Министерство образования Российской Федерации
Томский политехнический университет

А. П. Зайцев

ОСНОВЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Томск 2000

УДК 62-52

Зайцев А.П. Основы теории автоматического управления: Учебное пособие. Томск: Изд. ТПУ, 2000. – 152 с.

В учебном пособии в краткой форме изложены теоретические вопросы по автоматическому управлению техническими системами. Содержит сведения по основным разделам ТАУ: основные понятия теории автоматического управления; математическое описание звеньев и систем; типовые динамические звенья; стационарные режимы, устойчивость и качество САУ; структурно-параметрический синтез САУ; нелинейные, импульсные и цифровые САУ.

Учебное пособие подготовлено на кафедре электропривода и автоматизации промышленных установок ТПУ в соответствии с рабочей программой по ТАУ.

Печатается по постановлению Редакционно-издательского Совета Томского политехнического университета.

Рецензенты:

Обрусник В. П. – доктор технических наук, профессор кафедры промышленной электроники ТУСУРа.

Бейнарович В. А. – доктор технических наук, профессор кафедры комплексной информационной безопасности ЭВС ТУСУРа.

Темплан 2000

ГЛАВА 1
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Автоматическое управление

Замену действий человека в рабочих операциях технологических процессов называют *механизацией*. Для правильного выполнения рабочих операций последними необходимо управлять (обеспечивать порядок выполнения действий, выделение ресурсов и т.д.). Эти функции выполняют *операции управления*. Совокупность управляющих операций образует *процесс управления*.

Замену действий человека в операциях управления называют *автоматизацией*, а технические устройства, выполняющие эту функцию, - *автоматическими устройствами.* Совокупность технических средств – машин, орудий труда, средств механизации, выполняющих технологический процесс, - является *объектом управления*. Совокупность средств управления и объекта образует *систему управления*. Систему, в которой все рабочие и управляющие операции выполняют автоматические устройства без участия человека, называют *автоматической системой.* Систему, в которой автоматизирована только часть операций, называют *автоматизированной системой.*

Любой технический процесс характеризуется совокупностью физических величин, называемых *координатами*, а иногда *параметрами* процесса. Термин «параметр» в этом смысле не следует применять, так как им обычно обозначают константы в математическом описании отдельных звеньев системы.

Алгоритм функционирования устройства (системы) – это совокупность предписанных действий, приводящих к правильному выполнению технического процесса в этом устройстве.

Совокупность предписаний, определяющих характер воздействий извне на объект управления с целью осуществления его алгоритма функционирования, называют *алгоритмом управления.* Процесс реализации воздействий, соответствующих алгоритму управления, называют *управлением.* В большинстве случаев управление не может полностью компенсировать влияние внешних возмущений на систему в каждый момент времени, поэтому алгоритм функционирования управляемой системы выполняется лишь приближенно.

Рассмотрим схему взаимодействия объекта управления (ОУ), управляющего устройства (УУ) и внешней среды (рис. 1.1). Физическая величина $\boldsymbol{x(t)}$, которая характеризует состояние объекта и которую целенаправленно изменяют или поддерживают постоянной в процессе управления, называют *управляемой величиной (или управляемой координатой, управляемой переменной).*

Управляемой величиной может служить физическая величина, которая либо измеряется на выходе объекта, либо вычисляется косвенно. Управляемыми величинами первого типа могут быть, например, температура, давление, напряжение, скорость и т.д. Примерами величин второго типа служат коэффициент полезного действия энергетической установки, соотношение двух величин.

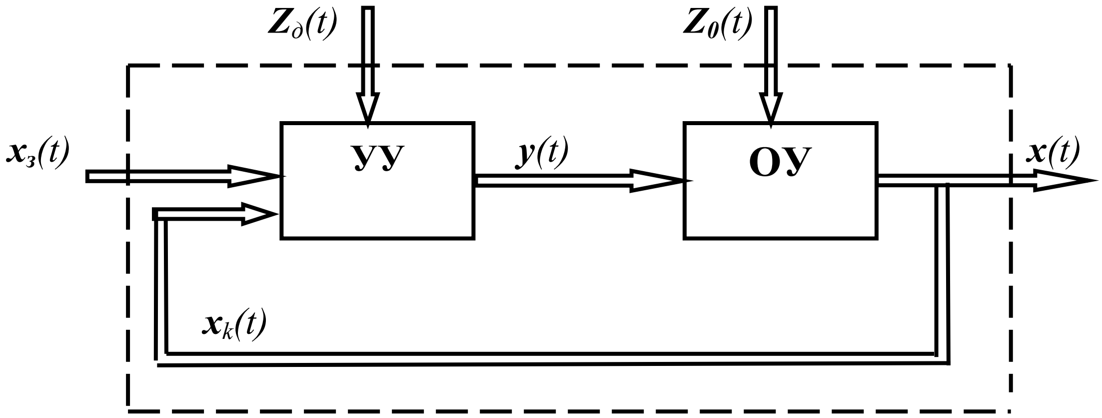


Рис. 1.1. Обобщенная структура автоматической системы управления

Если состояние управляемого объекта управления определяется несколькими величинами $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$, то принято говорить об n-мерном векторе состояния объекта $\boldsymbol{x}(t)$. Объект в этом случае называют *многомерным*.

Управляемая величина является выходной величиной объекта и зависит от двух *входных воздействий: возмущающего* $\boldsymbol{Z}(t)$ и *управляющего* $\boldsymbol{y}(t)$. В общем случае эти воздействия могут быть также векторными величинами. Под действием возмущающих воздействий на систему управляемая величина отклоняется от заданного значения, и управляющее устройство должно выработать такое управляющее воздействие $\boldsymbol{y}(t)$, которое компенсировало бы влияние возмущений.

Кроме основного возмущения $\boldsymbol{Z}_0(t)$, действующего на объект, на работу системы может влиять дополнительное возмущение $\boldsymbol{Z}_д(t)$, приложенное к управляющему устройству УУ. Обычно такие возмущения возникают от нестабильности напряжения источников питания УУ, а также при изменении температурного режима и т.д.

Как показано на рис. 1.1, в самом общем случае на вход УУ, помимо *задающего воздействия* $\boldsymbol{x}_з(t)$, поступает также информация о текущем состоянии объекта в виде *контрольного воздействия* $\boldsymbol{x}_k(t)$, а в отдельных случаях – и информация о возмущающих воздействиях. УУ обрабатывает получаемую информацию по определенному заложенному в нем алгоритму. В результате на его выходе формируется управляющее воздействие.

На рис. 1.2 изображена функциональная схема одномерной системы автоматического управления (САУ), на которой показаны основные составные части управляющего устройства (УУ): *чувствительные устройства* (ЧУ), *вычислительное устройство* (ВУ) и *исполнительное устройство* (ИУ).

Чувствительные устройства (измерительные устройства) служат для измерения переменных $\boldsymbol{x(t)}$, $\boldsymbol{x_З(t)}$, $\boldsymbol{Z(t)}$.

Вычислительное устройство реализует алгоритм работы управляющего устройства, соответствующим образом обрабатывая поступающую от чувствительных устройств входную информацию. В простейшем случае оно осуществляет простые математические операции, а в более сложных случаях ВУ может представлять собой управляющую ЭВМ и даже комплекс таких машин.

Исполнительные устройства предназначены для непосредственного управления объектом, т.е. изменения его состояния в соответствии с сигналом, выдаваемым вычислительным устройством.

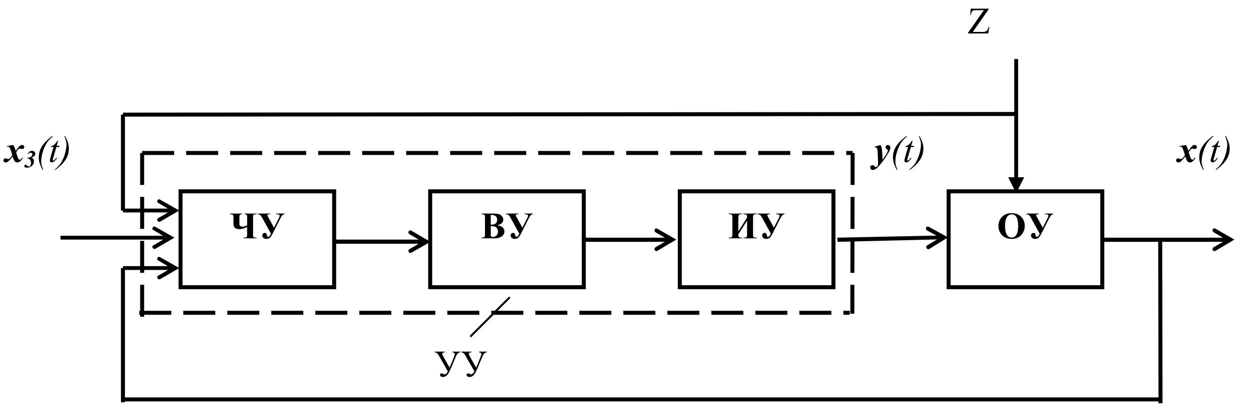


Рис. 1.2. Функциональная схема системы автоматического управления

Помимо перечисленных выше частей в состав УУ могут входить различные специальные согласующие устройства.

1.2. Фундаментальные принципы управления

В основе построения САУ лежат общие фундаментальные принципы управления, определяющие, каким образом согласуются алгоритмы функционирования и управления с фактическим функционированием или причинами, вызывающими отклонение функционирования от заданного. В технике известны и применяются три фундаментальных принципа: разомкнутого управления, компенсации и обратной связи.

Принцип разомкнутого управления состоит в том, что алгоритм управления вырабатывается только на основе заданного алгоритма функционирования и не контролируется по другим факторам – возмущениям или выходным координатам процесса (рис. 1.3, а). Задание $x_З(t)$ алгоритма функционирования может вырабатываться как специальным техническим устройством – задатчиком программы, так и выполняться заранее при проектировании системы и затем непосредственно использоваться при конструировании УУ. В последнем случае задатчик программы отсутствует. В обоих случаях схема имеет вид разомкнутой цепи, в которой основное воздействие передается от входа к выходу, как показано стрелками. Несмотря на очевидные недостатки (низкая точность управления при изменении возмущающих воздействий и отсутствие контроля выходной координаты) этот принцип используют очень широко.

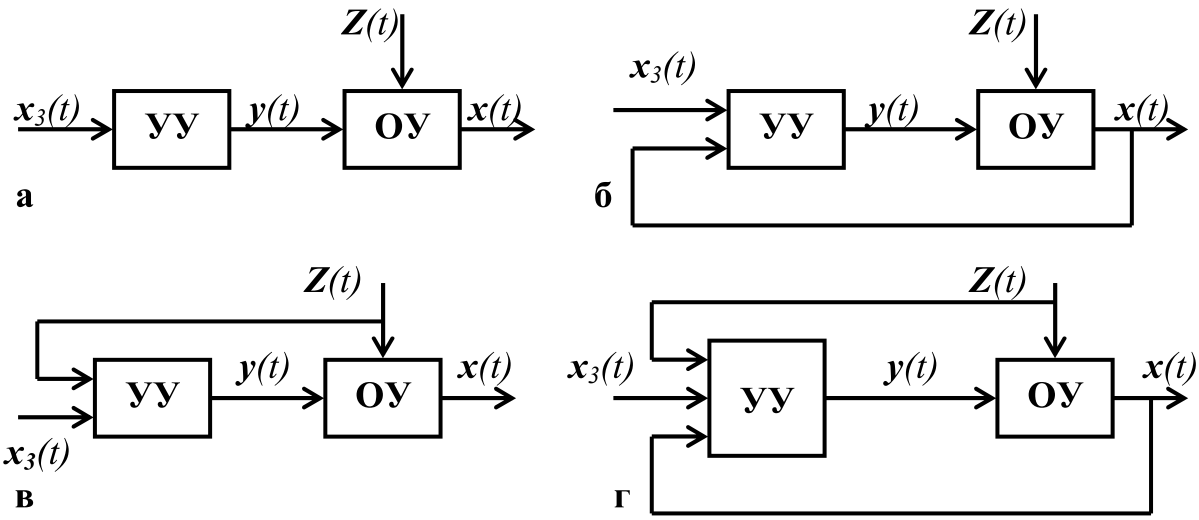


Рис. 1.3. Функциональные структуры систем управления с цепями воздействий: разомкнутой - а, в, замкнутой - б и комбинированной - г

Принцип компенсации (управление по возмущению). Если возмущающие воздействия настолько велики, что разомкнутая цепь не обеспечивает требуемой точности выполнения алгоритма функционирования, то для повышения точности вводят коррективы в алгоритм управления, которые компенсировали бы влияние измеряемого возмущения (рис. 1.3,в).

Принципиальная схема системы стабилизации напряжения электромашинного усилителя (ЭМУ) путем компенсации возмущения приведена на рис. 1.4. Задающее воздействие $u_в$ подается на задающую обмотку возбуждения $ОУ_1$ и определяет величину выходного напряжения ЭМУ. Возмущающим воздействием является ток нагрузки i ЭМУ, при увеличении которого (за счет уменьшения сопротивления нагрузки $R_н$) снижается выходное напряжение U из-за падения напряжения на сопротивлении продольной цепи якоря ЭМУ: $U=E-iR_я$, где $R_я$ – полное сопротивление цепи якоря, E – ЭДС ЭМУ. При увеличении тока якоря увеличивается пропорционально ему падение напряжения на дополнительном сопротивлении R, предназначенном для измерения возмущения. Это напряжение поступает на управляющую обмотку возбуждения ОУ$_2$ и увеличивает поток возбуждения Ф$_2$. Суммарный поток Ф=Ф$_1$+Ф$_2$ возрастает, и величина напряжения на выходе ЭМУ восстанавливается.

Если возмущающее воздействие не может быть непосредственно измерено, то его определяют косвенным путем, что приводит к снижению точности управления. Если же возмущающее воздействие измеряемо, то можно добиться его полной компенсации с нулевой ошибкой отклонения выходной координаты в статическом режиме.

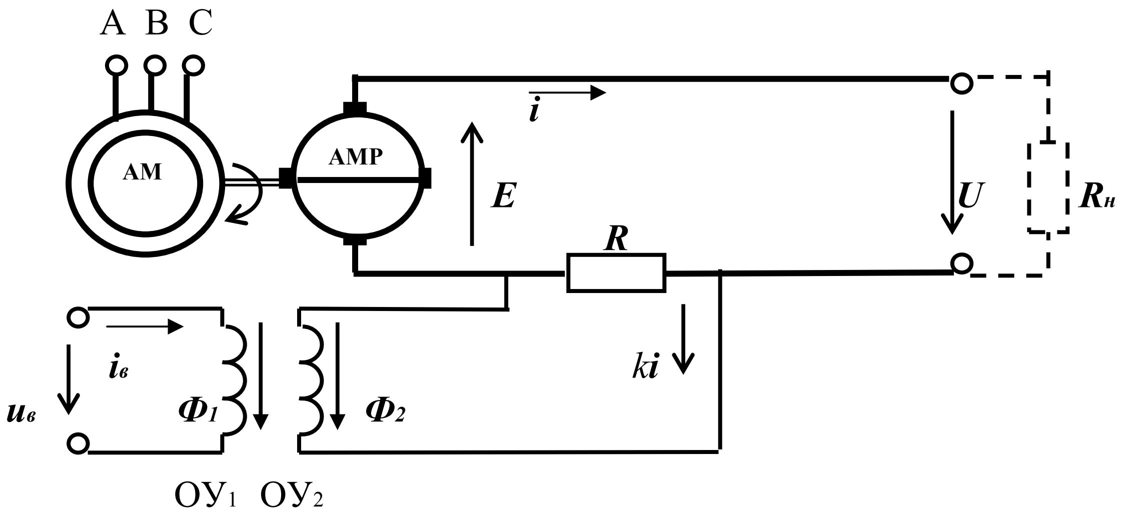


Рис. 1.4. Система стабилизации напряжения ЭМУ

Принцип обратной связи. Регулирование по отклонению. Систему можно построить и так, чтобы точность выполнения алгоритма обеспечивалась и без измерения возмущения. На рис. 1.3,в показана структура САУ, в которой коррективы в алгоритм управления вносятся по фактическому значению выходной координаты. На вход управляющего устройства поступают как внешнее (задающее) воздействие, так и внутреннее (контрольное). Внутреннее воздействие образует цепь отрицательной обратной связи по выходной координате и делает систему замкнутой.

Управляющее воздействие ***y(t)*** в замкнутой системе формируется в большинстве случаев в зависимости от величины и знака отклонения истинного значения выходной (управляемой) координаты от ее заданного значения:

$$y(t) = A_y[\varepsilon(t)], \qquad (1.1)$$

где $\varepsilon(t) = x_з(t) - x(t)$ – *сигнал ошибки* (называемый также сигналом рассогласования). Замкнутые системы называют часто «САУ по отклонению».

В замкнутой системе контролируется непосредственно выходная координата, и тем самым при формировании управляющих воздействий учитывается действие всех возмущений, влияющих на выходную координату. В этом заключается преимущество замкнутых систем. В то же время сам принцип действия замкнутых систем (принцип управления по отклонению) допускает нежелательные изменения выходной координаты: вначале возмущение должно появиться на выходе, система «почувствует» отклонение и лишь потом выработает управляющее воздействие, направленное на устранение отклонения. Такая инерционность снижает эффективность управления. Несмотря на определенные недостатки этот принцип имеет широкое применение.

На рис. 1.5 представлена принципиальная схема системы управления частотой вращения электродвигателя постоянного тока независимого возбуждения М. Управление двигателем осуществляется от электромашинного усилителя АМР, который приводится во вращение асинхронным двигателем (АМ). Частота вращения ω приводного двигателя измеряется датчиком скорости BR. Сигнал, пропорциональный частоте вращения, через усилитель (У) поступает на одну из обмоток управления ОУ2 в качестве сигнала главной отрицательной обратной связи по частоте вращения. Обмотка управления ОУ1 является задающей и определяет заданное значение частоты вращения. Так как обмотки управления включены встречно, то они же выполняют и функцию элемента сравнения. Потенциометр R предназначен для настройки коэффициента передачи цепи обратной связи.

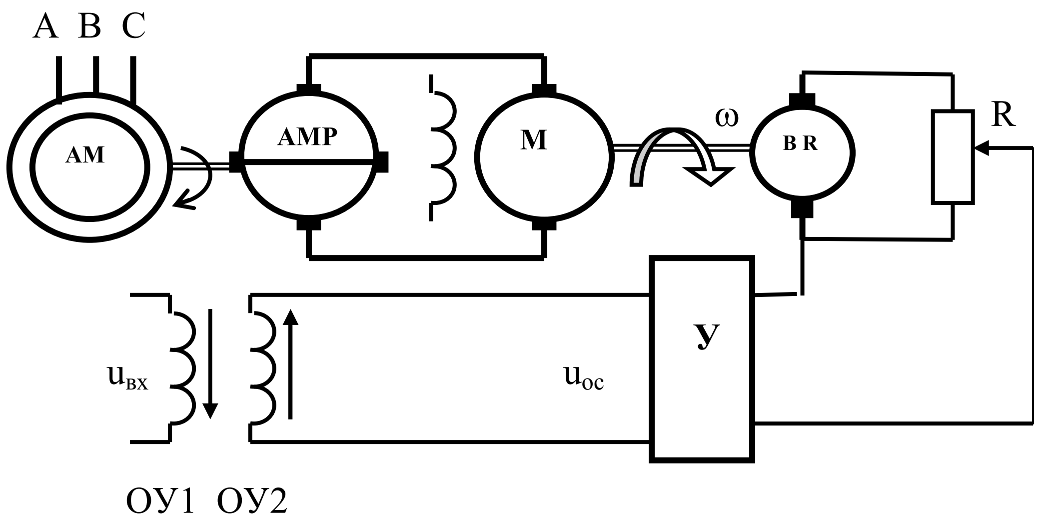


Рис. 1.5. Принципиальная схема замкнутой САУ частоты вращения

В ряде случаев эффективно применение *комбинированного управления* по возмущению и отклонению (см. рис. 1.3,г). Комбинированные регуляторы объединяют достоинства обоих принципов – быстроту реакции на изменение возмущений и точное регулирование независимо от того, какая причина вызвала отклонение.

1.3. Основные виды автоматического управления

Стабилизация. Системы поддержания постоянства управляемой величины называют также *системами стабилизации.* Желаемый закон в них имеет вид $x_з(t) = \text{const}$. Пример системы автоматической стабилизации напряжения генератора приведен на рис. 1.4.

Программное управление. При программном управлении алгоритм функционирования задан и можно применить специальное устройство, вырабатывающее $x_з(t)$, датчик программы. Таким образом, все схемы, показанные на рис. 1.3, в которых задающее воздействие формируется от датчика программы, относятся к классу систем программного управления. Программное управление можно осуществить по любому из фундаментальных принципов или с помощью их комбинации.

Следящие системы. В следящих системах алгоритм функционирования заранее неизвестен. Обычно регулируемая координата в таких системах должна воспроизводить изменение некоторого внешнего фактора, следить за ним. Так, антенна радиолокатора должна следить за положением самолета. Следящая система может быть выполнена в соответствии с любым фундаментальным принципом управления и будет отличаться от соответствующей системы программного управления тем, что вместо датчика программы в ней будет иметь место устройство слежения за изменением внешнего фактора.

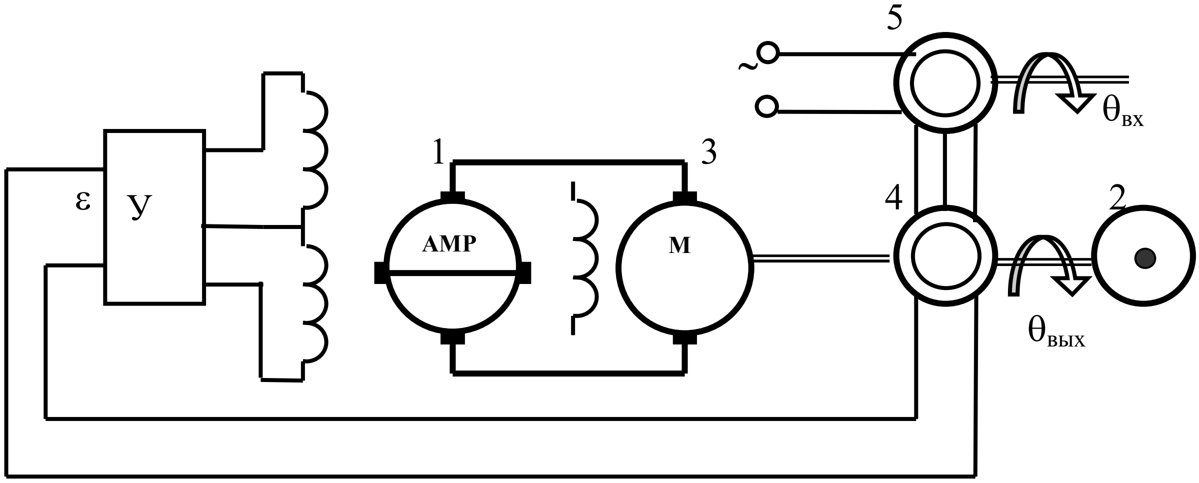


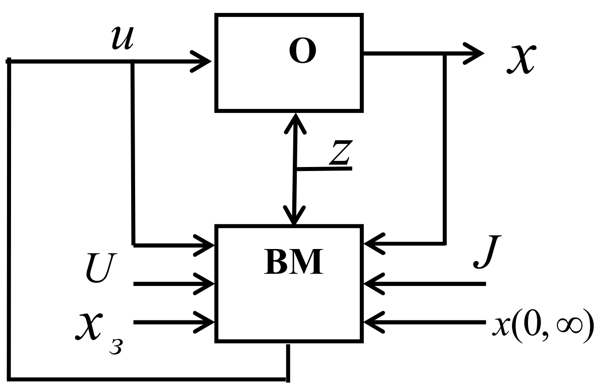
Рис. 1.6. Следящая система

В качестве примера следящей системы на рис. 1.6 приведена упрощенная схема отработки угла. Регулируемой величиной является угол поворота $\theta_{вых}$ управляемого объекта 2. Приводной двигатель 3 питается от ЭМУ 1. Входное воздействие подается на сельсин-датчик 5 в виде угла поворота $\theta_{вх}$ его ротора. Соединенные по трансформаторной схеме сельсин-датчик и сельсин-приемник 4, механически связанный с управляемым объектом, вырабатывают напряжение, пропорциональное рассогласованию $\varepsilon = \theta_{вх} - \theta_{вых}$ между входным и выходным валами следящей системы. Напряжение ошибки усиливается усилителем У и ЭМУ 1 и поступает на якорь исполнительного двигателя 3, вращающего одновременно объект 2 и ротор сельсина-приемника до тех пор, пока рассогласование не станет равным нулю.

