени t, которое измеряется в годах. Это представляется оправданным, так как, например, число занятых $L(t)$ можно установить в любой день, а фонды $K(t)$ определить посредством инвентаризации. Обозначим через ν годовой темп прироста числа занятых в производстве, тогда

$$\frac{dL}{dt} = \nu L$$

и, следовательно, $L(t) = L_0 e^{\nu t}$, где $L_0 = L(0)$ - есть начальное условие. Износ и инвестиции за год обозначим, соответственно, μK и I. Тогда прирост фондов за время Δt есть

$$\Delta K = -\mu K \Delta t + I \Delta t,$$

откуда в пределе $\Delta t \to 0$ имеем $dK/dt = -\mu K + I$, $K(0) = K_0$. В модели Со́лоу предполагается, что промежуточный продукт пропорционален валовому и равен aX. Инвестиция $I = \rho(1-a)X$. Годовой выпуск определяется линейно-однородной производственной функцией $X = F(K, L)$ заданного вида (линейная однородность означает: $F(qK, qL) = qF(K, L)$). Тогда модель Со́лоу в абсолютных показателях записывается в виде следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + \rho(1-a)F(K, L), \tag{0.1}$$

причем непроизводственные фонды $C = (1-\rho)(1-a)F(K, L)$. Введем относительные показатели

$k = \dfrac{K}{L}$ – фондовооруженность,
$x = \dfrac{X}{L}$ – производительность труда,
$c = \dfrac{X}{L}$ – среднее потребление на одного занятого (среднедушевое потребление).

Подставим в уравнение (0.1) $K = Lk$, $L = L_0 e^{\nu t}$ и учтем свойство линейной однородности производственной функции $F(K, L)$, полагая $F(K, L)/L = F(K/L, 1) = F(k, 1) = f(k)$. Тогда уравнение (0.1) примет вид

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho(1 - a)f(k), \quad \lambda = \mu + \nu, \quad k(0) = k_0, \quad k_0 = K_0/L_0. \tag{0.2}$$

Уравнение (0.2) представляет собой модель Со́лоу в удельных показателях.

Данная модель описывает различные режимы экономики, включая устойчивый рост, а также позволяет проанализировать переход к устойчивому росту.

0.5 Модель управления ресурсами

Рассмотрим задачу управления ресурсами на примере модели, предложенной К. Кларком для анализа управления рыболовством [2, 3] . Обозначим общий объем популяции рыб через $x(t)$, а норму отлова через $h(t)$. Пусть естественный прирост популяции описывается функцией $F(x)$, тогда баланс изменения популяции можно записать в виде следующего соотношения:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - h(t). \tag{0.3}$$

Обозначим через E величину трудовых затрат на единичный отлов, так что норма отлова пропорциональна трудовым затратам и природным запасам:

$$h = Ex. \tag{0.4}$$

В данной модели, несмотря на ее простоту уже содержатся нетривиальные выводы. Например, можно найти равновесную численность популяции x^*. Положив $dx(t)/dt = 0$, для x^* получим уравнение

$$F(x^*) = Ex^*.$$

Тогда поддерживаемый объем улова Y задается выражением $Y = Ex^*$. Кривая воспроизводства $F(x)$ может иметь нелинейный вид, определяемый условиями существования популяции. Воспроизводство популяции предполагает возрастание функции $F(x)/x$ в некотором интервале $0 < x < K^*$. Для биологических популяций характерно, что для малых x, например, в интервале $0 < x < K_0 < K^*$, воспроизводство невозможно. Функция $F(x)/x$ в этой области убывает и описывает критическое (отрицательное) воспроизводство. K_0 называют минимальным уровнем жизнеспособности популяции.

Параметр E в данной модели является управляющим, он посредством трудовых затрат регулирует уровень величины Y при равновесном воспроизводстве. Модель позволяет обнаружить, что при определенном значении E воспроизводство популяции нарушается, что приводит к ее исчезновению.