Системы с поиском экстремума показателя качества. В ряде процессов показатель качества или эффективности процесса может быть выражен в каждый момент времени функцией текущих координат системы, и управление можно считать оптимальным, если оно обеспечивает поддержание этого показателя в точке максимума, например, настройку энергоустановки на максимальный коэффициент полезного действия. Такое управление обладает одной нежелательной особенностью: когда точка настройки под воздействием различных возмущений окажется смещенной от экстремума, неизвестно, в каком направлении следует воздействовать на регулирующий орган объекта, чтобы вернуть ее к экстремуму. Поэтому экстремальное управление начинают с поиска: сначала выполняют небольшие пробные движения в каком-то выбранном направлении, затем анализируют реакцию системы на эти пробы и после этого по результатам анализа вырабатывают управляющее воздействие в виде импульса, приближающего систему к экстремуму.

Оптимальное управление. Оптимальное управление применяется как в технических системах для повышения эффективности производственных процессов, так и в системах организационного управления.

В управлении динамическими техническими системами оптимизация чаще всего существенна именно для переходных процессов, в которых показатель эффективности зависит не только от текущих значений координат (как в экстремальном управлении), но и от характера изменения в прошлом, настоящем и будущем, и выражается некоторым функционалом от координат, их производных и, может быть, времени.



Нахождение оптимального управления в подобных системах требует решения достаточно сложной математической задачи методами вариационного исчисления или математического программирования. Таким образом, органической составляющей частью системы оптимального управления становится вычислительное устройство. Принцип поясняется на рис. 1.7.

Рис. 1.7. Оптимальное управление

На вход вычислительного устройства ВМ поступает информация о текущих значениях координат ***x*** с выхода объекта ***O***, об управлениях ***u*** с его входа, о внешних воздействиях ***z*** на объект, а также задание извне различных условий: значение критерия оптимальности ***J***, граничных условий ***x(0), x(∞)*** и т.д. Вычислительное устройство по заложенной в него программе вычисляет оптимальное управление ***u***. Оптимальные системы могут быть как разомкнутыми, так и замкнутыми

Адаптивные системы. Системы, автоматически изменяющие значение своих параметров или структуру при непредвиденных изменениях внешних условий на основании анализа состояния или поведения системы так, чтобы сохранялось заданное качество ее работы, называют *адаптивными системами.* Адаптивные системы с изменением значений параметров иногда называют *самонастраивающимися*, а системы с изменением структуры – *самоорганизующимися.*

Обычно адаптивная система содержит в качестве «ядра» схему, реализующую один из фундаментальных принципов управления, а *контур адаптации* пристраивают к ней как вторичный, осуществляющий коррекцию параметров. Контур адаптации, обычно состоящий из устройства измерения (ИУ), вычисления (ВУ) и управления (УУ), может быть разомкнут (рис. 1.8), если на его вход подается только входное воздействие, или замкнут (связь показана пунктиром), если он реагирует также и на выходную координату системы. Основной контур составляют объект О и регулятор Р.

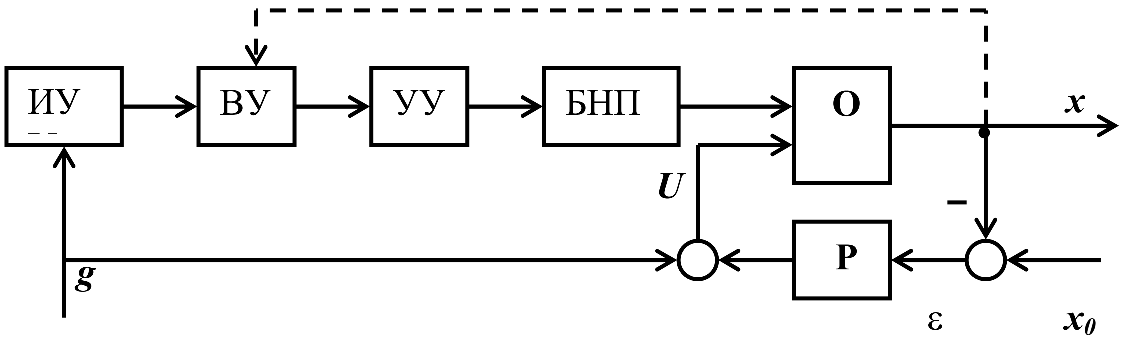


Рис. 1.8. Адаптивная САУ

Контур самонастройки воздействует на блок настройки параметров БНП, который может быть включен не только последовательно, как показано на рисунке, но и любым другим способом, например, в цепь обратной связи. Вычисление воздействий для коррекции параметров осуществляет ВУ в соответствии с программой.

Классификация САУ по другим признакам имеет более общий характер и слабо связана с фундаментальными принципами управления.

В зависимости от принадлежности источника энергии, при помощи которого создается управляющее воздействие, САУ могут быть прямого и непрямого действия. В *системах прямого действия* используется энергия управляемого объекта. В *системах непрямого действия* управляющее воздействие создается за счет энергии дополнительного источника.

По виду сигналов, действующих в системах, последние разделяют на *непрерывные* и *дискретные.* Дискретные системы, в свою очередь, разделяются на импульсные, релейные и цифровые.

САУ, у которых управляемая величина в установившемся режиме зависит от величины возмущающего воздействия, называются *статическими*, а САУ, у которых управляемая величина не зависит от возмущения, называются *астатическими.*

По виду дифференциальных уравнений, описывающих элементы систем, последние разделяют на линейные и нелинейные. В *линейной системе* все элементы описываются линейными алгебраическими и дифференциальными уравнениями. Если хотя бы один элемент системы имеет нелинейную зависимость выходной величины от входной, то вся система является *нелинейной.*

1.4. Основные законы регулирования

Законом регулирования называют математическую зависимость, в соответствии с которой управляющее воздействие на объект вырабатывалось бы безынерционным управляющим устройством.

Многие из законов регулирования, реализуемых различными регуляторами релейного, импульсного действия, экстремальными и т.п., рассматриваются далее. Здесь ограничимся рассмотрением наиболее распространенных законов, реализуемых регуляторами по отклонению непрерывного действия. В этих простейших законах управляющее воздействие линейно зависит от отклонения, его интеграла и первой производной по времени.

Пропорциональный закон (обозначаемый П): $\boldsymbol{y = k_p \varepsilon}$.

Регулятор, осуществляющий этот закон, называют пропорциональным. Постоянную k_p называют *коэффициентом передачи регулятора*, обратную величину – *статизмом регулятора.* С возрастанием статизма регулятора возрастает и статизм регулирования.

Интегральный закон (И):

$$y = \frac{1}{T} \int_0^t \varepsilon \, dt .$$

Постоянная T имеет размерность времени и ее называют *постоянной времени интегрирования.* Интегральный регулятор – астатический и именно с его помощью осуществляется астатическое регулирование.

Пропорционально-интегральный закон (ПИ):

$$y = k_p(\varepsilon + \frac{1}{T}\int_0^t \varepsilon dt).$$

Иногда его называют пропорциональным законом с интегральной коррекцией. Регулятор ПИ также обеспечивает астатическое регулирование. В этом можно убедиться, представив уравнение в дифференциальной форме как $dy/dt = k_p(d\varepsilon/dt + \varepsilon/T)$. В состоянии равновесия при постоянных воздействиях должно быть $dy/dt = 0$; $d\varepsilon/dt = 0$; $\varepsilon/T = 0$, откуда равновесие может иметь место лишь при $\varepsilon = 0$ (при нулевой ошибке регулирования).

Пропорционально- интегрально- дифференциальный закон (ПИД):

$$y = k_p(\varepsilon + \frac{1}{T_и}\int_0^t \varepsilon dt + T_д\frac{d\varepsilon}{dt}).$$

Постоянные $T_и$ и $T_д$, соответственно, называют *постоянными времени интегрирования и дифференцирования.* Регулятор ПИД также обеспечивает астатическое регулирование. Производную $d\varepsilon / dt$ вводят в закон регулирования для повышения качества процесса регулирования.

В заключение дадим общую характеристику процессов, протекающих в системах автоматического управления. Как и в любой динамической системе, процессы в автоматической системе делятся на установившиеся и переходные.

При рассмотрении процессов в САУ важное значение имеют понятия «устойчивость системы», «качество процесса управления» и «точность управления».

Устойчивость – это свойство возвращаться в установившееся состояние после того, как она была выведена из этого состояния каким-либо возмущением. Такую устойчивость называют асимптотической или устойчивостью в точке. Замкнутые САУ весьма склонны к потере устойчивости, что чаще всего проявляется в возникновении расходящихся колебаний. В этом случае система становится неработоспособной.

В нелинейных системах большое значение имеет устойчивость в некоторой области, характеризующаяся возвратом в заданную область при уменьшении внешнего воздействия до нуля.

Качество процесса управления характеризуется тем, насколько процесс управления близок к желаемому.

ГЛАВА 2
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Линейные дифференциальные уравнения

Наиболее общей и наиболее полной формой математического описания автоматических систем и их элементов является дифференциальное уравнение вида

$$a_0\, d^n y(t)/dt^n + a_1 d^{n-1} y(t)/dt^{n-1} + \ldots + a_n y(t) =$$

$$b_0\, d^m x(t)/dt^m + b_1 d^{m-1} x(t)/dt^{m-1} + \ldots + b_m x(t), \qquad (2.1)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – входная и выходная величины элемента или системы; a_i, b_i – коэффициенты уравнения.

Уравнение (2.1) устанавливает связь между входной и выходной величиной как в переходных, так и в установившихся режимах.

Коэффициенты дифференциального уравнения называются *параметрами.* Они зависят от различных физических констант, характеризующих скорость протекания процессов в элементах. Такими константами являются, например, массы движущихся частей, индуктивности и емкости электрических цепей, теплоемкости нагреваемых элементов.

Иногда параметры некоторых элементов систем изменяются во времени. Такую систему называют *нестационарной* или *системой с переменными параметрами.* Системой с переменными параметрами является, например, автоматическая система управления приводом поворота мощного экскаватора, если в процессе его поворота одновременно происходит выдвижения рукояти с ковшом.

В большинстве практических случаев коэффициенты уравнения существенно не изменяются и системы являются *системами с постоянными параметрами.* В дальнейшем будут рассматриваться только такие системы.

Для автоматических систем управления, описываемых линейным уравнением, справедлив принцип наложения или суперпозиции, согласно которому *изменение выходной величины $y(t)$, возникающее при действии на систему нескольких входных сигналов $x_i(t)$, равно сумме изменений $y_i(t)$ величины $y(t)$, вызываемых каждым сигналом в отдельности.*

Это свойство линейных систем имеет большое практическое значение, так как благодаря ему значительно облегчаются все расчеты.

Рассмотрим типовые формы записи линейного дифференциального уравнения (2.1), используемые в различных задачах теории автоматического управления.

Все физические переменные, входящие в уравнение, могут быть выражены в *относительных единицах.* Для этого каждое слагаемое делят на постоянную величину, имеющую размерность той переменной, которая входит в это слагаемое. Постоянные величины называют *базовыми.* В качестве базовых величин обычно принимают номинальные или установившиеся значения переменных y и x.

Удобной формой записи линейных дифференциальных уравнений является *символическая* или *операторная.* Переход к операторной форме осуществляют введением сокращенного условного обозначения операции дифференцирования: $d\ .\ .\ ./\ dt = p$. Соответственно, k-ю производную переменной y обозначают

$$d^k y(t)/dt^k = p^k y(t), \tag{2.2}$$

тогда уравнение (2.1) в символической форме будет иметь вид

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n) y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m) x(t). \tag{2.3}$$

Многочлены от p степени n и m, находящиеся в левой и правой частях уравнения (2.3), называются *дифференциальными операторами.* Каждый такой оператор устанавливает соответствие между функцией времени и определенной совокупностью производных этой функции. Многочлен

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n = D(p) \tag{2.4}$$

называют *собственным оператором,* а многочлен

$$b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m = K(p) \tag{2.5}$$

называют *входным оператором* или *оператором воздействия.*

Название «собственный оператор» обусловлено тем, что многочлен $D(p)$ характеризует собственное (свободное) движение элемента, т.е. движение при отсутствии внешних воздействий. Оператор $D(p)$ называют также *характеристическим.*

У всех реальных элементов и систем порядок наивысшей производной во входном операторе не может быть больше порядка наивысшей производной в собственном операторе, т.е. всегда $m \leq n$. Если это условие не выполняется, то уравнение соответствует физически нереализуемой системе.

Уравнения элементов невысокого порядка ($n < 3$) в теории автоматического управления принято записывать в так называемой стандартной форме. При *стандартной форме* записи уравнение преобразовывают таким образом, чтобы коэффициент при выходной величине был равен единице. При этом коэффициент перед входной величиной в правой части уравнения становится равным передаточному коэффициенту, а коэффициенты при производных выходной величины будут иметь размерность времени в степени, равной порядку соответствующей производной. Например, уравнение второго порядка

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)\, y(t) = (b_0 p + b_1)\, x(t) \tag{2.6}$$

путем деления всех членов на коэффициент a_2 может быть приведено к стандартной форме

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) y(t) = k(Tp + 1) x(t), \tag{2.7}$$

где $k = b_1/a_2$; $T = b_0 / b_1$; $T_1 = a_1/a_2$; $T_2^2 = a_0/a_2$.

Коэффициенты T, T_1, T_2 принято называть *постоянными времени,* характеризующими динамические свойства элемента.

Пример 1

Составить дифференциальное уравнение электрической цепи (рис.2.1).

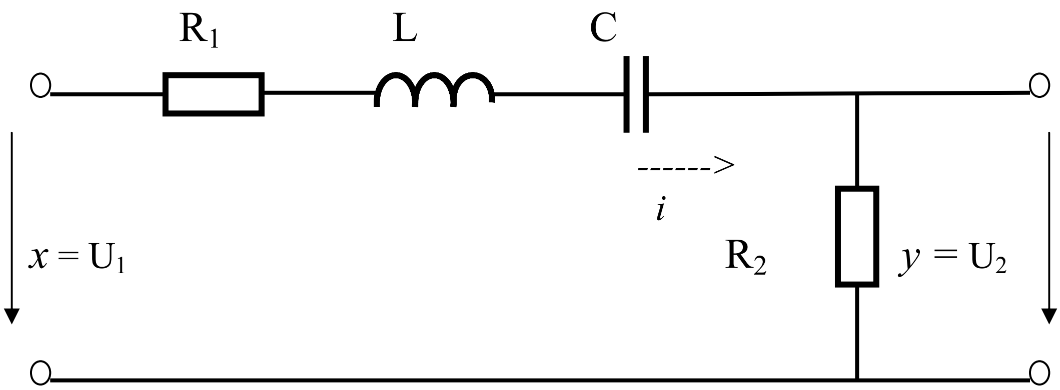


Рис.2.1. Схема одноконтурной электрической цепи

Решение. *Входной величиной для цепи является напряжение U_1, а выходной величиной – напряжение U_2. В динамических режимах по одноконтурной цепи протекает ток i. Выходное напряжение равно падению напряжения на сопротивлении R2. На основании второго закона Кирхгофа при нулевых начальных условиях составим уравнение:*

$$iR_1 + (1/C)\cdot\int i\, dt + L di/dt + iR_2 = U_1. \tag{1}$$

Выходное напряжение

$$U_2 = iR_2, \tag{2}$$

откуда определим значение тока

$$i = U_2 / R_2. \qquad (3)$$

Подставим (3) в (1):

$$(R_1/R_2)\cdot U_2 + (1/C)\cdot\int (U_2/R_2)\cdot dt + (L/R_2)\cdot dU_2/dt + U_2 = U_1. \qquad (4)$$

Уравнение (4) является интегро-дифференциальным и его необходимо привести к дифференциальной форме. После дифференцирования (4) получим:

$$(R_1/R_2+1)\cdot dU_2/dt + (1/R_2C)U_2 + (L/R_2)\cdot d^2U_2/dt^2 = dU_1/dt\ . \qquad (5)$$

Уравнение (5) приводится к стандартной форме:

$$T_2^2\, d^2U_2/dt^2 + T_1\, dU_2/dt + U_2 = T_3\, dU_1/dt\ , \qquad (6)$$

где $T_2^2 = LC;\ \ T_1 = C(R_1 + R_2);\ \ T_3 = R_2C.$

В операторной форме уравнение (6) представляется как

$$(\, T_2^2p^2 + T_1p + 1)U_2 = T_3pU_1. \qquad (7)$$

2.2. Временные характеристики

Дифференциальное уравнение является самой общей формой описания элемента и не дает наглядного представления о передаточных свойствах элемента. Наглядное представление об этих свойствах дает функция *y(t),* являющаяся решением дифференциального уравнения. Но одно и то же дифференциальное уравнение может иметь множество решений, зависящих от начальных условий и вида внешнего воздействия *x(t).* Поэтому принято динамические свойства элементов и систем характеризовать решением, соответствующим нулевым начальным условиям и одному из типовых воздействий. В качестве типового воздействия принимают единичное ступенчатое, дельта-функцию или гармоническое воздействие.

Наиболее наглядное представление о динамических свойствах элемента дает его переходная функция (характеристика). *Переходной функцией h(t)* называют изменение выходной величины *y(t)* во времени, возникающее после подачи на вход единичного ступенчатого воздействия, при нулевых начальных условиях. Переходная функция может быть задана в виде графика (рис.2.2,а) или аналитически.

Переходная функция *h(t)*, как и любое решение неоднородного дифференциального уравнения, имеет две составляющие: вынужденную $h_в(t)$ и свободную $h_c(t)$. *Вынужденная составляющая переходного процесса* представляет собой частное решение исходного уравнения. При ступенчатом воздействии вынужденная составляющая равна установившемуся значению выходной величины, которое для статических элементов может быть определено непосредственно из дифференциального уравнения (при нулевых производных):

$$h_в(t) = y(\infty) = b_m / a_n . \tag{2.8}$$

Свободная составляющая $h_c(t)$ может быть найдена как решение однородного дифференциального уравнения (при отсутствии одинаковых корней):

$$h_c(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k t}, \tag{2.9}$$

где λ_k– корни характеристического уравнения; C_k – постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий.

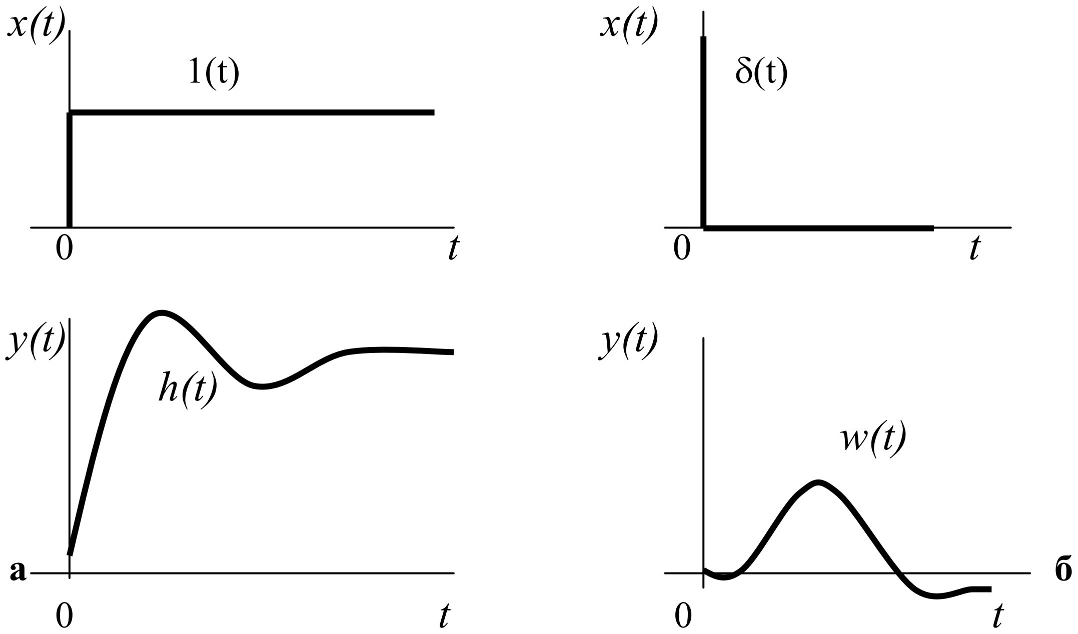


Рис. 2.2. Переходная (а) и импульсная (б) характеристики

Переходная функция определится как сумма вынужденной и свободной составляющих.

Характеристическое уравнение, соответствующее определенному дифференциальному уравнению, представляет собой алгебраическое уравнение, степень и коэффициенты которого совпадают с порядком и коэффициентами левой части этого уравнения. Для дифференциального уравнения, записанного в форме (2.6), характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{2.10}$$

Структура характеристического уравнения (2.10) совпадает со структурой левой части уравнения (2.3) и со структурой собственного оператора *D(p)* (см. (2.4)). Поэтому при записи характеристического уравнения часто вместо символа λ, обозначающего неизвестную переменную алгебраического уравнения, используют символ *p*. Но при этом *p* означает уже не операцию дифференцирования, а некоторое комплексное число, которое является решением (корнем) характеристического уравнения.

Для линейных элементов и систем, кроме принципа суперпозиции, справедливо еще одно общее правило: реакция *y(t)* на неединичное воздействие $a_0\mathbf{1}(t)$ равна $a_0\,h(t)$.

Импульсной переходной функцией w(t) называют изменение выходной величины *y(t),* возникающее после подачи на вход дельта-функции, при нулевых начальных условиях (рис. 2.2,б).

Импульсная переходная функция *w(t)* равна производной от переходной функции *h(t)*:

$$w(t) = dh(t)/dt, \tag{2.11}$$

и наоборот, переходная функция равна интегралу от импульсной переходной функции:

$$h(t) = \int w(t)dt. \tag{2.12}$$

Переходные характеристики называют также *временными.*

Пример 2

Для электрической цепи (рис. 2.3) определить переходную функцию.

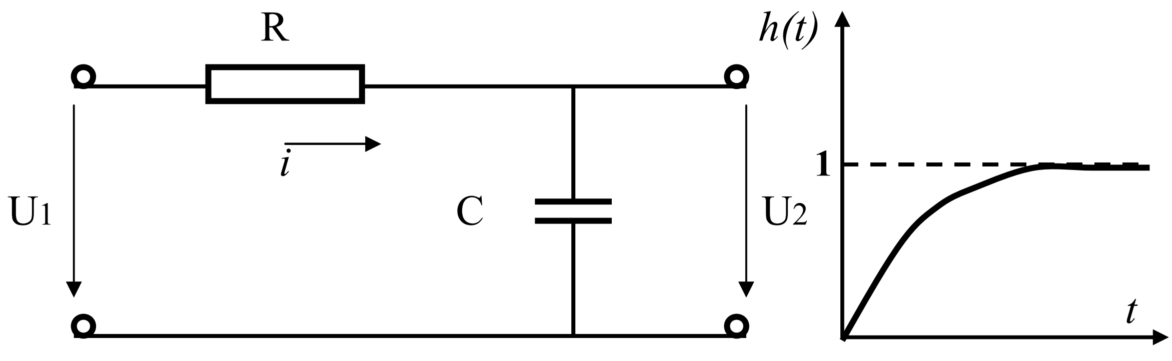


Рис. 2.3. Электрическая RC-цепь и ее переходная функция

Решение. *Электрической цепи соответствуют уравнения:*

$$\left.\begin{aligned} U1 &= iR + U2,\\ i &= CdU2/dt, \end{aligned}\right| \tag{1}$$

которые путем исключения промежуточной переменной i(t) приводятся к одному дифференциальному уравнению:

$$RC\ dU2/dt + U2 = U1 \tag{2}$$

или в стандартной форме:

$$(Tp + 1)\ U2 = U1, \qquad (3)$$

где T = RC.

Из (3) составляем характеристическое уравнение

$$T\lambda + 1 = 0 \qquad (4)$$

и определяем корень $\lambda = -1/T$.

Переходная функция $h(t) = h_в(t) + h_с(t)$. *При единичном воздействии* $U1=1(t)$ *вынужденная составляющая также равна единице:* $h_в(t)=1$. *Тогда*

$$h(t) = 1 + C\,e^{\lambda t} = 1 + C\,e^{-t/T}. \qquad (5)$$

При $t=0$ $h(0)=0$, *и тогда из (5) определим постоянную интегрирования* $C= -1$.

Окончательно имеем

$$h(t) = 1 - e^{-t/T}. \qquad (6)$$

Переходная функция показана на рис. 2.3.

2.3. Операционный метод и передаточная функция

Наиболее распространенным методом описания и анализа автоматических систем является операционный метод. В основе метода лежит *преобразование Лапласа:*

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}\,dt\,, \qquad (2.13)$$

которое устанавливает соответствие между функциями действительной переменной *t* и функциями комплексной переменной *p*. Функцию времени *x(t),* входящую в интеграл Лапласа, называют *оригиналом*, а результат интегрирования – функцию *X(p)* - *изображением* функции *x(t)* по Лапласу.

Преобразование Лапласа выполнимо лишь для таких функций времени, которые равны нулю при $t< 0$. Это условие обеспечивается обычно умножением функции *x(t)* на единичную ступенчатую функцию **1**(t). С математической и физической точек зрения такой искусственный прием вполне корректен, так как функции *x(t)* описывают процессы в автоматических системах, начинающиеся с некоторого момента времени, а этот момент времени всегда может быть принят за начало отсчета.

Наиболее важными свойствами преобразования Лапласа являются свойства, формулируемые обычно в виде правил:

при нулевых начальных условиях дифференцированию оригинала x(t) по переменной t соответствует умножение изображения X(p) на комплексную переменную p, а интегрированию оригинала соответствует деление X(p) на p.

Именно на этих двух свойствах основан операционный метод решения дифференциальных уравнений, который заключается в следующем. Исходное дифференциальное (или интегро-дифференциальное) уравнение, записанное относительно искомой выходной функции *y(t),* заменяют на алгебраическое уравнение относительно изображения *Y(p)* (это называется алгебраизацией дифференциального уравнения), затем, решая алгебраическое уравнение при заданном *X(p),* находят изображение *Y(p)* и, наконец, по изображению *Y(p)* определяют функцию *y(t)*. Этот обратный переход от изображений к оригиналам в большинстве практических задач может быть осуществлен при помощи таблиц, имеющихся в специальных справочниках по операционному исчислению.

Широкое распространение операционного метода в теории автоматического управления обусловлено тем, что с его помощью определяют так называемую передаточную функцию, которая является самой компактной формой описания динамических свойств элементов и систем.

Применим преобразование Лапласа к линейному дифференциальному уравнению (2.1), полагая, что до приложения внешнего воздействия система находилась в покое и все начальные условия равны нулю. Используя свойство линейности и правило дифференцирования, можно получить алгебраическое уравнение в изображениях:

$$D(p)\,Y(p) = K(p)X(p)\,, \tag{2.14}$$

где

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n,$$
$$K(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m.$$

Сравнивая уравнение (2.14) с уравнением в символической форме (2.3), можно заметить полную аналогию их структур. Различие уравнений лишь в значении символа *p*: в первом уравнении он обозначает операцию дифференцирования, во втором – комплексную переменную.

Введем понятие передаточной функции. *Передаточной функцией W(p)* называют отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{L\{y(t)\}}{L\{x(t)\}}\,. \tag{2.15}$$

Для системы, описываемой уравнением (2.1), передаточная функция равна отношению входного оператора *K(p)* к собственному оператору *D(p):*

$$W(p) = \frac{K(p)}{D(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}\,. \tag{2.16}$$

Как следует из (2.15) и (2.16), передаточная функция представляет собой некоторый динамический оператор, характеризующий прохождение сигналов через линейный элемент.

Рассмотрим основные свойства и особенности передаточных функций автоматических систем и их элементов.

Передаточная функция элемента связана с его импульсной переходной функцией преобразованием Лапласа:

$$W(p) = L\{w(t)\} = \int_0^\infty w(t)e^{-pt}dt \;. \tag{2.17}$$

Для реальных элементов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, передаточная функция представляет собой правильную рациональную дробь, у которой степень многочлена числителя меньше или равна степени многочлена знаменателя, т.е. $m < n$. Все коэффициенты передаточной функции – действительные числа, характеризующие параметры элемента.

Передаточная функция является функцией комплексной переменной $p = \alpha \pm j\beta$, которая может при некоторых значениях переменной p обращаться в нуль или бесконечность. Значение переменной p, при котором функция $W(p)$ обращается в нуль, называют *нулем*, а значение, при котором обращается в бесконечность, - *полюсом* передаточной функции. Очевидно, что нулями передаточной функции являются корни полинома $K(p)$, а полюсами – корни полинома $D(p)$. Корни полиномов числителя и знаменателя могут быть комплексными, мнимыми и вещественными числами (в том числе и нулевыми). Если эти корни известны, то передаточная функция может быть представлена в следующем виде:

$$W(p) = \frac{b_0(p-\gamma_1)(p-\gamma_2)\ldots(p-\gamma_m)}{a_0(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\ldots(p-\lambda_n)}\;, \tag{2.18}$$

где γ_i – корни многочлена $K(p)$ (нули $W(p)$); λ_i – корни многочлена $D(p)$ (полюсы $W(p)$).

По распределению нулей и полюсов передаточной функции на комплексной плоскости с координатами α и $j\beta$ можно судить о свойствах элемента или системы.

Пример 3

Найти передаточную функцию для электрической цепи, схема которой приведена в примере 1 (рис. 2.1). Входной величиной является напряжение U_1, а выходной – напряжение U_2.

Передаточную функцию электрических цепей удобно получить на основе операторной схемы замещения цепи для нулевых начальных условий.

Напомним, что операторное сопротивление индуктивности равно pL, емкости – 1/pC, а активного сопротивления – R. На рис. 2.4 приведена операторная схема замещения рассматриваемой цепи.

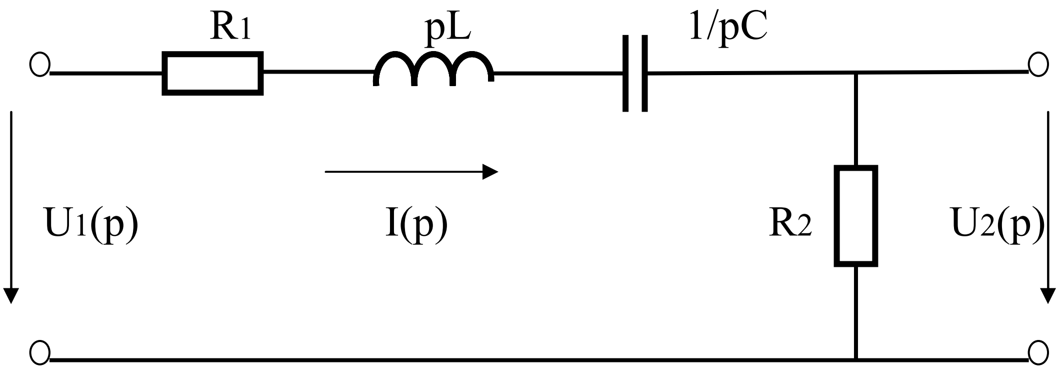


Рис. 2.4. Операторная схема замещения для определения W(p)

Решение. *Для операторной схемы замещения относительно изображений переменных справедливы законы Кирхгофа. На основании 2-го закона Кирхгофа составим уравнение*

$$(R_1 + pL + 1/pC + R_2)I(p) = U_1(p). \tag{1}$$

Изображение выходного напряжения с изображением тока связано соотношением

$$U_2(p) = I(p)R_2. \tag{2}$$

Исключив из уравнений промежуточную величину I(p), после преобразований получим

$$\{ LCp^2 + (R_1 + R_2)Cp + 1)U_2(p) = R_2CpU_1(p), \tag{3}$$

откуда определим передаточную функцию как

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{pR_2C}{LCp^2 + (R_1 + R_2)Cp + 1} = \frac{T_3 p}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} \ . \tag{4}$$

Значения постоянных времени T_1, T_2 и T_3 приведены в примере 1.

Тот же результат может быть получен и из уравнения (7) примера 1.

Пример 4

Определить передаточные функции по управляющему и по возмущающему воздействиям для электродвигателя постоянного тока с постоянными магнитами возбуждения (рис.2.5). Двигатель Д характеризуется сопротивлением цепи якоря R и индуктивностью L. На вход двигателя подается напряжение U (управление). При вращении двигателя с угловой частотой ω возникает ЭДС E.

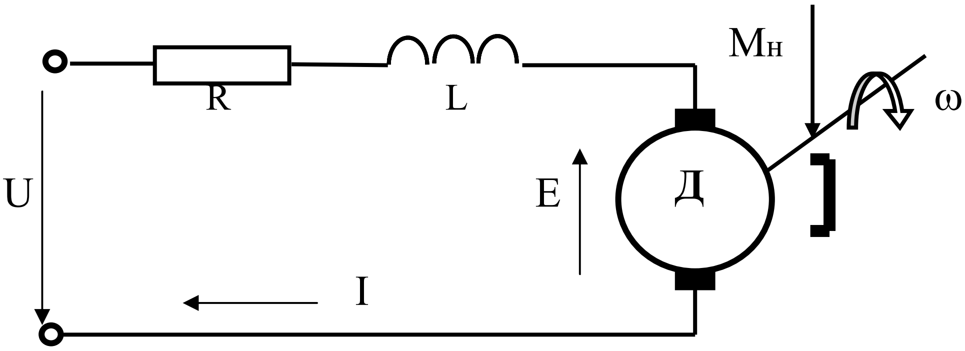


Рис. 2.5. Схема замещения двигателя

На валу электродвигателя действует момент нагрузки Мн (возмущение). Двигатель развивает момент Мд. За выходную величину примем угловую частоту вращения вала ω.

Решение. *Двигателю соответствует исходная система уравнений*

$$\left.\begin{aligned} &U = E + IR + LdI/dt,\\ &Jd\omega/dt = M_д - M_н,\\ &M_д = cI,\\ &E = c\omega, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где c – постоянный конструктивный коэффициент.

В операторной форме уравнения (1) запишутся как

$$\left.\begin{aligned} &U = E + (R + Lp)I,\\ &Jp\omega = M_д - M_н,\\ &M_д = cI,\\ &E = c\omega. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Систему уравнений (2) можно уже рассматривать как алгебраическую систему. Для вывода передаточных функций уравнения (2) приводятся к одному уравнению путем исключения промежуточных величин, при этом все переменные заменяются на их изображения по Лапласу: $U \to U(p)$, $I \to I(p)$, $\omega \to \omega(p)$, $M_н \to M_н(p)$, $M_д \to M_д(p)$, $E \to E(p)$. При определении передаточной функции по управлению $W_у(p)$ надо полагать $M_н(p)=0$, а при определении передаточной функции по возмущению $W_в(p)$ надо полагать $U(p)=0$.

Выполнив указанную последовательность действий, получим:

$$W_у(p) = \frac{\omega(p)}{U(p)} = \frac{c}{JLp^2 + JRp + c^2} = \frac{K_1}{T_я T_м p^2 + T_м p + 1}, \qquad (3)$$

$$W_в(p) = \frac{\omega(p)}{M_н(p)} = \frac{Lp + R}{JLp^2 + JRp + c^2} = \frac{K_2(T_я p + 1)}{T_я T_м p^2 + T_м p + 1}, \qquad (4)$$

где $T_я = L/R$; $T_м = JR/c^2$; $K_1 = 1/c$; $K_2 = R/c^2$.

Если необходимо составить подробную структурную схему электропривода с сохранением промежуточных величин, то преобразование системы уравнений (2) к одному уравнению не выполняется, а каждому уравнению ставится в соответствие своя передаточная функция. Запишем систему уравнений таким образом, чтобы в каждом из уравнений в левой части находилась выходная величина, а в правой части – входные воздействия, и определим передаточные функции:

$$(R + Lp)I(p) = U(p) - E(p),$$

$$Jp\omega(p) = M_д(p) - M_н(p),$$

$$M_д(p) = cI(p),$$

$$E(p) = c\omega(p).$$

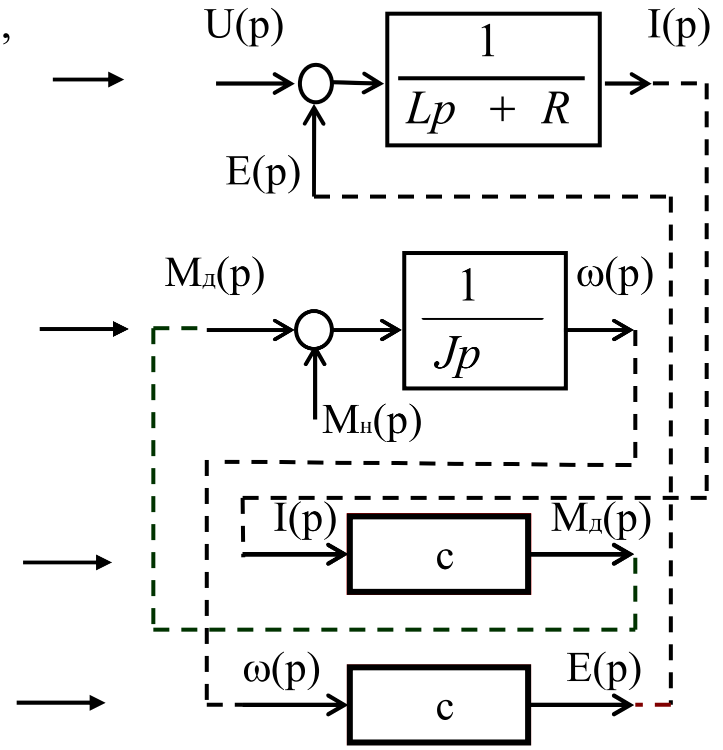


Рис. 2.6. Схема определения передаточной функции

Каждая из промежуточных переменных в систему уравнений входит дважды – один раз как входная, а второй раз как выходная. Соединив входные и выходные одноименные величины (пунктирные линии), получим подробную структурную схему двигателя. В упорядоченном виде она представлена на рис. 2.7.

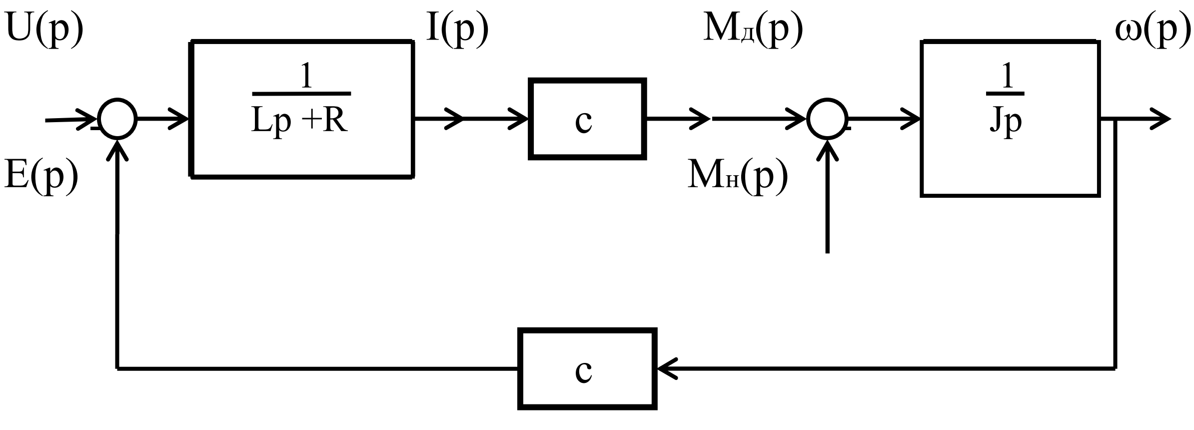


Рис. 2.7. Структурная схема двигателя

2.4. Частотные характеристики

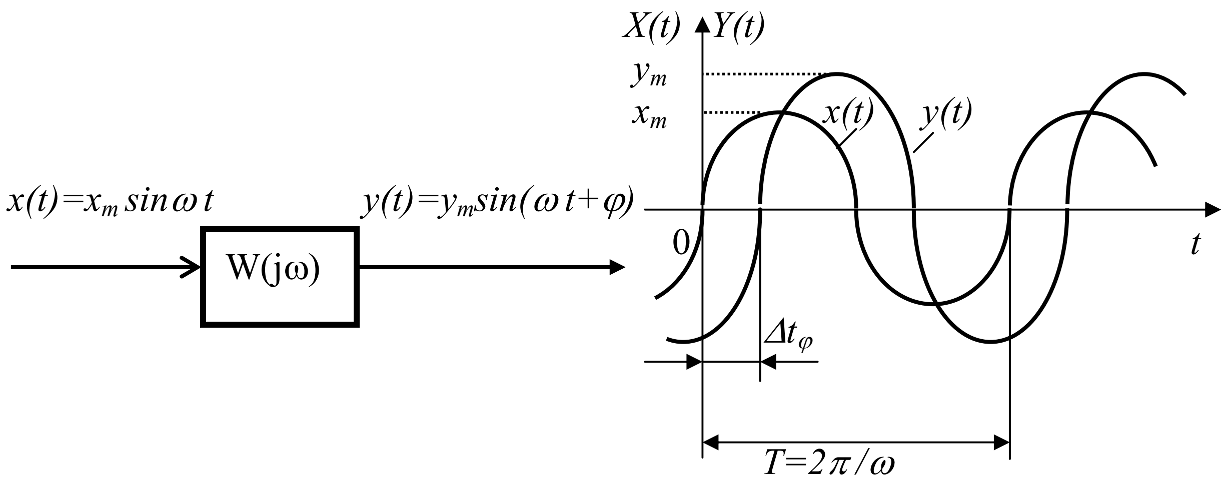


Рис. 2.8. Сигналы на входе и выходе звена

Частотные характеристики описывают передаточные свойства элементов и систем в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных внешним гармоническим воздействием.

Рассмотрим сущность и разновидности частотных характеристик. Пусть на вход линейного элемента (рис. 2.8) в момент времени t=0 приложено гармоническое воздействие определенной частоты ω:

$$x(t) = x_m \sin \omega t. \tag{2.19}$$

Через некоторое время, необходимое для протекания переходного процесса, элемент войдет в режим установившихся вынужденных колебаний, а выходная величина $y(t)$ будет изменяться по гармоническому закону с той же частотой ω, но с другой амплитудой y_m и со сдвигом Δt_φ :

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi), \tag{2.20}$$

где $\varphi = (\Delta t_\varphi / T)360$ – фазовый сдвиг между входным и выходным сигналами в градусах.

Изменяя частоту ω (от 0 до $\propto$) при фиксированном x_m, можно установить, что амплитуда и фазовый сдвиг выходного сигнала конкретного элемента зависят от частоты воздействия. Следовательно, зависимости амплитуды y_m и сдвига φ от значений частоты ω могут служить характеристиками динамических свойств элементов.

Так как амплитуда выходного сигнала зависит еще от амплитуды входного сигнала, то целесообразно при описании свойств элементов рассматривать отношение амплитуд y_m / x_m.

Зависимость отношения амплитуд выходного и входного сигнала от частоты называют *амплитудной частотной характеристикой* (а.ч.х.) и обозначают $A(\omega)$ (рис. 2.9,а).

Зависимость фазового сдвига между входным и выходным сигналами от частоты называют *фазовой частотной характеристикой* (ф.ч.х.) $\varphi(\omega)$ (рис. 2.9,б). Аналитические выражения $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ называют соответственно амплитудной и фазовой частотными функциями.

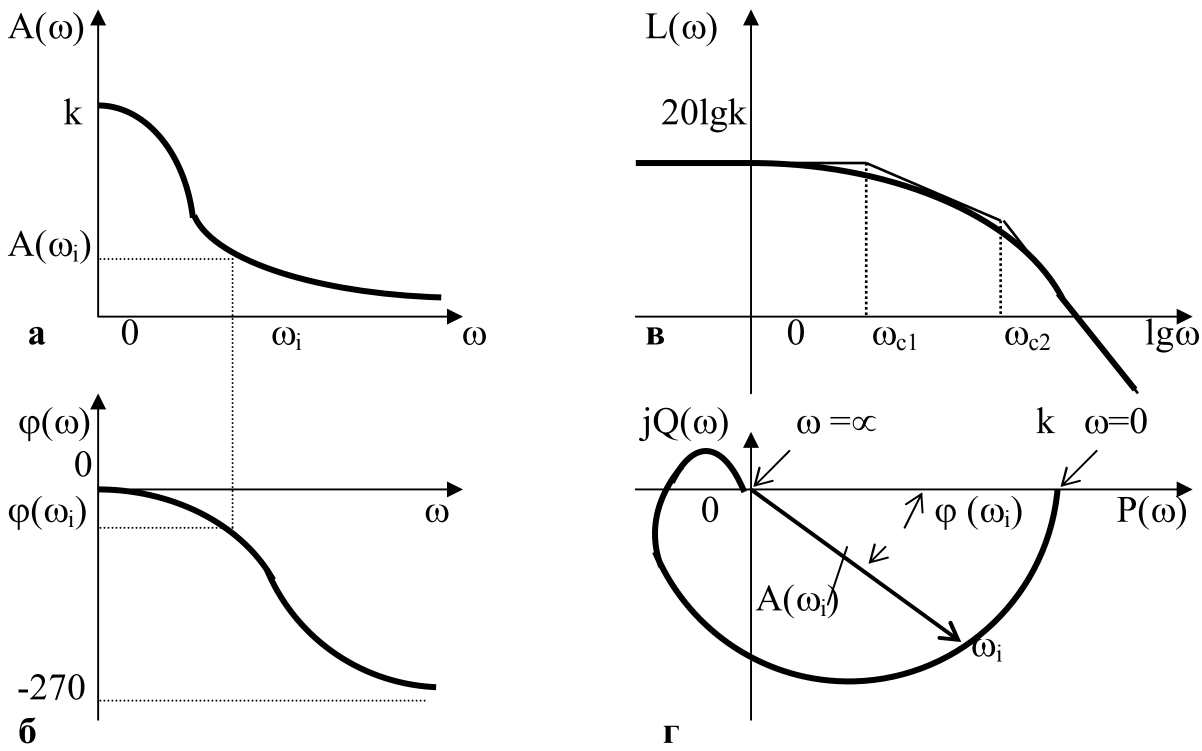


Рис. 2.9. Частотные характеристики:
а – амплитудная; б – фазовая; в – амплитудно-фазовая;
г – логарифмическая

А.ч.х. показывает, как элемент пропускает сигналы различной частоты. Оценка пропускания производится по отношению амплитуд y_m / x_m. А.ч.х. имеет размерность, равную отношению размерности выходной величины к размерности входной. Ф.ч.х. показывает, какое отставание или опережение выходного сигнала по фазе создает элемент на различных частотах.

Амплитудную и фазовую частотные характеристики можно объединить в одну общую - амплитудно-фазовую частотную характеристику (а.ф.ч.х. или а.ф.х.). *Амплитудно-фазовая частотная характеристика* $W(j\omega)$ представляет собой функцию комплексного переменного $j\omega$, модуль которой равен $A(\omega)$, а аргумент равен $\varphi(\omega)$. Каждому фиксированному значению частоты ω_i соответствует комплексное число $W(j\omega_i)$, которое на комплексной плоскости можно изобразить вектором, имеющим длину $A(\omega_i)$ и угол $\varphi(\omega_i)$ (рис. 2.9,г). Отрицательные значения $\varphi(\omega)$, соответствующие отставанию выходного сигнала от входного, принято отсчитывать по часовой стрелке от положительной вещественной оси.