0.6 Упрощенная модель делового цикла Кейнса

Рассмотрим динамическую экономическую систему, в которой x_1 обозначает национальный доход, x_2 - процентную ставку, $I(x_1, x_2)$ - функция спроса на инвестиции $(\partial I/\partial x_1 > 0, \partial I/\partial x_2 < 0)$, $S(x_1, x_2)$ - функция сбережений $(\partial S/\partial x_1 > 0, \partial S/\partial x_2 > 0)$, $L(x_1, x_2)$ — суммарный спрос на деньги $(\partial L/\partial x_1 > 0, \partial L/\partial x_2 < 0)$, L_S - предложение денег (постоянная величина), α_1, α_2 - параметры, выражающие реакцию агентов на отклонение системы от состояния равновесия. Упрощенная модель делового цикла, предложенная Кейнсом [4], описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha_1\{I(x_1, x_2) - S(x_1, x_2)\}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha_2\{L(x_1, x_2) - L_S\}. \end{aligned} \tag{0.5}$$

В модели отражены очевидные факты, что превышение спроса на инвестиции над сбережениями приводит к возрастанию дохода и наоборот. Кроме того, если спрос на деньги выше, чем их предложение, то ставка прибыли растет. Условия, налагаемые на функцию I,

$\partial I/\partial x_1 > 0$, $\partial I/\partial x_2 < 0$, означает, что инвестиции находятся в прямой зависимости от объема выпуска продукциии в обратной от процентной ставки. Рост национального дохода или процентной ставки будет побуждать население увеличивать сбережения ($\partial S/\partial x_1 > 0$, $\partial S/\partial x_2 > 0$). При росте производства или уменьшении процентной ставки спрос на деньги возрастает. Как видно из описания модели, в ее основе лежат линейные (пропорциональные) зависимости между основными экономическими величинами, описывающими процесс. Несмотря на простоту формулировки, модель Кейнса (0.5) достаточно содержательна. Она описывает, в частности, состояние равновесия, а также экономические циклы.

0.7 Динамический выбор вида транспорта

Рассмотрим модель одной транспортной задачи, в которой в каждый момент времени должно быть выполнено определенное количество перевозок D, распределенное между несколькими видами транспорта. Для простоты положим, что речь идет о двух видах транспорта, например, муниципальным транспортом и маршрутными такси. При желании можно увеличить число видов транспорта и усложнить условия перевозок. Пусть x_i, $i = 1, 2$, обозначает количество перевозок, выполняемых i-м видом транспорта, в момент времени t

$$x_1(t) + x_2(t) = D. \tag{0.6}$$

Потребитель осуществляет перераспределение объемов перевозок между различными видами транспорта за счет выбора. Обозначим через $D_i - x_i$ изменение количества перевозок, осуществляемых i-м видом транспорта за единичный интервал времени в момент времени t за счет выбора вида транспорта, так что

$$x_i(t + \Delta t) - x_i(t) = (D_i - x_i)\Delta t.$$

С другой стороны, $x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + \dfrac{dx_i(t)}{dt}\Delta t + o(\Delta t)$, откуда следует:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = D_i - x_i(t). \tag{0.7}$$

Обозначим через $A_i(x) = A_i(x_1, x_2)$ предпочтительность i-го вида транспорта, так что

$$D_i(x) = \frac{DA_i(x)}{A_1(x) + A_2(x)}. \tag{0.8}$$

Динамика определяется тем, как заданы зависимости $A_i(x_1, x_2)$. Определим предпочтительность i-го вида транспорта через скорость перевозки v_i, положив

$$A_i = v_i. \tag{0.9}$$

Предположим далее, что вследствие износа муниципального транспорта и ограниченных инвестиций скорость перевозок этим видом транспорта снижается при увеличении нагрузки на него, тогда как скорость перевозки маршрутными такси, первоначально повышается за счет притока инвестиций, а затем снижается вследствие перегрузки транспортных магистралей. Эти тенденции отражают зависимости:

$$v_1 = \frac{1}{a + bx_1}, \quad v_2 = \frac{px_2^n}{c + qx_2^r}. \tag{0.10}$$

Подставляя (0.8), (0.9), (0.10) в (0.7), получим следующую систему уравнений, описывающую динамику перевозок:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{D(a + bx_1)^{-1}}{(a + bx_1)^{-1} + px_2^n(c + qx_2^r)^{-1}} - x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{Dpx_2^n(c + qx_2^r)^{-1}}{(a + bx_1)^{-1} + px_2^n(c + qx_2^r)^{-1}} - x_2. \end{aligned} \tag{0.11}$$

Системы (0.5), (0.11) являются частными случаями системы

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2; \alpha_1, \ldots, \alpha_k), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2; \alpha_1, \ldots, \alpha_k), \end{aligned} \tag{0.12}$$

в которой x_1, x_2 являются динамическим переменными, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — параметрами.