При изменении частоты от нуля до бесконечности вектор $W(j\omega)$ поворачивается вокруг начала координат, при этом одновременно увеличивается или уменьшается длина вектора. Кривая (годограф), которую опишет конец вектора, и есть а.ф.х. Каждой точке характеристики соответствует определенное значение частоты.

Проекции вектора $W(j\omega)$ на действительную и мнимую оси называют соответственно действительной и мнимой частотными характеристиками и обозначают $P(\omega)$, $Q(\omega)$. Действительная частотная характеристика всегда четная функция частоты, а мнимая характеристика всегда нечетная функция.

Аналитическое выражение для а.ф.х. конкретного элемента можно получить из его передаточной функции путем подстановки $p=j\omega$:

$$W(j\omega)=W(p)\big|_{p=j\omega}\,. \tag{2.21}$$

А.ф.х. $W(j\omega)$, как и любая комплексная величина, может быть представлена в показательной форме:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \tag{2.22}$$

алгебраической форме:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \tag{2.23}$$

или тригонометрической форме:

$$W(j\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega) + jA(\omega)\sin\varphi(\omega). \tag{2.24}$$

Связь между различными частотными функциями следующая:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \tag{2.25}$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = arctg\,(Q(\omega)/P(\omega)). \tag{2.26}$$

Поскольку а.ф.х. $W(j\omega)$, так же, как и передаточная функция, представляет собой обычно дробь, то ее модуль может быть найден как отношение модуля числителя к модулю знаменателя:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = |K(j\omega)|/|D(j\omega)|, \tag{2.27}$$

а аргумент функции – как разность аргументов числителя и знаменателя:

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg K(j\omega) - \arg D(j\omega). \tag{2.28}$$

При практических расчетах автоматических систем удобно использовать частотные характеристики, построенные в логарифмической системе координат (рис. 2.9,в). Такие характеристики называют *логарифмическими.* Они имеют меньшую кривизну и поэтому могут быть приближенно заменены ломаными линиями, составленными из нескольких прямолинейных отрезков. Причем эти отрезки в большинстве случаев удается построить без громоздких вычислений по некоторым простым правилам. Частоты, соответствующие точкам стыковки отрезков, называют *сопрягающими* и обозначают ω_c. Кроме того, в логарифмической системе координат легко находить характеристики различных соединений элементов, так как умножению и делению обычных характеристик соответствует сложение и вычитание ординат логарифмических характеристик.

За единицу длины по оси частот логарифмических характеристик принимают декаду. *Декада* – интервал частот, заключенный между произвольным значением ω_i и его десятикратным значением $10\omega_i$. Отрезок логарифмической оси частот, соответствующий одной декаде, равен 1.

В расчетах используют *логарифмическую амплитудную частотную характеристику* (л.а.ч.х.):

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega), \tag{2.29}$$

ординаты которой измеряют в логарифмических единицах - белах (Б) или децибелах (дБ). Например, если имеется число N=100, в децибелах L=20lg100=40 дБ.

При построении фазовой частотной характеристики логарифмический масштаб применяют только для оси абсцисс.

По виду частотных характеристик все элементы и системы делятся на минимально-фазовые и неминимально-фазовые. *Минимально-фазовыми* являются элементы (системы), у которых все полюсы и нули передаточной функции *W(p)* имеют отрицательные действительные части. Такие элементы дают минимальный фазовый сдвиг $\varphi(\omega)$ по сравнению с любыми другими элементами.

Пример 5

Найти аналитические выражения для частотных характеристик для цепи (пример 3, рис. 2.4), имеющей передаточную функцию

$$W(p) = \frac{T_3 p}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}.$$

Решение. Амплитудно-фазовая функция цепи равна (замена p=jω)

$$W(j\omega) = \frac{T_3 j\omega}{T_1 j\omega + (1 - T_2^2 \omega^2)}.$$

Выражение для амплитудной частотной характеристики найдем как

$$A(\omega) = \frac{\left|T_3\ j\omega\right|}{\left|T_1 j\omega + (1 - T_2^2\omega^2)\right|} = \frac{T_3\omega}{\sqrt{T_1^2\omega^2 + (1 - T_2^2\omega^2)^2}}.$$

Фазовая частотная характеристика определится как разность аргументов числителя и знаменателя W(jω):

$$\varphi(\omega) = arctg\ \frac{T_3\omega}{0} - arctg\ \frac{T_1\omega}{1 + T_2^2\omega^2}.$$

2.5. Векторно-матричная форма описания элементов

Для записи систем дифференциальных уравнений, представляющих анализируемую систему управления, в некоторых случаях удобно пользоваться матричными обозначениями. Особенно это относится к многомерным элементам, которыми часто являются объекты управления.

Одним из способов описания элементов в векторно-матричной форме является *описание в переменных состояния*. Уравнение состояния линейного объекта записывается в виде векторного дифференциального уравнения в форме Коши.

Пусть объект, имеющий один вход и один выход, описывается передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{x(p)}{y(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n}; \quad (m = n - 1). \tag{2.30}$$

По передаточной функции (2.30) запишем операторное уравнение

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n)x(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m)y(t) \tag{2.31}$$

и преобразуем его к нормальной форме Коши. Для этого введем вспомогательную переменную $x_1(t)$ и запишем уравнение (2.31) в форме пропорции:

$$\frac{x(t)}{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m} = \frac{y(t)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n} = x_1(t). \tag{2.32}$$

Из (2.32) можно составить два уравнения (перемножив по диагонали числители на знаменатели первых двух членов выражения и поочередно приравняв их $x_1(t)$):

$$(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m)\, x_1(t) = x(t), \tag{2.33}$$

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n)\, x_1(t) = y(t). \tag{2.34}$$

Обозначим $x'_1(t) = x_2(t);\ x'_2(t) = x_3(t);\ ...;\ x'_{n-1}(t) = x_n(t),$ т.е

$$x'_i(t) = x_{i+1}(t) \quad (i = 1; 2; 3; ..; n-1). \tag{2.35}$$

С учетом (2.35) уравнение (2.34) преобразуется к виду

$$a_0 x'_n(t) + a_1 x_n(t) + a_2 x_{n-1}(t) + ... + a_n x_1(t) = y(t), \tag{2.36}$$

откуда

$$x'_n(t) = -a_0^{-1}[a_1 x_n(t) + a_2 x_{n-1}(t) + ... + a_n x_1(t)] + a_0^{-1} y(t). \tag{2.37}$$

Объединив (2.37) с (2.35), получим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned}
&x'_1(t) = x_2(t),\\
&x'_2(t) = x_3(t),\\
&x'_3(t) = x_4(t),\\
&..................\\
&x'_n(t) = -a_0^{-1}[a_1 x_n(t) + a_2 x_{n-1}(t) + ... + a_n x_1(t)] + a_0^{-1} y(t).
\end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

Система уравнений (2.38) может быть записана в виде векторного дифференциального уравнения в форме Коши:

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{y}(t), \tag{2.39}$$

где $\boldsymbol{x}(t)$ – *вектор состояния* с компонентами $x_1(t),\ x_2(t),\ ...\ ,\ x_n(t)$, называемыми *переменными состояния* объекта;

$\boldsymbol{y}(t)$ – *вектор управления* с компонентами $y_1(t), y_2(t), ..., y_m(t)$;

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times 1}$ – матрицы постоянных коэффициентов, зависящих от конструктивных параметров объекта.

Для матричного уравнения (2.39) матрицы имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \frac{-a_n}{a_0}; & \frac{-a_{n-1}}{a_0}; & .....; & & \frac{-a_1}{a_0} \end{bmatrix}_{n\times n}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{1}{a_0} \end{bmatrix}_{n\times 1}. \tag{2.40}$$

Если на входе объекта действуют возмущения $z_i(t)$, то уравнение состояния объекта будет иметь вид

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{z}(t), \tag{2.41}$$

где $\boldsymbol{z}(t)$ – вектор возмущений с компонентами $z_1(t), z_2(t), ..., z_n(t)$.

Системы, которые можно записать в виде (2.39) и (2.41), называются линейными системами. Переменные $x_1, x_2,..., x_n$ в любой момент времени определяют состояние системы. Если переменные состояния связаны между собой соотношением (2.35), то они называются *фазовыми переменными*.

Пространство состояний можно определить как n-мерное евклидово пространство, по осям которого откладываются переменные состояния. Соответствующий способ описания называется *методом пространства состояний*.

Системе уравнений (2.39) соответствует модель динамического объекта, представленная на рис. 2.10.

На модели идеальные интегрирующие звенья устанавливают связь между переменными состояния и их первыми производными.

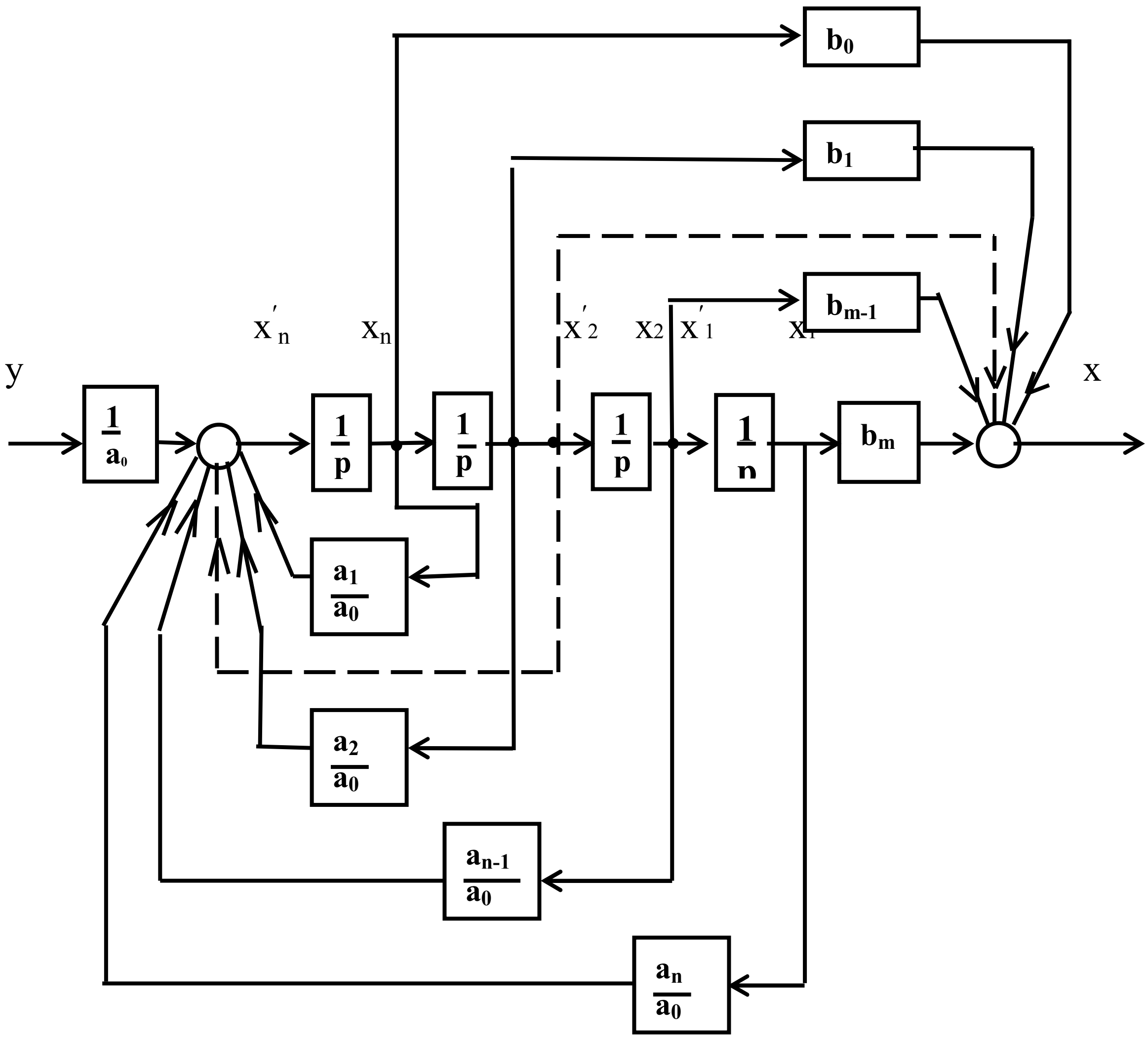


Рис. 2.10. Модель объекта в переменных состояния

ГЛАВА 3
ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Понятие типовых динамических звеньев

Функциональные элементы, используемые в автоматических системах, могут иметь самые различные конструктивное исполнение и принципы действия. Однако общность математических выражений, связывающих входные и выходные величины различных функциональных элементов, позволяет выделить ограниченное число так называемых типовых динамических звеньев. Каждому типовому звену соответствует определенное математическое соотношение между входной и выходной величиной. Если это соотношение является элементарным (например, дифференцирование, умножение, интегрирование и т.д.), то и звено называется *элементарным.*

Звенья, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядка, называются *типовыми динамическими звеньями.*

Типовые динамические звенья являются основными составными частями алгоритмических структур непрерывных систем управления, поэтому знание их характеристик облегчает анализ таких систем.

3.2. Безынерционное звено

Это звено является простейшим и передает сигнал со входа на выход мгновенно, не изменяя его форму. Звено может только усиливать или ослаблять значение входной величины.

Зависимость между входной величиной $x(t)$ и выходной величиной $y(t)$ описывается алгебраическим уравнением

$$y(t) = kx(t). \tag{3.1}$$

Свойства звена определяются только одним параметром – передаточным коэффициентом k.

При единичном ступенчатом воздействии $x(t)=\mathbf{1}(t)$, приложенном в момент времени $t=0$, выходная величина изменяется мгновенно и принимает значение k (рис. 3.1,а). Переходная функция звена имеет вид

$$h(t) = k\mathbf{1}(t), \tag{3.2}$$

а импульсная переходная функция (рис. 3.1,б) –

$$w(t) = k\delta(t). \tag{3.3}$$

Уравнение звена в операционной форме

$$Y(p) = kX(p), \tag{3.4}$$

а передаточная функция

$$W(p) = Y(p)/X(p) = k. \tag{3.5}$$

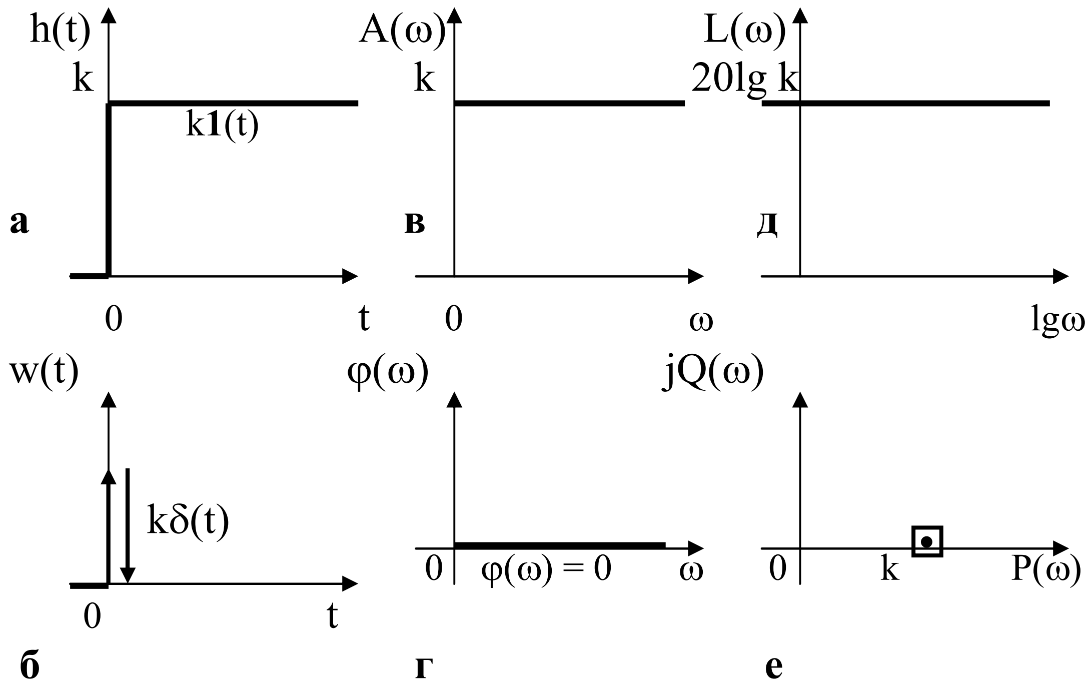


Рис. 3.1. Характеристики безынерционного звена

Амплитудно-фазовая характеристика (а.ф.х.) звена описывается функцией

$$W(j\omega) = k, \tag{3.6}$$

которой на комплексной плоскости соответствует одна точка на действительной оси (рис. 3.1, е). Амплитудная частотная характеристика (а.ч.х.)

$$A(\omega) = k \tag{3.7}$$

представляет собой прямую, параллельную оси частот (рис.3.1, в). Это означает, что *сигналы любой частоты проходят через безынерционное звено с одинаковым отношением амплитуд выходной и входной величин, равным k.*

Выражение для фазовой частотной характеристики (ф.ч.х.), (рис. 3.1, г)

$$\varphi(\omega) = arg\ W(j\omega) = arctg(0/k) = 0 \tag{3.8}$$

показывает, что безынерционное звено не создает фазовых сдвигов между входной и выходной величиной.

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (л.а.ч.х.) безынерционного звена

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k \tag{3.9}$$

так же, как и его а.ч.х., является прямой линией, параллельной оси абсцисс (рис. 3.1,д).

Примером безынерционного звена может служить операционный усилитель, работающий в режиме масштабного усиления.

3.3. Инерционные звенья первого порядка

Дифференциальное уравнение звена имеет вид

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \tag{3.10}$$

где k– передаточный коэффициент, характеризующий свойства звена в статическом режиме; T – постоянная времени, характеризующая инерционность звена.

Переходная функция звена находится как сумма общего и частного решений уравнения (3.10):

$$h(t) = k(1 - e^{-t/T})1(t). \tag{3.11}$$

Касательная к кривой $h(t)$ (рис. 3.2, а) в точке $t=0$ отсекает на линии установившегося значения отрезок, равный постоянной времени T.

Импульсная переходная функция звена (рис. 3.2,б) находится дифференцированием функции $h(t)$:

$$w(t) = \frac{k}{T}e^{-t/T}1(t). \tag{3.12}$$

Применяя к левой и правой частям уравнения (3.10) преобразование Лапласа, получаем уравнение динамики звена в операционной форме и передаточную функцию $W(p)$:

$$(Tp + 1)Y(p) = kX(p), \tag{3.13}$$

$$W(p) = Y(p)/X(p) = k/(Tp + 1). \tag{3.14}$$

Подстановкой $p=j\omega$ из (3.14) получим амплитудно-фазовую функцию

$$W(j\omega) = k/(Tj\omega + 1). \tag{3.15}$$

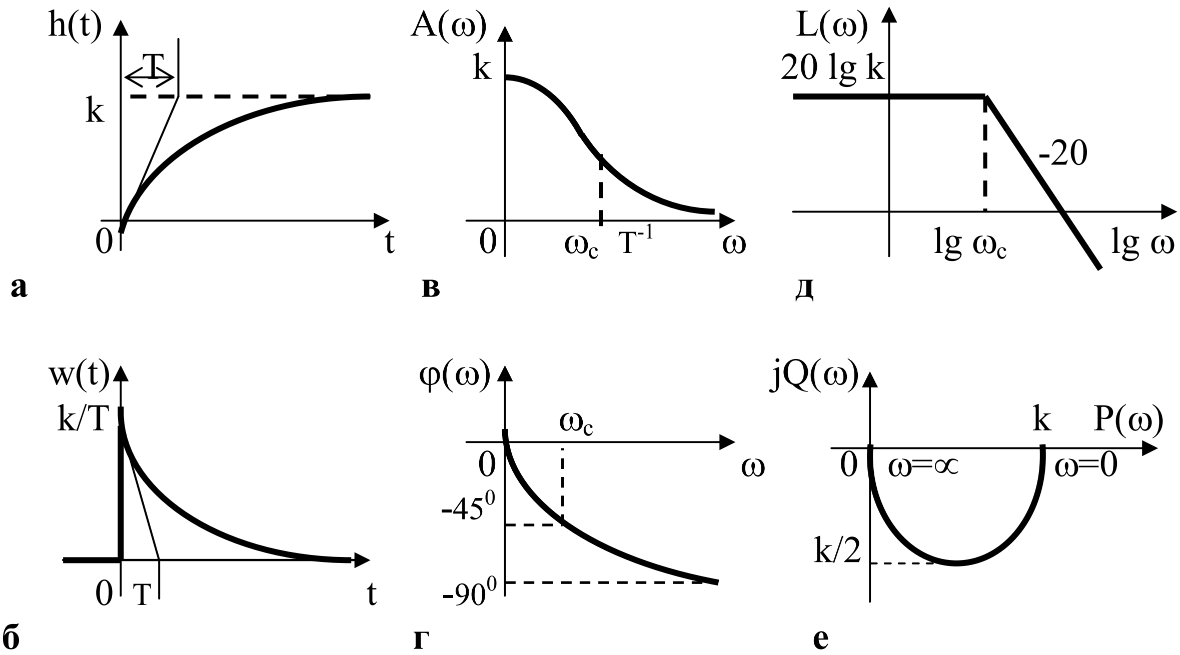


Рис. 3.2. Характеристики инерционного звена первого порядка

Умножив числитель и знаменатель формулы (3.15) на комплексное сопряженное знаменателю число *(1 - jTω)* и выделив вещественную и мнимую части, можно записать

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \tag{3.16}$$

где

$$P(\omega) = k/(1 + T^2\omega^2); \qquad Q(\omega) = -kT\omega/(1 + T^2\omega^2).$$

Последние выражения можно рассматривать как уравнение а.ф.х. в параметрической форме в системе координат *P(ω)* и *jQ(ω)*. Роль третьего параметра играет частота *ω*. А.ф.х. представляет собой полуокружность (рис. 3.2,е) с центром в точке *(k/2; j0)* и диаметром, равным *k*.

Выражение для амплитудно-частотной характеристики

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = |k| \,/\, |Tj\omega + 1| = k \,/\, \sqrt{1 + T^2\omega^2}. \tag{3.17}$$

График функции *A(ω)* (рис. 3.2, в) показывает, что *гармонические сигналы малой частоты* ($\omega<\omega_c$) *хорошо пропускаются звеном – с отношением выходной и входной величин, близким к передаточному коэффициенту k. Сигналы большой частоты плохо пропускаются звеном. Чем больше постоянная времени T, тем уже полоса пропускания частот.*

Таким образом, инерционное звено первого порядка по своим частотным свойствам является *фильтром низкой частоты.*

Фазовая частотная характеристика (рис. 3.2,г)

$$\varphi(\omega) = arctg\,[Q(\omega)/P(\omega)] = -arctg\,\omega T. \qquad (3.18)$$

Чем больше частота входного сигнала, тем больше отставание по фазе выходной величины от входной. Максимально возможное отставание равно 90^0.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика описывается выражением

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1 + T^2\omega^2}. \qquad (3.19)$$

В практических расчетах используют асимптотическую характеристику, представляющую собой ломаную в виде двух асимптот (рис. 3.2,д). Первая низкочастотная асимптота получается из (3.19), если пренебречь величиной $T^2\omega^2$:

$$L(\omega) \cong 20\lg k. \qquad (3.20)$$

Высокочастотная асимптота заменяет точную характеристику при больших частотах, когда $T^2\omega^2 >> 1$, и единицу под корнем в (3.19) можно не учитывать. Выражение для этой асимптоты имеет вид

$$L(\omega) \cong 20\lg k - 20\lg T\omega. \qquad (3.21)$$

Эта асимптота зависит от частоты. Она имеет отрицательный наклон и проходит через точку с координатами $(\omega = T^{-1};\ L(\omega) = 20\lg k)$. Приращение высокочастотной асимптоты равно –20 дБ на декаду.

Значение *сопрягающей частоты* ω_c найдем из условия $20lgk=20lgk-20lgT\omega_c$,

$$\omega_c = 1/T. \qquad (3.22)$$

3.4. Инерционные звенья второго порядка

Дифференциальное уравнение звена -

$$T_2^2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + T_1\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t). \qquad (3.23)$$

Уравнение динамики в операционной форме -

$$(T_2^2p^2 + T_1p + 1)Y(p) = kX(p) \qquad (3.24)$$

Передаточная функция -

$$W(p) = Y(p) / X(p) = k / (T_2^2 p^2 + T_1 p + 1). \qquad (3.25)$$

Характеристическое уравнение звена -

$$T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0 \qquad (3.26)$$

Корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = (-T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}) / 2T_2^2 \qquad (3.27)$$

Общее решение дифференциального уравнения, определяющее свободное движение, имеет вид

$$y(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}. \qquad (3.28)$$

Характер переходного процесса зависит от вида корней которые могут быть действительными или комплексными. Если $T_1 \geq 2T_2$, то оба корня действительные. Обозначим их

$$p_1 = -1/T_3; \qquad p_2 = -1/T_4, \qquad (3.29)$$

где T_3 и T_4 – некоторые условные постоянные времени, причем $T_3 > T_4$.

При $T_1 > 2T_2$ переходная функция звена имеет монотонный (апериодический) характер. Звено в данном случае называется *апериодическим звеном второго порядка.* При указанном условии знаменатель передаточной функции можно разложить на два множителя и представить передаточную функцию в виде

$$W(p) = k / (T_3 p + 1)(T_4 p + 1), \qquad (3.30)$$

согласно которому инерционное звено второго порядка (рис. 3.3,а) можно представить как последовательное соединение двух инерционных звеньев первого порядка (рис. 3.3,б).

Если $T_1 < 2T_2$, то корни уравнения (3.26) комплексные:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta, \qquad (3.31)$$

где $\alpha = T_1 / 2T_2^2; \quad \beta = \sqrt{4T_2^2 - T_1^2} / 2T_2^2.$

Решение (3.28) в этом случае содержит гармонические составляющие, и звено называют *колебательным* (рис. 3.3,в).

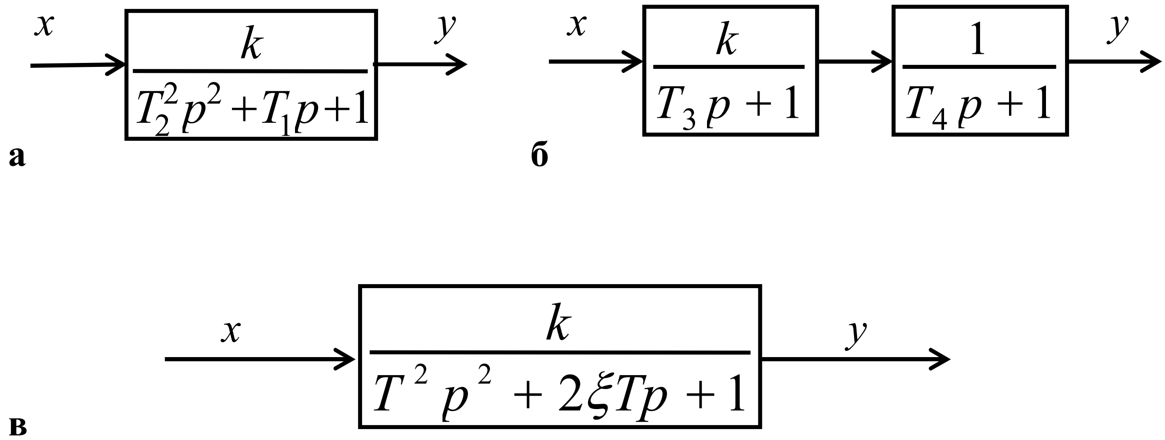


Рис. 3.3. Алгоритмические схемы инерционных звеньев второго порядка

При $T_1=0$ оба корня будут мнимыми, а переходная функция будет представлять собой незатухающую синусоиду. В этом случае звено называют *идеальным колебательным или консервативным.*

Наряду с общими свойствами (статизм, инерционность) апериодическое и колебательное звенья имеют и существенные различия. Рассмотрим особенности характеристик этих звеньев.

Переходная функция апериодического звена второго порядка может быть получена сложением общего решения (3.28) с частным решением, соответствующим вынужденной составляющей при $x(t)=1(t)$. Тогда переходная функция определится как

$$h(t) = C_1 e^{-t/T_3} + C_2 e^{-t/T_4} + k1(t). \tag{3.32}$$

При подстановке нулевых начальных условий $h(0)=0;\ h'(0)=0$ из (3.32) определим

$$C_1 = -kT_3 1(t)/(T_3 - T_4); \quad C_2 = kT_4 1(t)/(T_3 - T_4).$$

Тогда переходная функция

$$h(t) = k\left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-t/T_3} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-t/T_4}\right)1(t). \tag{3.33}$$

Временные характеристики $h(t)$ и $w(t)$ апериодического звена показаны на рис. 3.4,а,б. В соответствии с представлением апериодического звена второго порядка в виде последовательного соединения двух инерционных звеньев первого порядка все его частотные характеристики (рис. 3.4,в–е) могут быть получены по аналогичным характеристикам звеньев первого порядка по правилам умножения комплексных величин.

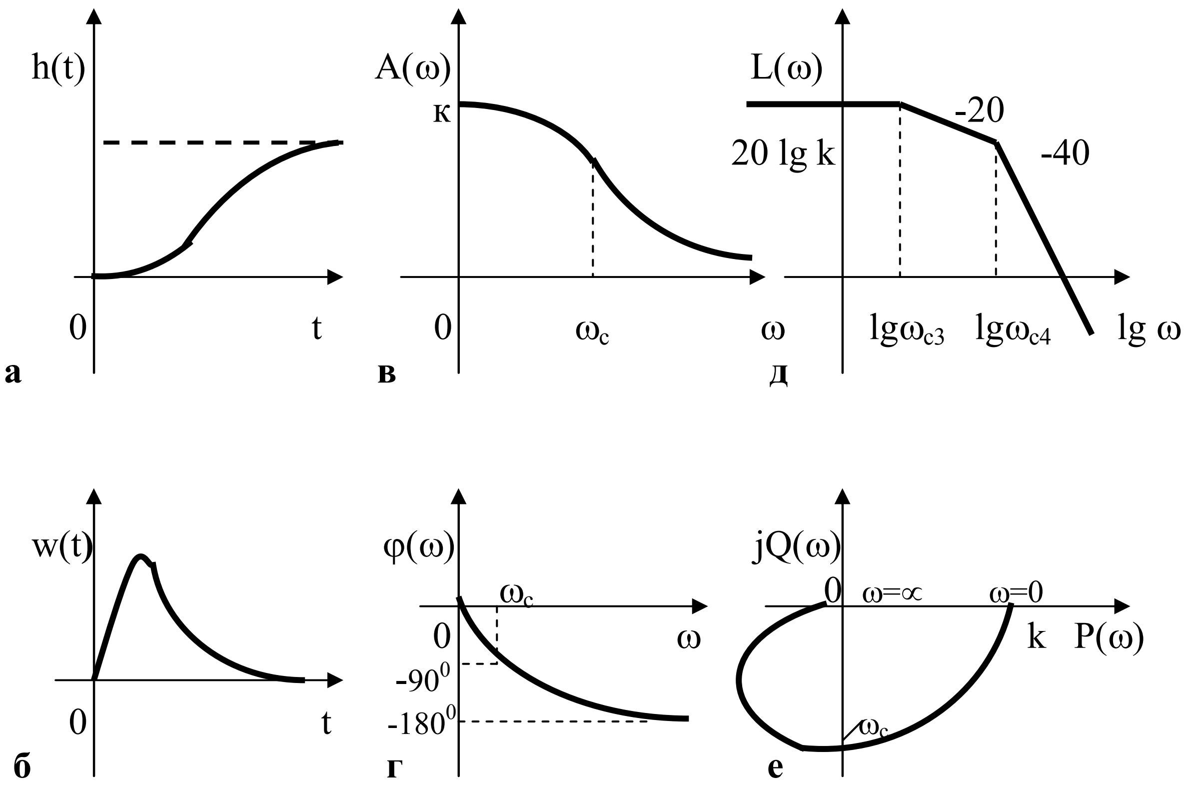


Рис. 3.4. Характеристики апериодического звена второго порядка

Апериодическое звено второго порядка так же, как и звено первого порядка, является фильтром низких частот.

Дифференциальное уравнение колебательного звена записывают обычно в виде

$$T\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\xi T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=kx(t), \qquad (3.34)$$

где T=T_2 – постоянная времени, характеризующая инерционность звена; ξ=T_1 /2T_2 – относительный коэффициент демпфирования, характеризующий колебательность звена ($0 \le \xi \le 1$).

Передаточная функция колебательного звена

$$W(p)=Y(p)/X(p)=k/(T^2p^2+2\xi Tp+1), \qquad (3.35)$$

а корни соответствующего характеристического уравнения равны

$$p_{1,2}=-\alpha\pm j\beta=-(\xi/T)\pm j\sqrt{1-\xi^2}/T, \qquad (3.36)$$

где $\alpha = \xi /T$ – коэффициент затухания; $\beta = \sqrt{1-\xi^2}/T$ - круговая частота затухающих колебаний в рад/с.

Переходная функция колебательного звена с учетом найденных значений корней $p_{1,2}$ определится как

$$h(t) = k\left[1 - \frac{1}{\beta T} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi)\right]1(t). \quad (3.37)$$

В (3.37) $\varphi = arctg(\beta/\alpha) = arcsin\beta T = arccos\xi$.

Свободная составляющая переходной функции (рис. 3.5, а) представляет собой синусоиду, амплитуда которой убывает по экспоненте (пунктирная линия). Период затухающих колебаний равен

$$T_з = 2\pi / \beta = 2\pi T / \sqrt{1-\xi^2}. \quad (3.38)$$

Если коэффициент демпфирования $\xi = 0$ при $T_1=0$, то на выходе звена после подачи единичного ступенчатого воздействия возникают незатухающие колебания с частотой $\omega_0=1/T$.

Скорость затухания колебательных переходных процессов принято оценивать *степенью затухания*

$$\phi = (A_1 - A_3) / A_1 = 1 - A_3 / A_1,$$

представляющей собой отношение разности двух соседних амплитуд к первой из них.

Если в выражение для переходной функции (3.37) подставить два значения *t,* отличающиеся на период затухающих колебаний $T_з=2\pi /\beta$, то получим

$$\phi = 1 - e^{-2\pi/\beta} = 1 - e^{-2\pi/\mu}. \quad (3.39)$$

Отношение $\mu = \beta/\alpha$ называют *степенью колебательности.*

А.ф.х. колебательного звена (рис. 5,е) описывается уравнением

$$W(j\omega) = k / \left[T^2 (j\omega)^2 + 2\xi T j\omega + 1\right]. \quad (3.40)$$

Уравнению (3.40) соответствует а.ч.х. (рис. 3.5,в)

$$A(\omega) = k / \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2} \quad (3.41)$$

и ф.ч.х. (рис. 3.5,г)

$$\varphi(\omega) = -arctg\left[2\xi T\omega / (1 - T^2\omega^2)\right]. \quad (3.42)$$

А.ч.х. на частоте ω_{max} имеет резонансный пик, равный

$$A_{max} = A(\omega_{max}) = k / 2\xi\sqrt{1-\xi^2}. \qquad (3.43)$$

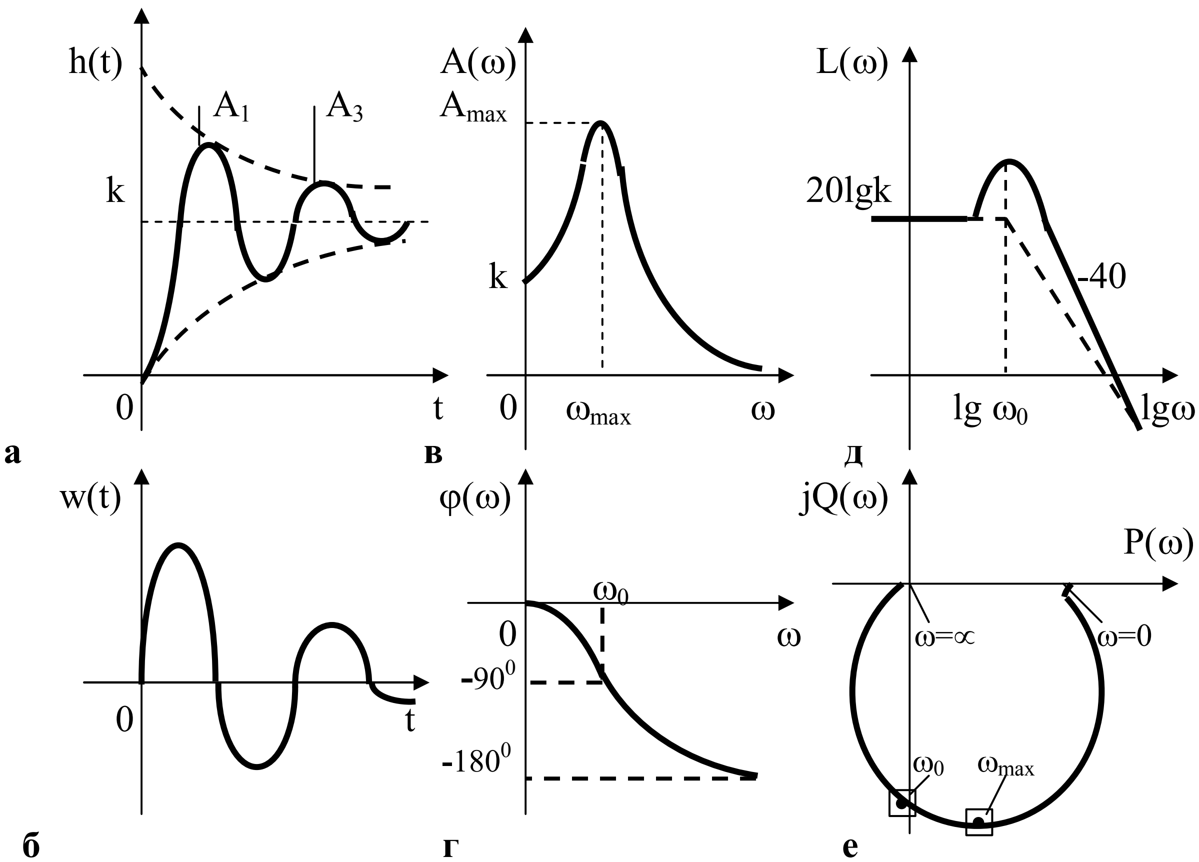


Рис. 3.5. Характеристики колебательного звена второго порядка

Резонансный пик существует, если $\xi < 0{,}707$. Чем меньше ξ, тем ближе резонансная частота ω_{max} к собственной частоте незатухающих колебаний ω_0 и тем больше резонансный пик. *Колебательное звено, как и все инерционные звенья, хорошо пропускает сигналы низкой частоты и плохо – сигналы высокой частоты.*

3.5. Интегрирующие звенья

Интегрирующие звенья подразделяются на идеальные и реальные. Общим свойством этих звеньев является пропорциональность производной от выходной величины мгновенному значению входной величины. У реального интегрирующего звена пропорциональность устанавливается после завершения переходного процесса в звене.

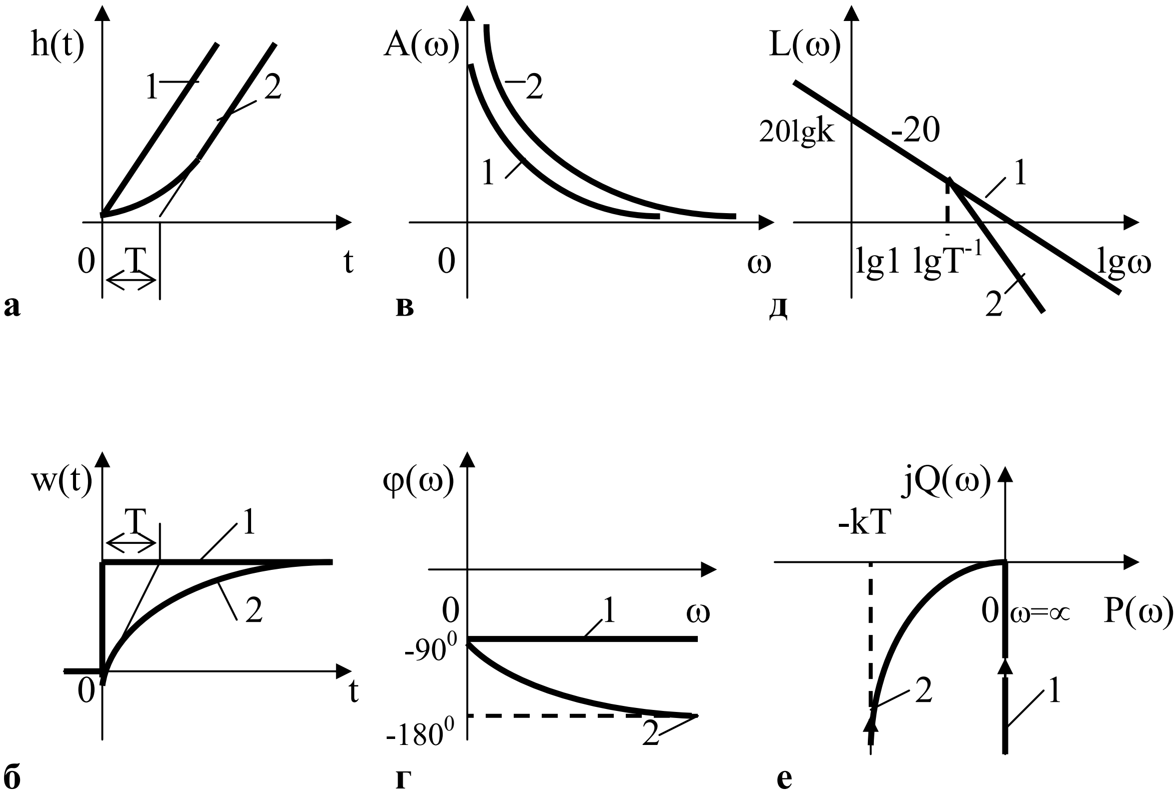


Рис. 3.6. Характеристики идеального (1) и реального (2) интегрирующих звеньев

Идеальному интегрирующему звену соответствует уравнение

$$\frac{dy\ (t)}{dt} = kx\ (t). \tag{3.44}$$

Уравнению (3.44) соответствует интегральное уравнение

$$y(t) = k\int_0^t x(t)dt + y(0), \tag{3.45}$$

из которого видно, что звено интегрирует входной сигнал.

Переходную функцию получим из (3.45), полагая *x(t)=1(t)* (рис. 3.6,а):

$$h\,(t) = kt1\,(t)\ . \tag{3.46}$$

Импульсная переходная функция идеального интегрирующего звена (рис. 3.6,б)

$$w\,(t) = k\,1(t). \tag{3.47}$$

Передаточная функция идеального интегрирующего звена

$$W(p) = k / p. \tag{3.48}$$

А.ф.х. идеального звена

$$W(j\omega) = k / j\omega = -jk / \omega \tag{3.49}$$

на комплексной плоскости (рис. 3.6, е) представляет собой прямую, совпадающую с мнимой осью.

А.ч.х. (рис. 3.6, в)

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = k / \omega \tag{3.50}$$

является гиперболой, стремящейся к бесконечности при $\omega \to 0$.

Ф.ч.х. идеального интегрирующего звена (рис. 3.6, г)

$$\varphi(\omega) = arctg \frac{-k/\omega}{0} = -90^0 \tag{3.51}$$

свидетельствует, что фазовый сдвиг не зависит от частоты и равен -90^0.

Л.а.ч.х. представляет собой прямую с наклоном –20 дБ/декаду и проходит через точки $\omega=1$; $L(\omega)=20 \lg k$ (рис. 3.6, д):

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega. \tag{3.52}$$

Дифференциальное уравнение реального интегрирующего звена

$$T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = kx(t), \tag{3.53}$$

а передаточная функция

$$W(p) = k / (Tp + 1)p. \tag{3.54}$$

Звено с передаточной функцией (3.54) может рассматриваться как последовательное соединение идеального интегрирующего звена с передаточной функцией $1/p$ и статического инерционного звена первого порядка с постоянной времени T и коэффициентом передачи k. Все частотные характеристики реального интегрирующего звена могут быть получены по правилам перемножения комплексных величин.

3.6. Дифференцирующие звенья

Дифференцирующие звенья подразделяются на идеальные (безынерционные) и реальные (инерционные). Значение выходной величины идеального дифференцирующего звена в каждый момент времени пропорционально мгновенному значению первой производной от входной величины:

$$y(t) = k\frac{dx(t)}{dt}. \tag{3.55}$$

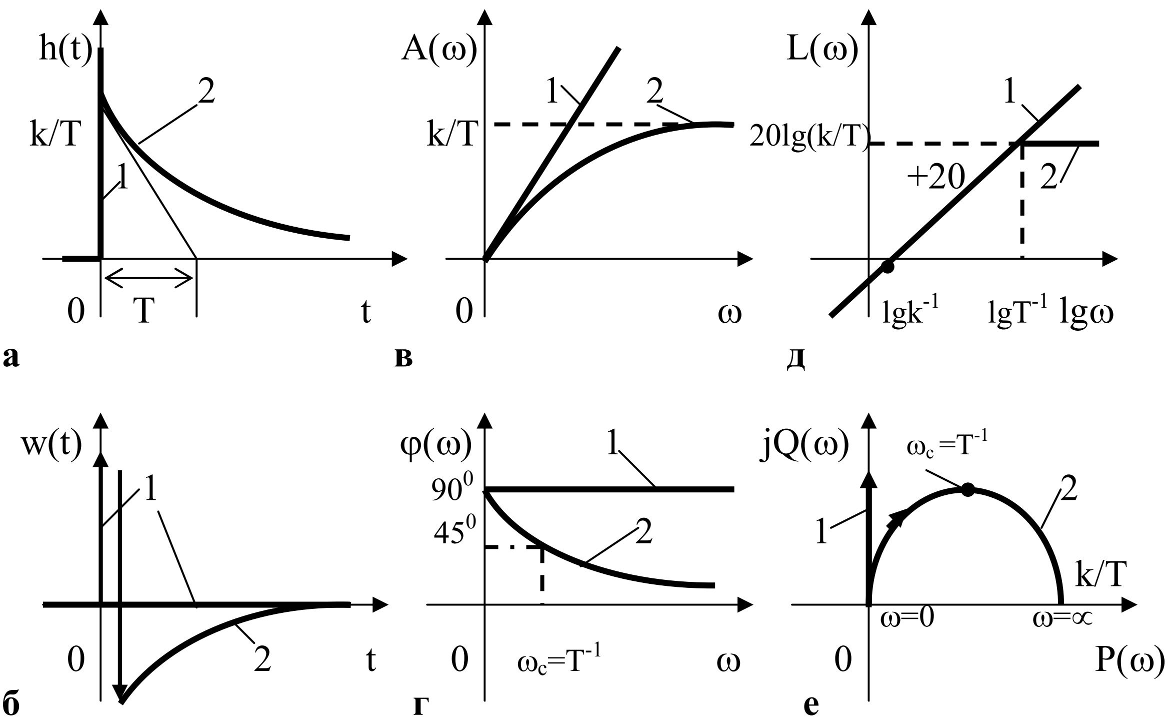


Рис. 3.7. Характеристики идеального (1) и реального (2) дифференцирующих звеньев

Переходная функция (рис. 3.7,а) определяется дифференцированием единичной ступенчатой функции *1(t)* и подстановкой в (3.55):

$$h(t) = k\delta(t). \tag{3.56}$$

Импульсная переходная функция (рис. 3.7, б)

$$w(t) = k\frac{d\delta(t)}{dt}. \tag{3.57}$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = kp. \tag{3.58}$$

Амплитудно-фазовая функция (рис. 3.7, е) совпадает с положительной мнимой осью и описывается выражением

$$W(j\omega) = kj\omega.$$

(3.59)

Амплитудно-частотная функция (рис. 3.7, в)

$$A(\omega) = k\omega \tag{3.60}$$

показывает, что амплитуда выходного сигнала возрастает пропорционально частоте входного сигнала.

Фазовый сдвиг на всех частотах одинаков:

$$\varphi(\omega) = arctg\ \frac{k\omega}{0} = +90^{0}. \tag{3.61}$$

Л.а.ч.х. звена

$$L(\omega) = 20\ \lg k\omega \tag{3.62}$$

представляет собой прямую линию с наклоном +20дБ/декаду, проходящую через точку с координатами $\omega = k^{-1}, L(\omega)=0$ (рис. 3.7, д).

Реальное дифференцирующее звено можно рассматривать как последовательное соединение идеального дифференцирующего звена и инерционного звена первого порядка. Передаточная функция реального дифференцирующего звена

$$W(p) = kp/(Tp+1). \tag{3.63}$$

Временные характеристики *h(t)* и *w(t)* реального дифференцирующего звена представлены на рис. 3.7, а, б. Выражения для частотных характеристик могут быть получены из передаточной функции обычным способом. Частотные характеристики представлены на рис. 3.7.

3.7. Звено запаздывания

Звеном запаздывания называется звено, передающее сигнал со входа на выход без искажения его формы, но с некоторой задержкой τ во времени. Наиболее распространенным в практике автоматических систем является транспортное запаздывание, обусловленное пространственным перемещением элементов, передающих информацию (например, транспортерная лента, полоса прокатываемого металла). К статическим устройствам запаздывания можно отнести различного рода линии задержки электронного или параметрического типа.

В некоторых случаях звено запаздывания вводится при расчете системы условно. Для ряда объектов уравнение динамики неизвестно, поэтому кривую переходного процесса реального объекта при единичном входном воздействии аппроксимируют экспонентой и эквивалентным запаздыванием.

Уравнение звена запаздывания

$$y(t) = x(t - \tau) \tag{3.64}$$

не является дифференциальным и относится к классу особых уравнений со смещенным аргументом.

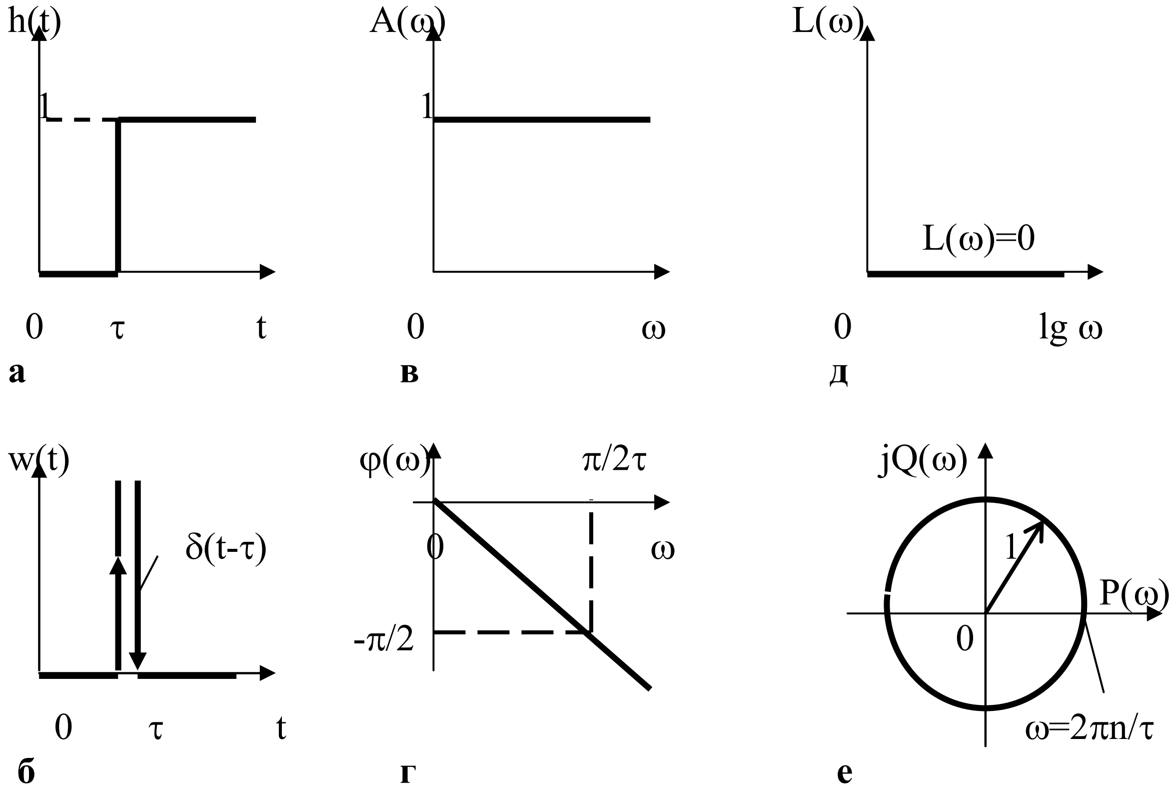


Рис. 3.8. Характеристики звена запаздывания

Подстановкой в уравнение звена значения входной величины $x(t)=1(t)$ получим его переходную функцию:

$$h(t) = 1(t - \tau), \tag{3.65}$$

а подстановкой $x(t)=\delta(t)$ – импульсную:

$$w(t) = \delta(t - \tau). \tag{3.66}$$

Временные характеристики звена запаздывания показаны на рис. 3.8, а, б.

На основании теоремы запаздывания запишем уравнение (3.64) в изображениях по Лапласу:

$$Y(p) = X(p)e^{-p\tau} \tag{3.67}$$

и определим передаточную функцию звена как

$$W(p) = Y(p)/X(p) = e^{-p\tau}. \tag{3.68}$$

А.ф.х. звена

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos\omega\tau - j\sin\omega\tau \tag{3.69}$$

является окружностью единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 3.8, е).

Амплитудная частотная и фазовая частотная характеристики определяются выражениями:

$$\varphi(\omega) = arctg\ (-\sin\omega\tau\ /\cos\omega\tau) = -\omega\tau\ ; \tag{3.70}$$

$$A(\omega) = \sqrt{\cos^2\omega\tau + \sin^2\omega\tau} = 1\ . \tag{3.71}$$

Звенья запаздывания ухудшают устойчивость систем и делают их трудно управляемыми.

Звено запаздывания определяет трансцендентный характер характеристического уравнения системы. Для приведения характеристического уравнения к алгебраической форме трансцендентную передаточную функцию звена раскладывают в ряд Пада и приближенно заменяют ее двумя или тремя членами ряда:

$$W(p) = e^{-p\tau} \approx (1 - 0{,}5\tau p)/(1 + 0{,}5\tau p) \tag{3.72}$$

или

$$W(p) \approx \frac{1 - 0{,}5\tau p + 0{,}83\tau^2 p^2}{1 + 0{,}5\tau p + 0{,}83\tau^2 p^2}. \tag{3.73}$$

ГЛАВА 4
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ. СТАТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ САУ

4.1. Получение передаточных функций одномерной системы по передаточным функциям звеньев

Если имеются уравнения всех звеньев системы, то описанием последней является система этих уравнений. Исключив из нее обычным порядком промежуточные переменные, можно получить одно дифференциальное уравнение высокого порядка, связывающее интересующую нас выходную величину системы с определенной входной величиной, каким-либо возмущением или задающим воздействием. Наиболее просто эту процедуру можно выполнить, если оперировать передаточными функциями звеньев. Рассмотрим простейшие случаи преобразования структурных схем.

Передаточная функция цепочки последовательно соединенных звеньев

В этом случае имеем систему уравнений (рис. 4.1):

$$Y_1 = W_1(p)\,X,$$
$$Y_2 = W_2(p)\,Y_1,$$
$$Y_3 = W_3(p)\,Y_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y = Wn(p)\,Y(n\text{-}1).$$

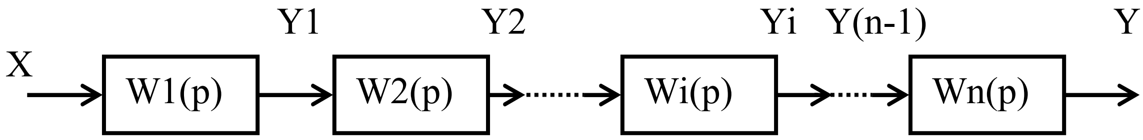


Рис. 4.1. Последовательное соединение звеньев

Исключив отсюда промежуточные переменные, получим

$$Y = \{W_1(p)\,W_2(p)\ldots Wn(p)\}X = W(p)X\,.$$

Здесь

$$W(p) = \prod_{i=1}^{n} Wi(p\,. \qquad (4.1)$$

Это значит, что такую цепочку можно заменить в структурной схеме одним эквивалентным звеном с передаточной функцией *W(p)*.

Параллельное соединение звеньев направленного действия

При параллельном соединении все звенья имеют общий входной сигнал X, а выходной сигнал Y равен сумме выходных сигналов отдельных звеньев:

$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Yn = [W_1(p) + W_2(p) + \ldots + Wn(p)]X = W(p)X,$$

где

$$W(p) = \sum_{i=1}^{n} Wi(p). \qquad (4.2)$$

На рис. 4.2 представлено такое соединение звеньев.

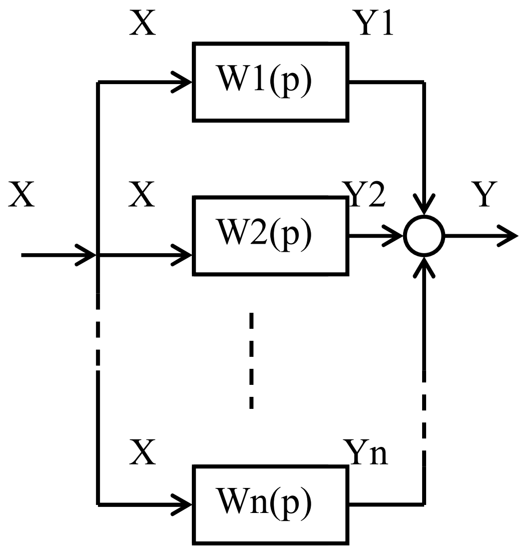


Рис. 4.2. Параллельное соединение звеньев

Таким образом, в структурной схеме такую группу звеньев можно заменить одним эквивалентным звеном с соответствующей передаточной функцией $W(p)$.

Звено, охваченное обратной связью

Обратная связь может быть положительной, если сигнал обратной связи $Xос$ складывается со входным сигналом X (плюс у суммирующего элемента на рис. 4.3), или отрицательной, если $Xос$ вычитается из X (минус на рис. 4.3).

Охват звеньев как положительной, так и отрицательной обратными связями широко применяется для коррекции статических и динамических свойств замкнутых систем автоматического управления с целью придания заданных показателей качества процесса управления.

Схема описывается следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} Y &= W_1(p)(X+Xoc),\\ Xoc &= W_2(p)Y, \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{для положительной обратной связи;}$$

$$\left.\begin{aligned} Y &= W_1(p)(X-Xoc),\\ Xoc &= W2(p)Y. \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{для отрицательной обратной связи.}$$

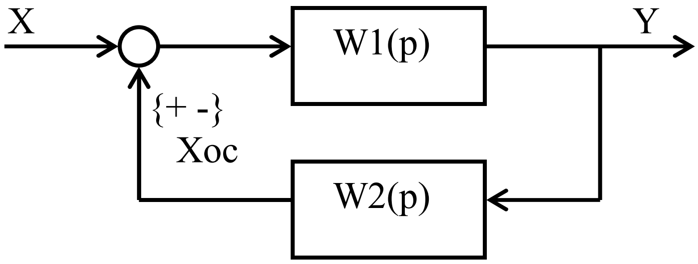


Рис. 4.3. Звено, охваченное обратной связью

Исключив из уравнений *Xoc*, получим

$$Y \quad \frac{W_1(p)}{1\ \{-+\}\ W_1(p)W2(p)} \quad X = W_3(p)X\,. \tag{4.3}$$

В уравнении (4.3) в знаменателе "минус" соответствует положительной обратной связи, а "плюс"- отрицательной обратной связи.

Из (4.3) следует

$$W_3(p) = \frac{W_1(p)}{1\ \{-+\}\ W_1(p)W_2(p)} = \frac{W_1(p)}{1\ \{-+\}\ W(p)}\,, \tag{4.4}$$

где

$$W(p) = W_1(p)W_2(p). \tag{4.5}$$

Звено, охваченное обратной связью, также может быть представлено одним эквивалентным звеном с соответствующей передаточной функцией.

Правила переноса входных и выходных сигналов в структурных схемах

Правила перестановки сумматоров

В общем случае одномерная САУ является многоконтурной, т.е. она содержит произвольное число связанных друг с другом контуров.

При преобразовании многоконтурной схемы в эквивалентную одноконтурную руководствуются рядом правил. В их число, прежде всего, входят уже изложенные выше правила замены групп последовательно и параллельно соединенных звеньев, а также звена с обратной связью одним эквивалентным звеном. Кроме того, применяются правила переноса воздействий из одной точки системы в другую и правила перестановки сумматоров.

В процессе преобразования многоконтурной САУ часто необходимо переносить суммирующий элемент вперед или назад. Правила переноса сумматоров вытекают из следующих соображений. Пусть сумматор находится на выходе звена с передаточной функцией $W2(p)$ (рис. 4.4,а). При этом справедливо

$$X = X_2 + F,$$
$$X = X_1 W_2(p) + F. \qquad (4.6)$$

Если в (4.6) вынести за скобки $W2(p)$, то получим

$$X = \{X1 + F * 1/W_2(p)\} W_2(p). \qquad (4.7)$$

Выражение (4.7) показывает, что на вход звена $W_2(p)$ поступает сигнал с выхода суммирующего устройства, на входы которого подаются сигналы X_1 и $F*1/W_2(p)$, чему соответствует эквивалентная схема справа.

Таким образом, при переносе суммирующего (вычитающего) элемента назад добавляется звено с обратной передаточной функцией $1/W_2(p)$.

При переносе суммирующего элемента вперед (рис. 4.4,б) аналогично можно показать, что в ветвь добавляется фиктивное звено с передаточной функцией $W_2(p)$ обойденного при этом звена основного контура.

При переносе точки разветвления, т.е. входа параллельной ветви (рис. 4.5), правило преобразования обратное: при переносе этой точки вперед в ветвь добавляется звено с обратной передаточной функцией $1/W_2(p)$ обойденного звена, а при переносе назад - звено с передаточной функцией $W_1(p)$.

Из рис. 4.6 следует, что расположенные последовательно сумматоры можно менять местами.

При переносе узла через сумматор назад и переносе узла через сумматор вперед необходимо руководствоваться следующими правилами.

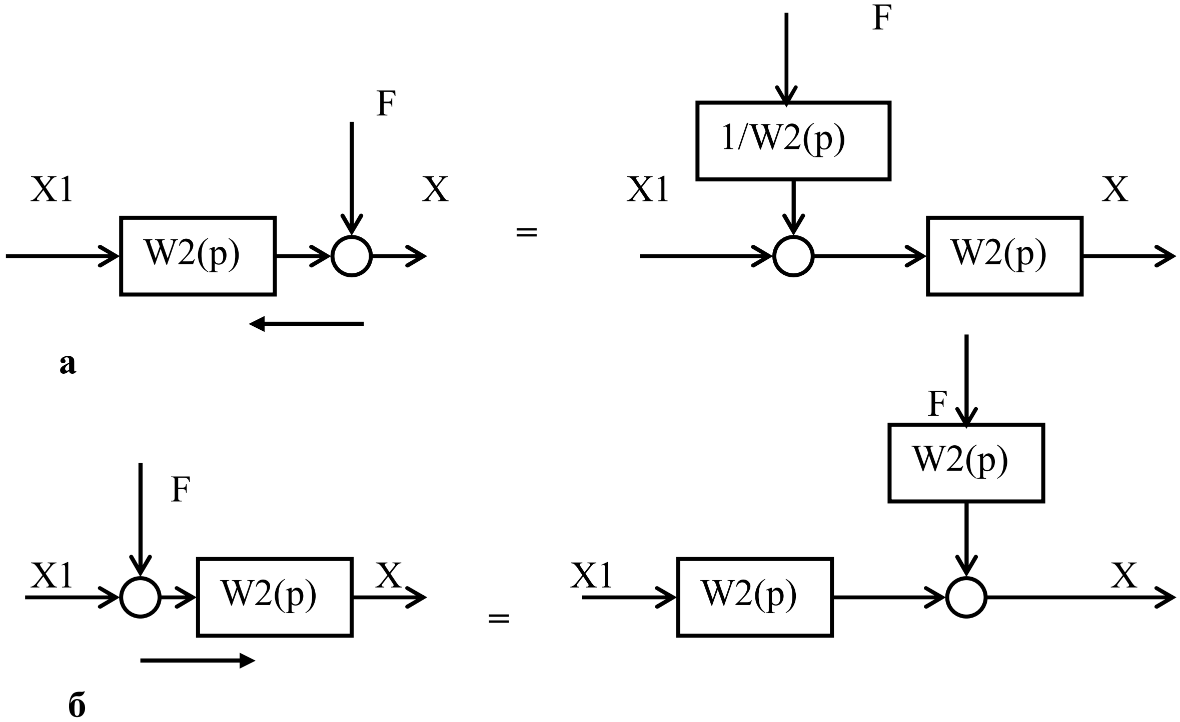


Рис. 4.4. Правила переноса сумматора

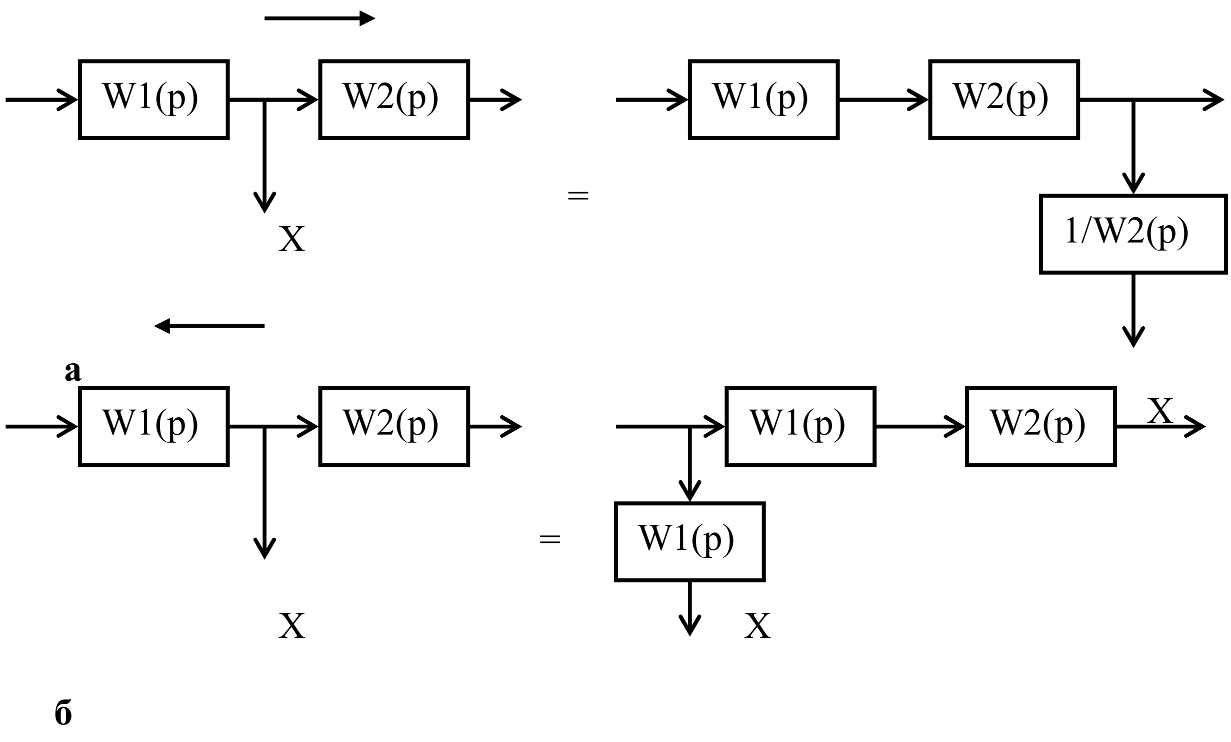


Рис. 4.5. Правила переноса точки разветвления

Правила перестановки сумматоров поясняет рис. 4.6.

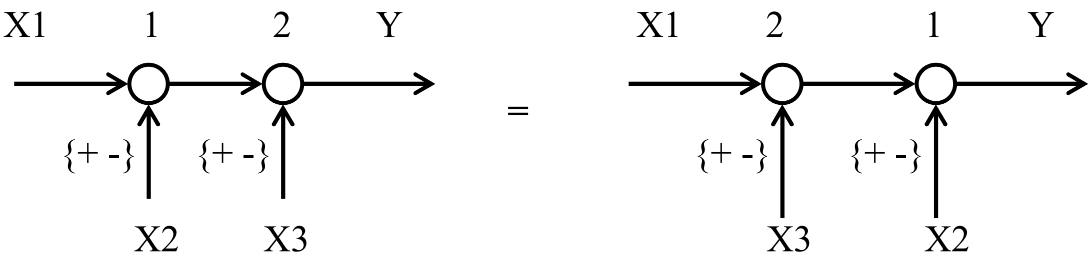


Рис. 4.6. Правила перестановки сумматоров

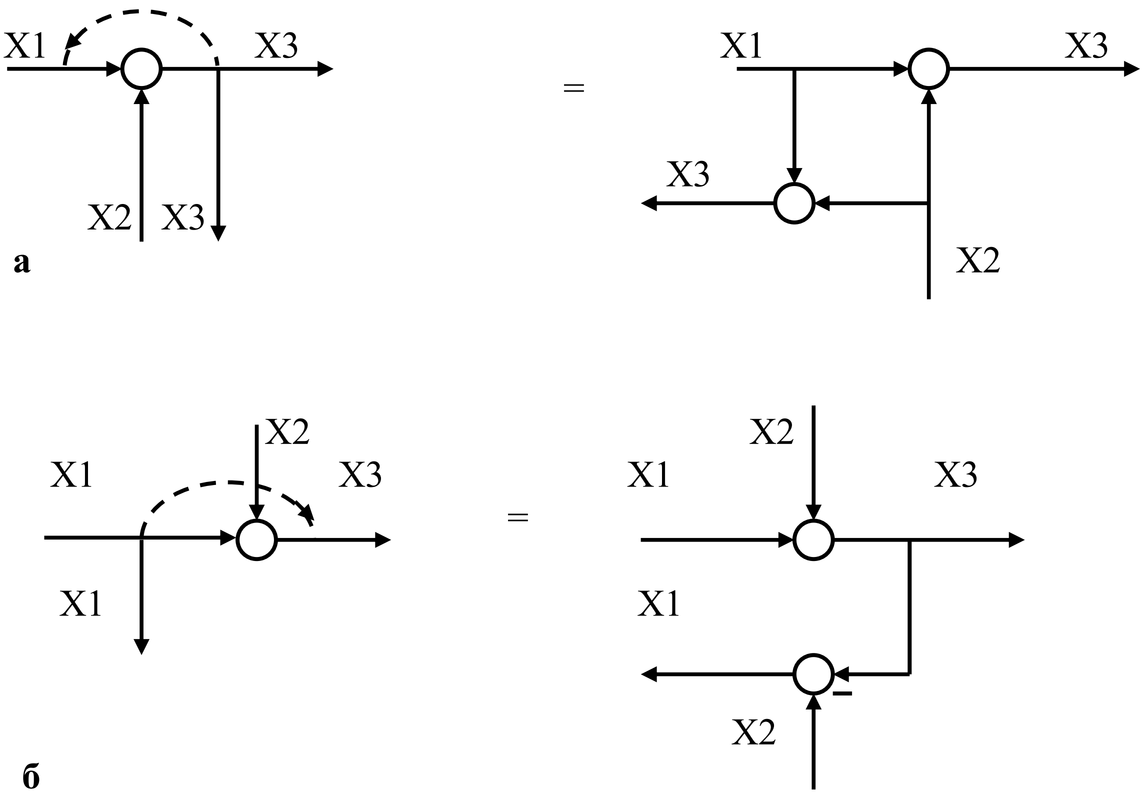


Рис. 4.7. Правила переноса узла через сумматор

Пример преобразования структурной схемы

Основной задачей преобразования многоконтурной структурной схемы является приведение ее к схеме с неперекрещивающимися связями, когда отдельные контуры не сцепляются друг с другом. После этого каждый из этих контуров может быть заменен эквивалентным звеном. В результате исходная схема приводится к одноконтурной.

На рис. 4.8 *приведен пример поэтапного преобразования структурной схемы.*

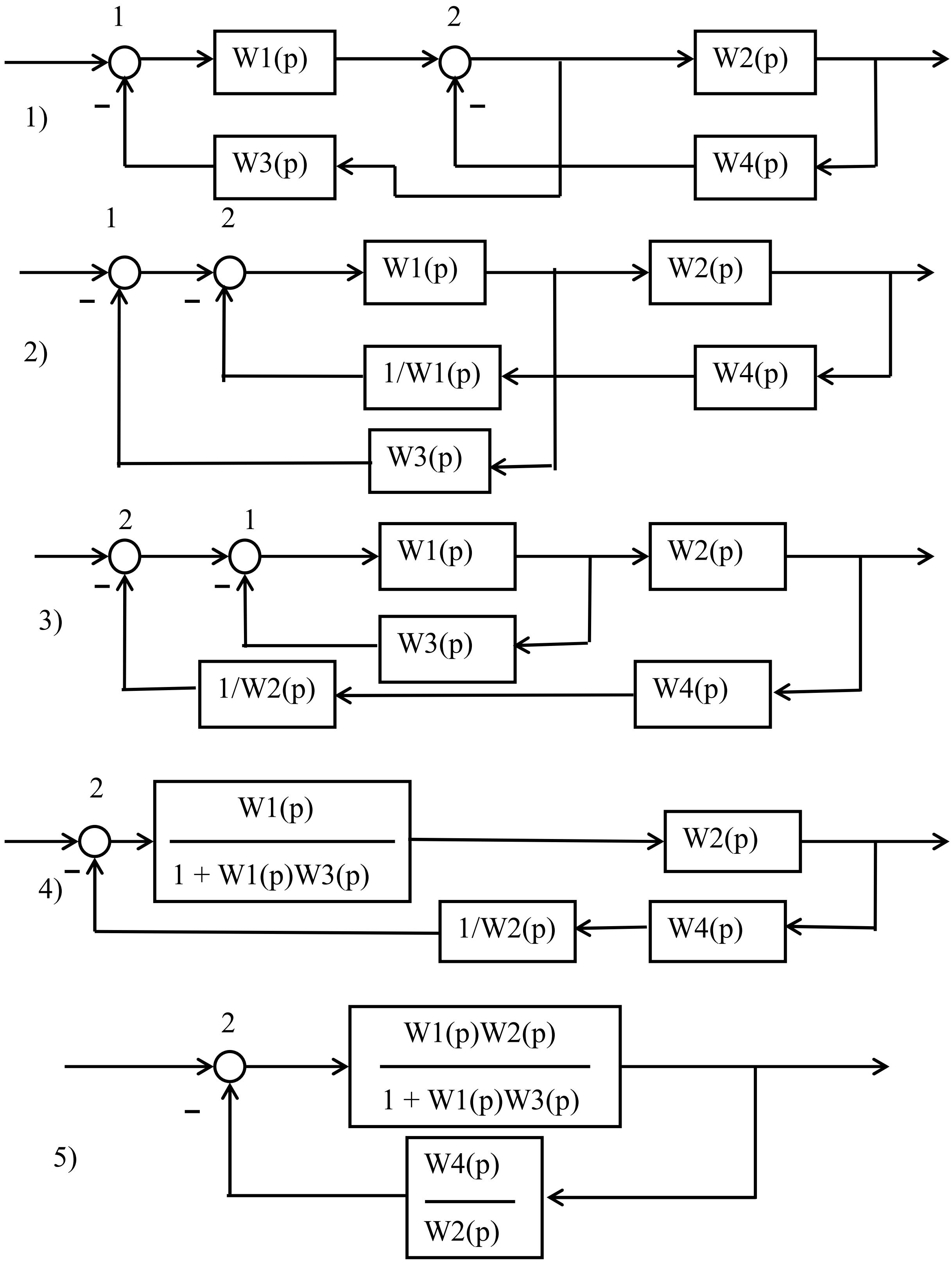


Рис. 4.8. Этапы преобразования структурной схемы

Очередным преобразованием система приводится к одному эквивалентному звену.

4.2. Статические режимы САУ

Как всякая динамическая система, САУ может находиться в одном из двух режимов - стационарном (установившемся) и переходном. Существует два вида стационарных режимов САУ - статические и динамические.

Статический режим (статика) это режим, при котором система находится в состоянии покоя вследствие того, что все внешние воздействия и параметры самой системы не меняются во времени.

Динамический стационарный режим возникает, когда приложенные к системе внешние воздействия изменяются по какому-либо установившемуся закону, в результате чего система приходит в режим установившегося вынужденного движения.

Важными вопросами статики является обеспечение заданной статической точности, а также изучение статических характеристик элементов и систем. По виду этих характеристик различают статическое и астатическое регулирование и управление.

Уравнения статики САУ получаются из уравнения динамики:

$$Y = Wз(p)X. \tag{4.8}$$

В (4.8) $$Wз(p) = \frac{Wyx(p)}{1 + W(p)},$$

где $W_{yx}(p)$ - передаточная функция, определяющая зависимость Y от X при отсутствии обратной связи, а $W(p)$ - передаточная функция разомкнутой системы. Для получения уравнения статики необходимо в $Wз(p)$ подставить $p=0$, что соответствует постоянству всех переменных X,Y,Z, т.е. равенству нулю их производных.

В качестве примера рассмотрим уравнение статического режима для САУ с передаточной функцией

$$Wз(p) = \frac{Kн(T_1p+1)(T_2p+1)}{(T_1p+1)(T_2p+1)+K_1}.$$

Уравнение статики при $p=0$ будет иметь вид

$$Wз(0) = \frac{Kн}{1 + K_1},$$

а $$Y_{ст} = W_з(0)X_{ст} = \frac{K_н}{1 + K_1} X_{ст} . \qquad (4.9)$$

Система, содержащая после ее приведения к одноконтурной только статические звенья, называется статической.

Задачами статики являются изучение статических характеристик и обеспечение заданной статической точности.

Под статической характеристикой понимается зависимость выходной координаты *Y* от входного воздействия по управлению *X* или от возмущения *Z*.

$$Y = F(X) \text{ при } Z=const, \qquad (4.10)$$

$$Y = F(Z) \text{ при } X = const. \qquad (4.11)$$

В общем случае структурная схема САУ с учетом управляющего и возмущающего воздействий может быть приведена к виду (рис. 4.9).

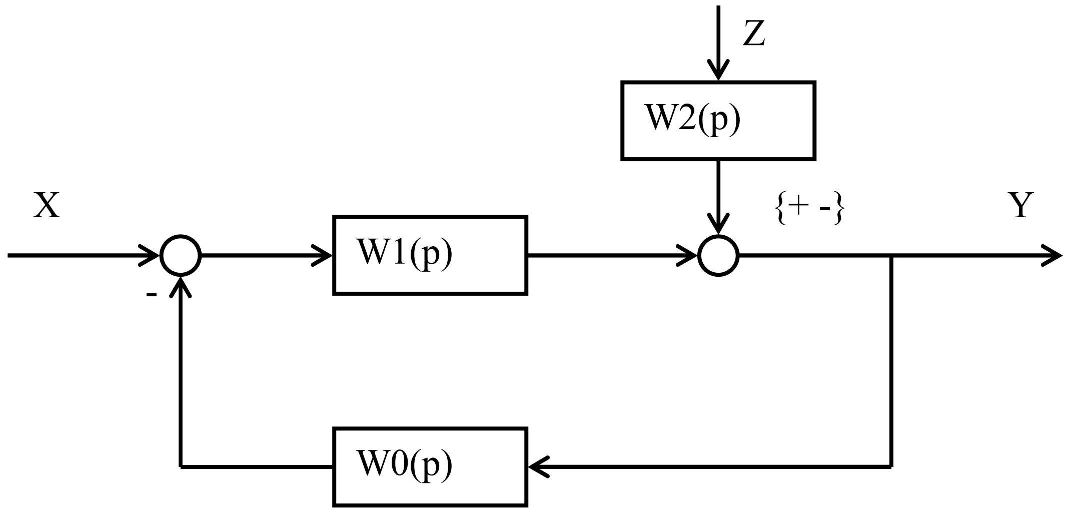


Рис. 4.9. Структурная схема САУ

Из схемы (рис. 4.9) следует, что САУ характеризуется передаточными функциями по управляющему *X* и по возмущающему *Y* воздействиям, а следовательно, и статическими характеристиками по управлению и по возмущению. Статические характеристики по управлению бывают линейными и нелинейными. Для количественной оценки статических характеристик по управлению введено понятие коэффициента передачи *K* как отношение выходной координаты *Y* к входной *X*:

$K = Y / X = tga = const$ для линейных характеристик.

Если Y и X имеют одинаковую размерность, то коэффициент передачи называют коэффициентом усиления.

Статические характеристики по возмущению (рис. 4.10) $Y=F(Z)$ могут быть представлены семейством характеристик для различных заданных постоянных значений X. Для заданного значения Xn=const рост возмущения Z уменьшает значение Y, если возмущение действует со знаком “минус” .

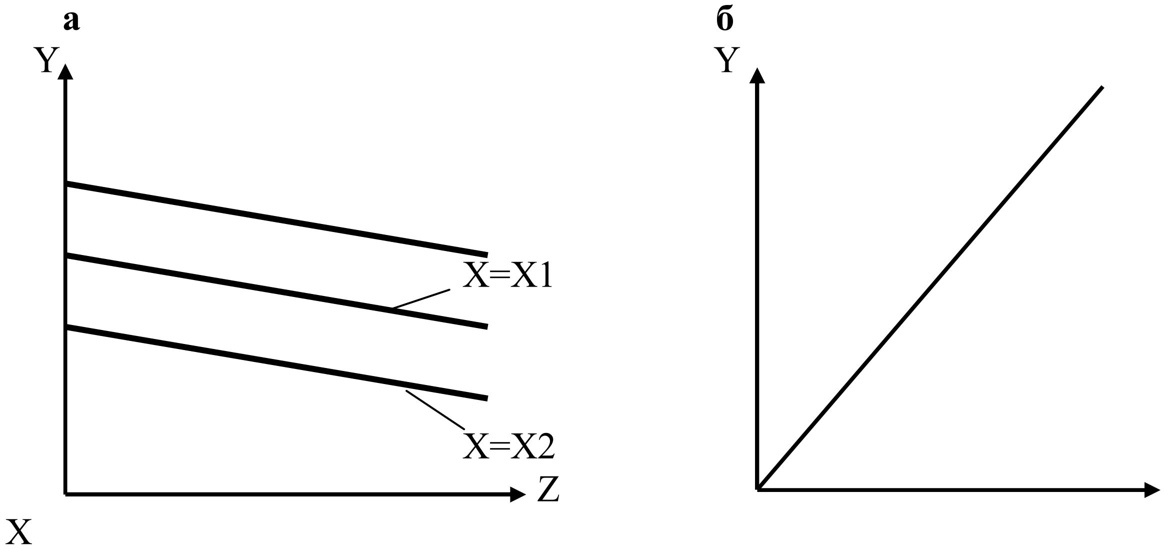


Рис. 4.10. Статические характеристики
по возмущению (а) и по управлению (б)

В системах, которые обеспечивают в установившемся режиме равенство управляемой переменной заданному значению (статизм равен нулю), осуществляется астатическое управление. Статическая характеристика астатической системы является прямой линией, параллельной оси абсцисс.

Поведение астатического регулятора, содержащего интегрирующее звено, можно охарактеризовать, рассмотрев его работу при разомкнутой главной обратной связи. Если подать на вход разомкнутой астатической системы постоянный сигнал, то на ее выходе можно получить непрерывное изменение выходной переменной с постоянной скоростью. Отношение скорости изменения выходной переменной к сигналу на входе называется *коэффициентом усиления астатической системы*.

Для статического режима работы астатических систем не существует определенной зависимости между значением выходной переменной и положением регулирующего органа.

ГЛАВА 5
УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ САУ

Устойчивость является одним из необходимых условий, обеспечивающих нормальное функционирование автоматических систем. Поэтому чрезвычайно важно выяснить те условия, которые обеспечивают принципиальную работоспособность системы, ее устойчивость.

Признаком устойчивости САУ является существование установившегося состояния. Если отклонение выходной координаты от заданного значения (т.е. ошибка управления) не стремится к постоянной величине или к нулю, а возрастает или испытывает колебания, то САУ неустойчива. Причинами неустойчивости могут быть инерционность элементов и большой коэффициент передачи разомкнутой системы, так как многократно усиленное рассогласование, возвращающееся по цепи обратной связи на вход системы, не успевает из-за запаздывания в инерционных элементах отрабатываться.

Не останавливаясь на теоремах, доказанных Ляпуновым, рассмотрим, как можно оценить устойчивость линейных систем, описываемых дифференциальным уравнением вида

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^{(j)}(t). \qquad (5.1)$$

Решение этого уравнения содержит две составляющие, одна из которых, $y_{св}(t)$ (свободная или переходная составляющая), определяется решением однородного дифференциального уравнения:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = 0 \qquad (5.2)$$

при начальных условиях: $y(0) \neq 0; y' \neq 0; y'' \neq 0; \ldots$.

В линейных системах, для которых справедлив принцип суперпозиции, $y_{св}(t)$ не зависит от воздействий, а определяется только параметрами системы. В соответствии с определением устойчивости по Ляпунову, САУ асимптотически устойчива, если с течением времени при $t \to \infty$ свободная (переходная) составляющая решения линейного дифференциального уравнения будет стремиться к нулю. На рис. 5.1,а показаны $y_{св}(t)$, соответствующие устойчивым, а на рис. 5.1,б – неустойчивым системам.

Поведение свободной составляющей определяется решением однородного дифференциального уравнения

$$y_{св}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{p_i t}, \qquad (5.3)$$

где A_i – *постоянные интегрирования*, зависящие от начальных условий; p_i – *корни характеристического уравнения* $a_0 + a_1 p + ... + a_n p^n = 0$.

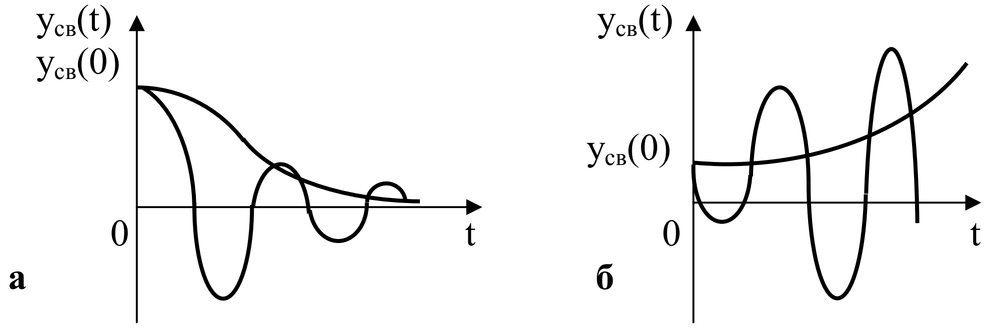


Рис. 5.1. Свободные составляющие переходного процесса в САУ:
а - в устойчивых, б - в неустойчивых

Для оценки условий устойчивости необходимо выяснить, когда выражение (5.3) будет стремиться к нулю. Так как система линейная, на значение свободной составляющей влияют только корни характеристического уравнения, которые зависят от структуры и параметров системы. Эти параметры – вещественные числа. Следовательно, вещественными являются и коэффициенты характеристического уравнения, определяемые параметрами системы и их комбинациями, а это означает, что корни уравнения могут быть либо только вещественными, либо комплексно-сопряженными:

$$p_k = \alpha_k,\ p_{k+1} = \alpha_{k+1} + j\omega_{k+1},\ p_{k+2} = \alpha_{k+1} - j\omega_{k+1}. \tag{5.4}$$

Если вещественных корней s, а комплексно-сопряженных n-s, то свободная составляющая может быть записана в следующем виде:

$$y_{св}(t) = \sum_{i=1}^{s} A_i e^{\alpha_i t} + \sum_{r=1}^{(n-s)/2} A_r e^{\alpha_r t} \sin(\omega_r t + \varphi_r), \tag{5.5}$$

откуда следует, что $y_{св}(t) = 0$ при $t \to \infty$ тогда и только тогда, когда все α_i и α_r отрицательны.

На комплексной плоскости корней корни с отрицательными вещественными частями располагаются на левой полуплоскости и называются левыми, а корни, расположенные в правой полуплоскости, называются правыми.

Необходимое и достаточное условие устойчивости линейной системы может быть сформулировано так: линейная система устойчива, если все корни ее характеристического уравнения являются левыми.

Так как при расположении корней слева от мнимой оси система устойчива, а справа неустойчива, то мнимую ось называют *границей устойчивости.* Если хотя бы один корень расположен на этой оси, то систему нельзя считать работоспособной, потому что малейшие изменения параметров могут привести к потере устойчивости.

Для оценки устойчивости системы практически не требуется находить корней ее характеристического уравнения в связи с тем, что разработаны косвенные признаки, по которым можно судить о знаках действительных частей этих корней и тем самым об устойчивости системы, не решая самого характеристического уравнения. Эти косвенные признаки называются критериями устойчивости.

5.1. Частотные критерии устойчивости

Они позволяют оценить устойчивость замкнутых систем косвенным путем с помощью частотных характеристик. Доказательство частотных критериев основано на принципе аргумента.

Принцип аргумента. Оценка устойчивости основана на значении корней характеристического уравнения p_1 - p_n. При этом характеристическое уравнение вида

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0 = F(p) \qquad (5.6)$$

можно представить в форме произведения однотипных сомножителей

$$a_n (p - p_1)(p - p_2)...(p - p_n) = F(p) \ . \qquad (5.7)$$

Для перехода к частотным характеристикам вводим замену $p \to j\omega$ и получаем вектор

$$F(j\omega) = a_n (j\omega - p_1)(j\omega - p_2)...(j\omega - p_n) \ . \qquad (5.8)$$

Угол поворота этого вектора $\varphi_F(\omega)$ определяется суммой углов поворота $\varphi_i(\omega)$ отдельных сомножителей $(j\omega - p)$:

$$\varphi_F(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\omega) \ .$$

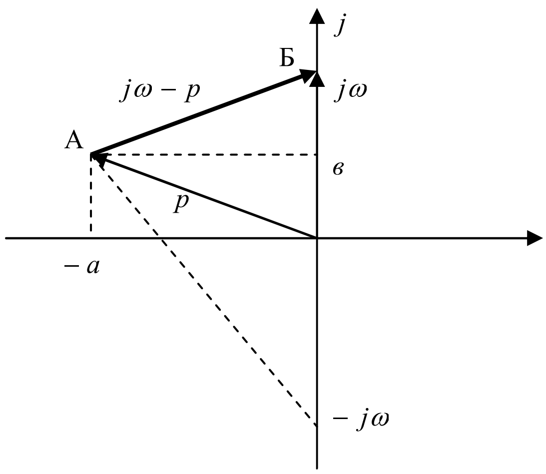


Рис. 5.2. Левый корень

Если корень характеристического уравнения будет левым $p = -a + jb$, то вектор $j\omega - p$ отобразится на комплексной плоскости отрезком АБ (рис. 5.2). Из рис. 5.2 видно , что при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ вектор АБ будет вращаться относительно точки А и скользить по мнимой оси от минус бесконечности до плюс бесконечности.

Его результирующий угол поворота составит $\varphi_{1l}(\omega) = 180^0$.

Для правого корня p результирующий вектор $j\omega - p$ расположится в правой части комплексной плоскости, а его результирующий угол поворота составит $\varphi_{1m}(\omega) = -180^0$.

Если общее число корней n будет содержать l левых и m правых корней, т.е. $n=l+m$, то

$$\varphi_F(\omega) = l\varphi_{1l}(\omega) + m\varphi_{1m}(\omega) = l\pi + m\pi \ .$$

Так *как* $l=n-m$, то

$$\varphi_F(\omega) = (n-m)\pi - m\pi = (n - 2m)\pi , \tag{5.9}$$

что соответствует изменению ω от $-\infty$ до $+\infty$.

Если ω изменяется от 0 до $+\infty$, то

$$\varphi_F(\omega) = (n-2m)\pi/2 \ . \tag{5.10}$$

Это и есть математическое выражение принципа аргумента.

5.2. Критерий устойчивости Михайлова

Критерий устойчивости Михайлова предназначен для оценки устойчивости системы по его характеристическому уравнению. Устойчивая система содержит только левые корни, т.е. $m=0$. И тогда, согласно формуле (5.10), угол поворота характеристического частотного вектора при изменении ω от 0 до $+\infty$ составит $\varphi(\omega)=+n\pi /2,$ т.е. для устойчивости системы характеристический частотный вектор должен пройти последовательно (поочередно) в положительном направлении (против часовой стрелки) n квадрантов. Вектор начинает движение при $\omega=0$ с положительной вещественной оси.

Порядок расчета устойчивости по критерию Михайлова:

1. Записывается характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$F(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0 \ .$$

2. Производится замена $p = j\omega$ и выделяются вещественная $P(\omega)$ и мнимая $Q(\omega)$ слагаемые.

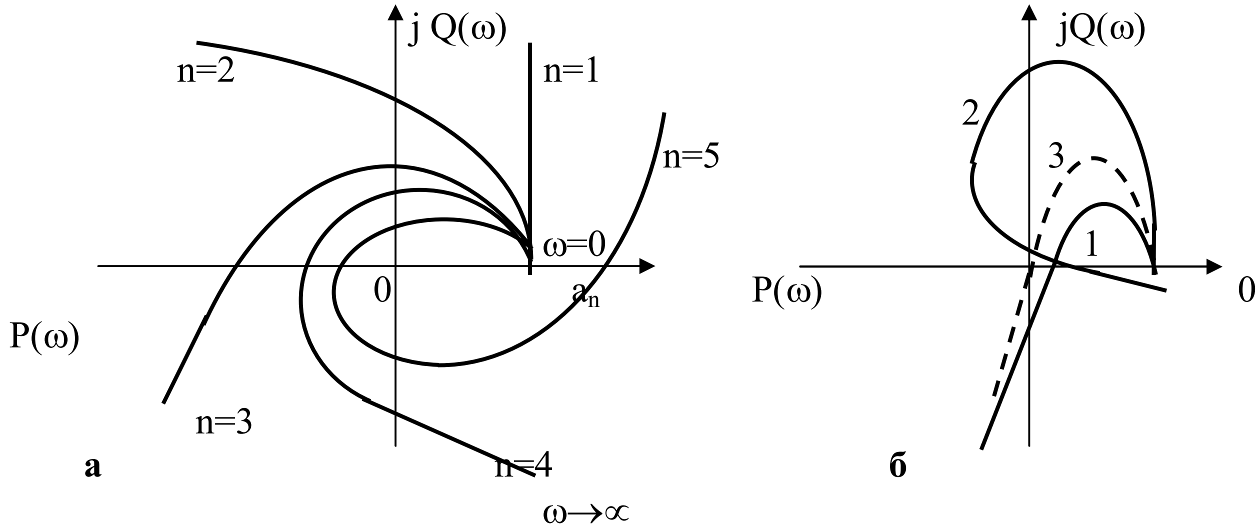


Рис. 5.3. Годографы Михайлова для систем:
а - устойчивых , б - неустойчивых

3. В осях координат $P(\omega)$, $jQ(\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ строят характеристический частотный вектор (годограф Михайлова).

4. По виду годографа Михайлова судят об устойчивости системы. Устойчивые годографы проходят поочередно n квадрантов. На границе устойчивости системы годограф проходит через начало координат.

Различные виды годографов представлены на рис. 5.3.

Системе, находящейся на границе устойчивости, соответствует годограф, проходящий через начало координат комплексной плоскости (кривая 3).

5.3. Критерий устойчивости Найквиста

Этот критерий позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по амплитудно-фазовой частотной характеристике (а.ф.х.) $W(j\omega)$ разомкнутой системы. Условие устойчивости замкнутой системы сводится к требованию, чтобы а.ф.х. разомкнутой системы не охватывала точку $(-1, j0)$. На рис. 5.4, а характеристики 1 и 4 соответствуют устойчивым системам, характеристика 3 - неустойчивой, а характеристика 2 - нахождению системы на границе устойчивости. Если, например, уменьшить коэффициент передачи в неустойчивой системе, то ее а.ф.х. сожмется к началу координат, в результате чего система станет устойчивой. Наоборот, при увеличении коэффициента передачи характеристика устойчивой системы в конце концов охватит точку *(-1, j0)* и система потеряет устойчивость.

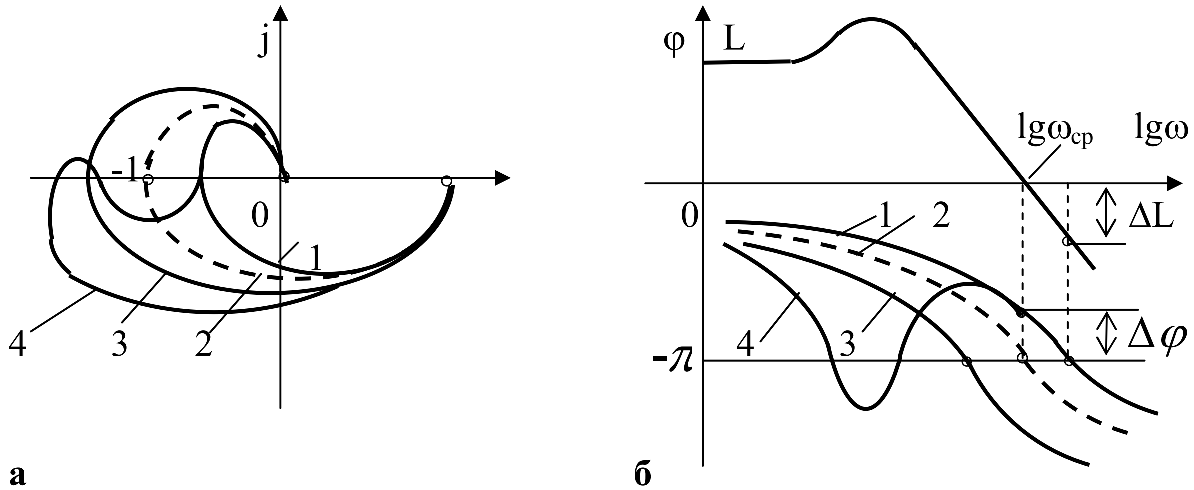


Рис. 5.4. Амплитудно-фазовые и логарифмические частотные характеристики устойчивых и неустойчивых САУ

Данная выше формулировка критерия Найквиста относится к системам, которые являются устойчивыми в разомкнутом состоянии. В случае одноконтурной системы устойчивость в разомкнутом состоянии всегда обеспечивается, если система состоит только из устойчивых звеньев. При наличии местных обратных связей должна быть еще проверена устойчивость образованных этими связями контуров. Для этого, в свою очередь, может быть применен критерий Найквиста или любой другой.

Для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии, критерий Найквиста имеет такую формулировку: *для устойчивости системы в замкнутом состоянии а.ф.х. разомкнутой системы должна охватывать точку (-1; j0).* При этом число пересечений ею отрицательной действительной полуоси левее точки *(-1; j0)* сверху вниз должно быть на *k/2* больше числа пересечений в обратном направлении, где *k* – число полюсов передаточной функции *W(p)* разомкнутой системы с положительной действительной частью.

В соответствии с критерием Найквиста об устойчивости можно судить не только по а.ф.х., но и совместно по амплитудно- частотной и фазово-частотной характеристикам разомкнутой системы. Обычно при этом пользуются логарифмическими характеристиками, что представляет большое удобство в силу простоты их построения. Согласно критерию Найквиста, для системы, устойчивой в разомкнутом состоянии, условием устойчивости ее в замкнутом состоянии является неохват а.ф.х. $W(j\omega)$ точки $(-1; j0)$. Последнее имеет место, если при частоте, на которой $A(\omega) =1$, фаза $\varphi (\omega) > -180^0$, т.е. абсолютное значение фазы меньше 180^0. Сказанное непосредственно следует из рис. 5.4 а, б. Таким образом, применительно к логарифмическим характеристикам, если учесть при этом, что значению $A=1$ соответствует $L = 20lgA = 0$, критерий устойчивости Найквиста для систем, устойчивых в разомкнутом состоянии, сводится к тому, что л.а.ч.х. должна пересечь ось абсцисс раньше, чем фаза окончательно перейдет за значение -180^0. Или иными словами, на частоте среза $\omega_{ср}$ величина фазы должна быть меньше 180^0. Изложенное иллюстрируется рис. 5.4, б. Здесь изображены л.а.ч.х. $L(\omega)$ и четыре варианта л.ф.х. $\varphi (\omega)$. В случае л.ф.х. 1 и 4 замкнутая система устойчива. Л.ф.х. 2 соответствует нахождению замкнутой системы на границе устойчивости, а л.ф.х. 3 - неустойчивой замкнутой системе.

Для астатических систем и систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии, требования к л.а.ч.х. и л.ф.х. в отношении устойчивости можно сформулировать, исходя из соответствующих требований к а.ф.х.. В частности, для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии, условием устойчивости в замкнутом состоянии является следующее: при положительной л.а.ч.х. число пересечений л.ф.х. уровня -180^0 снизу вверх должно быть на $k/2$ раз больше числа пересечений в обратном направлении.

При оценке устойчивости систем одного факта устойчивости недостаточно. Необходимо еще оценить величину запаса устойчивости, т.е. степени удаленности системы от границы устойчивости. Система, которая теоретически является устойчивой, но находится очень близко к границе устойчивости, практически при ее реализации может оказаться неустойчивой как вследствие неточности математического описания системы, использованного при оценке устойчивости, так и из-за изменения во времени параметров системы. Основное распространение в качестве меры запаса устойчивости получили вытекающие из критерия Найквиста две величины - запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi$ и запас устойчивости по амплитуде ΔL в логарифмическом масштабе. Эти величины показаны на рис. 5.4, б для системы с л.ф.х., представленной кривой 1. Аналогично они могут быть найдены и по а.ф.х.. Запас устойчивости по фазе определяется величиной, на которую должно возрасти запаздывание по фазе в системе на частоте среза $\omega_{ср}$, чтобы система оказалась на границе устойчивости. Запас устойчивости по амплитуде определяется величиной допустимого подъема л.а.ч.х., при котором система окажется на границе устойчивости.

Таким образом, запас по амплитуде представляет собой запас по коэффициенту передачи k разомкнутой системы по отношению к его критическому по устойчивости значению. Рекомендуется выбирать запас устойчивости по фазе больше 30^0, а запас устойчивости по амплитуде больше 6 дБ. Последнее соответствует примерно двойному запасу коэффициента передачи по устойчивости.

Доказательство критерия Найквиста

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$1+W(p) = 0, \tag{5.11}$$

в которое входит передаточная функция условно разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}. \tag{5.12}$$

С учетом (5.12) уравнение (5.11) запишем в виде

$$\frac{[A(p) + B(p)]}{A(p)} = 0. \tag{5.13}$$

Обозначим корни числителя через $p_1, p_2, p_3, \dots p_n$, а корни знаменателя уравнения (5.13) через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n$. Тогда уравнение (5.13) можно представить как

$$F(p) = \frac{A(p) + B(p)}{A(p)} = \frac{c_0(p - p_1)(p - p_2)...(p - p_n)}{a_0(p - \lambda_1)(p - \lambda_2)...(p - \lambda_n)}. \tag{5.14}$$

При переходе к частотной функции заменой $p \to j\omega$ получим

$$F(j\omega) = 1 + W(j\omega) = \frac{c_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)...(j\omega - p_n)}{a_0(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2)...(j\omega - \lambda_n)} = \frac{F_1(j\omega)}{F_2(j\omega)}. \tag{5.15}$$

На основании принципа аргумента при изменении ω от 0 до $+\infty$ результирующая фаза будет равна сумме углов поворота всех векторов сомножителей числителя и знаменателя.

Для устойчивой замкнутой системы вектор числителя $F_1(j\omega)$ повернется при изменении ω от нуля до бесконечности на угол $\varphi_1 = n\pi/2$.

Если система устойчива в разомкнутом состоянии, то вектор $F_2(j\omega)$ также повернется на угол $\varphi_2 = n\pi/2$. Результирующий угол поворота вектора $F(j\omega)$ будет равен разности углов поворота векторов $F_1(j\omega)$ и $F_2(j\omega)$. Тогда получим $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = n\pi/2 - n\pi/2 = 0$, т.е. приращение аргумента результирующего вектора равно нулю.

С другой стороны, на основании (5.11)

$$F(j\omega) = 1 + W(j\omega). \tag{5.16}$$

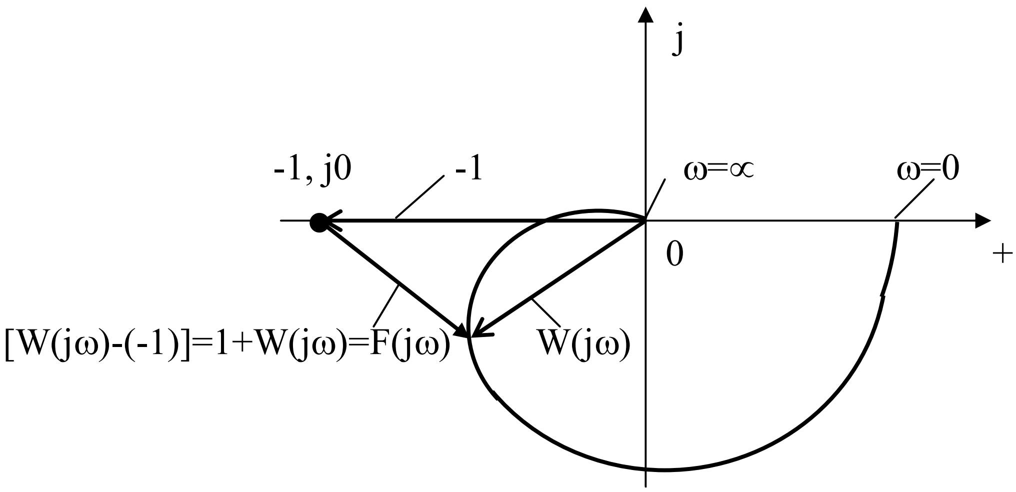


Рис. 5.5. К доказательству критерия Найквиста

Изобразим вектор $F(j\omega)$ совместно с вектором $W(j\omega)$ согласно уравнению (5.16) на комплексной плоскости а.ф.х. разомкнутой системы (рис. 5.5). Для устойчивой системы достаточно, чтобы а.ф.х. разомкнутой системы не охватывала точку с координатами $(-1;\ j0)$ (только тогда результирующий угол поворота $\varphi = 0$).

Для случая, когда система в разомкнутом состоянии является неустойчивой и имеет m правых корней, то результирующий угол поворота вектора $F(j\omega)$ будет

$$\varphi = n\pi/2 - [(n\text{-}m)\pi/2 - m\pi/2)] = 2m\pi/2 = m\pi. \tag{5.17}$$

Это означает, что для устойчивой системы а.ф.х. должна охватывать точку $-(1;\ j0)$ $m/2$ раз.

5.4. Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Применительно к задачам теории управления критерий Гурвица можно сформулировать так: *автоматическая система, которой соответствует характеристическое уравнение*

$$a_0p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + ... + a_n = 0,$$

устойчива, если при $a_0 > 0$ положительны все определители $\Delta_1, \Delta_2, ...,\Delta_n$ вида

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \;...\; a_{2i-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 \;...\; a_{2i-2} \\ 0 & a_1 & a_3 \;...\; a_{2i-3} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \;..\; a_{i-2} & a_i \end{vmatrix} \qquad i = 1, 2, 3, ..., n. \tag{5.18}$$

Если хотя бы один из определителей (5.18), называемых определителями Гурвица, отрицателен, то система неустойчива.

Определители (5.18) составляют следующим образом: на главной диагонали записывают все коэффициенты характеристического уравнения от a_1 до a_n (в порядке возрастания индекса), затем в каждом столбце выше диагональных коэффициентов записывают коэффициенты с последовательно возрастающими индексами, а ниже – с последовательно убывающими индексами; на место коэффициентов с индексами большими n или меньшими нуля проставляют нули. При этом каждая i-я матрица получается квадратной размером $i \times i$.

Так как последний столбец главного определителя Δ_n содержит всегда только один элемент a_n, отличный от нуля, то, согласно известному свойству определителей,

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \tag{5.19}$$

Если главный определитель $\Delta_n = 0$, а все остальные определители положительны, то система находится на *границе устойчивости*. С учетом выражения (5.19) это условие распадается на два:

$$a_n = 0 \text{ и } \Delta_{n-1} = 0. \tag{5.20}$$

Условию $a_n = 0$ соответствует один нулевой корень, т.е. апериодическая граница устойчивости, а условию $\Delta_{n-1} = 0$ – пара мнимых корней, т.е. колебательная граница устойчивости.

Как показывает анализ, для устойчивости систем не выше четвертого порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения и определитель Δ_{n-1} были положительными.

Критерий Гурвица следует применять для анализа систем не выше пятого порядка. При более высоком порядке систем вычисление определителей становится затруднительным без применения средств вычислительной техники.

Пример 1. *Характеристическое уравнение замкнутой системы*

$$D(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 2p^3 + 6p^2 + 10p + 10 = 0.$$

Определить устойчивость системы.

Решение. *Все коэффициенты этого характеристического уравнения положительны, а определитель Гурвица Δ_2 с четным индексом равен*

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 6 \cdot 10 - 2 \cdot 15 = 30 > 0.$$

Система устойчива.

5.5. Построение областей устойчивости

Определение областей устойчивости. Пусть все коэффициенты характеристического уравнения замкнутой системы

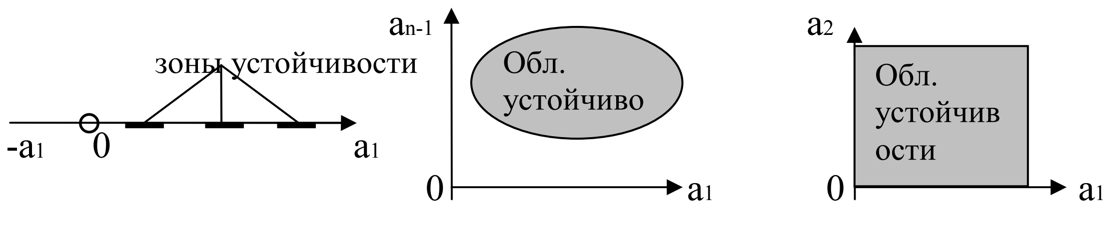
$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0 \tag{5.21}$$

заданы, кроме одного, например, a_1. Допустим, что коэффициент a_1 изменяется от нуля до бесконечности. Будем придавать этому коэффициенту ряд значений и определять при этом значения всех n корней характеристического уравнения. Если на некоторой вещественной полуоси отмечать для каждого значения a_1 точку, которой соответствует определенное распределение корней на комплексной плоскости, то выбранная полуось может быть разбита на ряд отрезков в зависимости от того, все или не все корни левые. На стыках таких отрезков один или несколько корней находятся на мнимой оси (рис. 5.6,а).

Если в уравнении изменяются два коэффициента, то на плоскости этих коэффициентов, вычисляя все корни уравнения, можно выделить области устойчивости и неустойчивости (рис. 5.6,б).

Аналогично можно исследовать совокупность нескольких коэффициентов характеристического уравнения. Наиболее просто область устойчивости выделяется для уравнения $p^2 + a_1 p + a_2 = 0$: $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ (рис. 5.6,в).

Понятие о D-разбиении пространства коэффициентов характеристического уравнения. Если при значениях каких-либо двух коэффициентов характеристического уравнения в плоскости корней имеется k корней левых и $(n-k)$ корней правых, то, изменяя значения коэффициентов (например, a_0 и a_n), получим определенную кривую на плоскости коэффициентов, ограничивающую область, каждая точка которой характеризует указанное расположение корней относительно мнимой оси. Эту область обозначим $D(k;\ n-k)$ (рис. 5.7).



а **б** **в**

Рис. 5.6. Зоны и области устойчивости

Число корней может иметь любое целое значение, поэтому в плоскости коэффициентов можно указать области *D(k; n-k),* соответствующие разным значениям *k*. Например, при степени *n*=4 можно рассматривать области *D(0; 4); D(1; 3); D(2; 2); D(3; 1); D(4;0)*. Из этих областей только последняя является областью устойчивости.

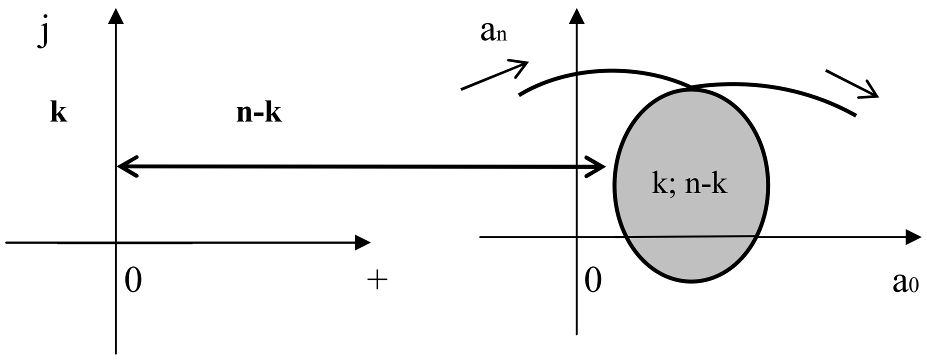


Рис. 5.7. Области распределения корней

Разбиение пространства коэффициентов на области устойчивости и неустойчивости называется *D-разбиением*.

Мнимая ось в плоскости корней есть отображение границы D-разбиения в плоскости коэффициентов (рис. 5.7). Чтобы определить границу D-разбиения, надо заменить в характеристическом уравнении p на $j\omega$ и изменять частоту от минус бесконечности до плюс бесконечности.

D-разбиение плоскости одного комплексного параметра. Если требуется оценить влияние на устойчивость только одного параметра, а значения остальных параметров заданы, целесообразно ввести вместо этого параметра комплексную величину, вещественная часть которой равна исследуемому параметру. Пусть параметр τ входит в характеристическое уравнение

$$S(p) + \tau R(p) = 0, \text{ или } \tau = -\frac{S(p)}{R(p)} \qquad (5.15)$$

В качестве τ может быть принята постоянная времени T или коэффициент усиления k любого звена системы. Полагаем временно, что τ - комплексное число. При подстановке $p \to j\omega$ из (5.15) получим

$$\tau = \tau(j\omega) = \frac{-S(j\omega)}{R(j\omega)} = x(\omega) + jy(\omega). \qquad (5.16)$$

Придавая различные значения ω, строим кривую, отображающую мнимую ось комплексной плоскости корней, т.е. границу D-разбиения (рис. 5.8).

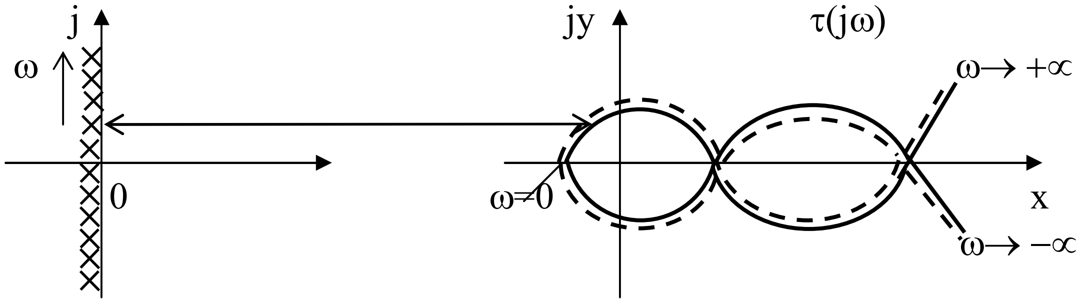


Рис. 5.8. Граница D-разбиения

Кривую достаточно построить в пределах $0 < \omega < +\infty$, а затем дополнить зеркальным отображением. Далее необходимо наметить предполагаемую область устойчивости *D(n; 0)*. Для этого применяют правило штриховки: границей в плоскости корней является мнимая ось, и при движении по ней от $-\infty$ до $+\infty$ область корней устойчивой системы располагается слева. Соответственно этому в плоскости $\tau(j\omega)$ на D-кривой необходимо отметить направление движения в диапазоне частот $-\infty < \omega < +\infty$ и также заштриховать левую часть кривой. Так как τ по физическому смыслу есть вещественная величина, то рассматриваются лишь те отрезки вещественной оси, которые лежат в области, окруженной внутренней штриховкой.

Для каждой области указывают распределение корней. Для этого полагают $\tau = 0$ и находят корни характеристического уравнения $S(p) = 0$. Полученное распределение корней *D(k; n-k)* считают заданным и наносят на плоскость $\tau(j\omega)$ в области начала координат. Если в плоскости $\tau(j\omega)$ при движении от одной точки к другой пересекается D-кривая и при этом происходит переход с заштрихованной стороны на незаштрихованную, то в плоскости корней один корень пересекает мнимую ось. Если штриховка двойная (например, в точке пересечения кривых), то мнимую ось пересекают два корня. Так находится область плоскости $\tau(j\omega)$, соответствующая расположению всех корней в левой полуплоскости.

Далее выбирают из этой области какое-либо значение $\tau_0 = x_0$ и проверяют устойчивость по любому критерию.

Пример 2. *Построить кривую D-разбиения для коэффициента усиления **k** разомкнутой системы. Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид*

$$0.0001\,p^5 + 0.011\,p^4 + 0.188\,p^3 + 0.98\,p^2 + 1.8p + 1 + k = 0.$$

Изменяя ω от 0 до $+\infty$, определяем $x(\omega)$ и $y(\omega)$ и строим D-кривую (рис. 5.9). *Определим из исходного уравнения **k**, заменим p на $j\omega$ и выделим вещественную и мнимую части:*

$$k = -(0.0117\omega^4 - 0.98\omega^2 + 1) - j(0.0001\omega^5 - 0.188\omega^3 + 1.8\omega) = x(\omega) + jy(\omega).$$

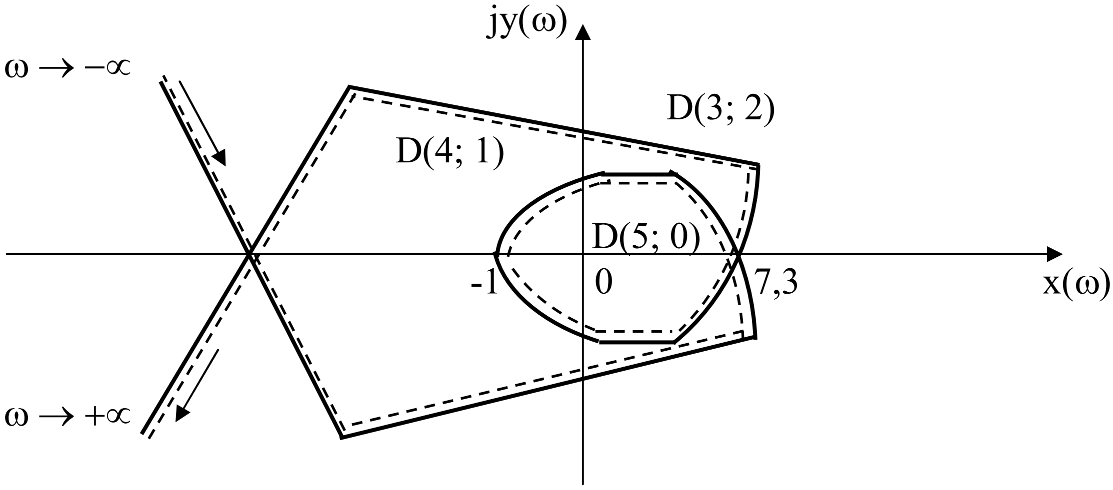


Рис. 5.9. D-кривая

В области с началом координат для любого значения k [-1;7,3] устанавливаем по любому из критериев устойчивости, что система устойчива. При переходе через линию с одинарной штриховкой прибавляется один правый корень.