Дискретно-стохастические модели (P-схемы)

При дискретно-стохастическом подходе к формализации процесса функционирования системы *S* подход остается аналогичный рассмотренному конечному автомату, то влияние фактора стохастичности можно проследить разновидности таких автоматов, а именно на вероятностных (стохастических) автоматах.

В общем виде вероятностный автомат (англ. probabilistic automat) можно определить как дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти в нем и может быть описано статистически.

Применение схем вероятностных автоматов (*P*-схем) имеет важное значение для разработки методов проектирования дискретных систем, проявляющих статистически закономерное случайное поведение, для выяснения алгоритмических возможностей таких систем и обоснования границ целесообразности их использования, а также для решения задач синтеза по выбранному критерию дискретных стохастических систем, удовлетворяющих заданным ограничениям.

Множество *G*, элементами которого являются всевозможные пары $\left(x_i, z_s\right)$, где x_i и z_s —-элементы входного подмножества *X* и подмножества состояний *Z* соответственно. Если существуют две такие функции φ и ψ, то с их помощью осуществляются отображения $G \rightarrow Z$ и $G \rightarrow Y$, то говорят, что $F = \left\langle Z, X, Y, \varphi, \psi \right\rangle$ определяет автомат детерминированного типа.

Введем в рассмотрение более общую математическую схему. Пусть *Ф* — множество всевозможных пар вида $\left(x_k, y_j\right)$, где y_j — элемент выходного подмножества *Y*. Потребуем, чтобы любой элемент множества *G* индуцировал на множестве *Ф* некоторый закон распределения следующего вида:

Элементы из Ф	**…**	**(z₁, y₁)…**	**(z₁, y₂)…**	**…**	**(z_K, y_{J-1})**	**(z_K, y_J)**
(x_i, z_k)	**…**	**b_{11}**	**b_{12}**	**…**	**$b_{K(J-1)}$**	**b_{KJ}**

При этом $\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} b_{kj} = 1$, где b_{kj} — вероятности перехода автомата в состояние z_k и появления на выходе сигнала y_j если он был в состоянии z_s и на его вход в этот момент времени поступил сигнал x_i. Число таких распределений, представленных в виде таблиц, равно числу элементов множества *G*. Обозначим множество этих таблиц через *B*. Тогда четверка элементов $B = \left\langle Z, X, Y, B \right\rangle$ называется вероятностным автоматом (*P* - автоматом).

Пусть элементы множества *G* индуцируют некоторые законы распределения на подмножествах *Y* и *Z*, что можно представить соответственно в виде:

Элементы из Y	**…**	**y_1**	**y_2**	**…**	**y_{J-1}**	**y_J**
(x_i, z_k)	**…**	**q_1**	**q_2**	**…**	**q_{J-1}**	**q_J**
Элементы из Z	**…**	**z_1**	**z_2**	**…**	**z_{J-1}**	**z_J**
(x_i, z_k)	**…**	**z_1**	**z_2**	**…**	**z_{J-1}**	**z_J**

При этом $\sum_{k=1}^{K} z_k = 1$ и $\sum_{k=1}^{K} q_k = 1$ где z_k и q_k — вероятности перехода *P*-автомата в состояние z_k и появления выходного

сигнала y_k при условии, что *P*-автомат находился в состоянии z_s и на его вход поступил входной сигнал x_i.

Если для всех *k* и *j* имеет место соотношение $q_k z_k = b_{kj}$, то такой *P*-автомат называется **вероятностным автоматом Мили**. Это требование означает выполнение условия независимости распределений для нового состояния *P*-автомата и его выходного сигнала.

Определение выходного сигнала *P*-автомата зависит лишь от того состояния, в котором находится автомат в данном такте работы. Другими словами, пусть каждый элемент выходного подмножества *Y* индуцирует распределение вероятностей выходов, имеющее следующий вид:

Элементы из Y	…	y_1	y_2	…	y_{K-1}	y_K
z_k	…	s_1	s_2	…	s_{I-1}	s_I

Здесь $\sum_{i=1}^{I} s_i = 1$, где s_i — вероятность появления выходного сигнала y_i при условии, что *P*-автомат находился в состоянии z_k.

Для всех *k* и *i* имеет место соотношение $z_k s_i = b_{ki}$, то такой *P*-автомат называется вероятностным автоматом Мура.

Понятие *P*-автоматов Мили и Мура введено по аналогии с детерминированным F-автоматом, задаваемым $F = \langle Z, X, Y, \varphi, \psi \rangle$. Частным случаем *P*-автомата, задаваемого как $P = \langle Z, X, Y, B \rangle$ являются автоматы, у которых либо переход в новое состояние, либо выходной сигнал определяются детерминированно. Если выходной сигнал *P*-автомата определяется детерминированно, то такой автомат называется

Y-детерминированным вероятностным автоматом. Аналогично, **Z-детерминированным вероятностным автоматом** называется ***P***-автомат, у которого выбор нового состояния является детерминированным.

Y-детерминированный ***P***-автомат задаётся таблицей переходов и таблицей выходов. Первую из этих таблиц можно представить в виде квадратной матрицы размерности К×К, которую будем называть матрицей переходных вероятностей или просто матрицей переходов ***P***-автомата. В общем случае такая матрица переходов имеет вид

$$P_p = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1K} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{K1} & p_{K2} & \dots & P_{KK} \end{Vmatrix}.$$

Для описания Y-детерминированного ***P***-автомата необходимо задать начальное распределение вероятностей вида

$$\begin{matrix} Z \dots z_1 & z_2 \dots z_{K-1} & z_K \\ D \dots d_1 & d_2 \dots d_{K-1} & d_K \end{matrix}$$

Здесь d_k — вероятность того, что в начале работы ***P***-автомат находится в состоянии k. При этом $\sum_{k=1}^{K} d_k = 1$.

Y-детерминированный ***P***-автомат можно задать в виде ориентированного графа, вершины которого сопоставляются состояниям автомата, а дуги — возможным переходам из одного состояния в другое. Дуги имеют веса, соответствующие вероятностям перехода p_{ij}, а около вершин графа пишутся

значения выходных сигналов, индуцируемых этими состояниями рис 1.

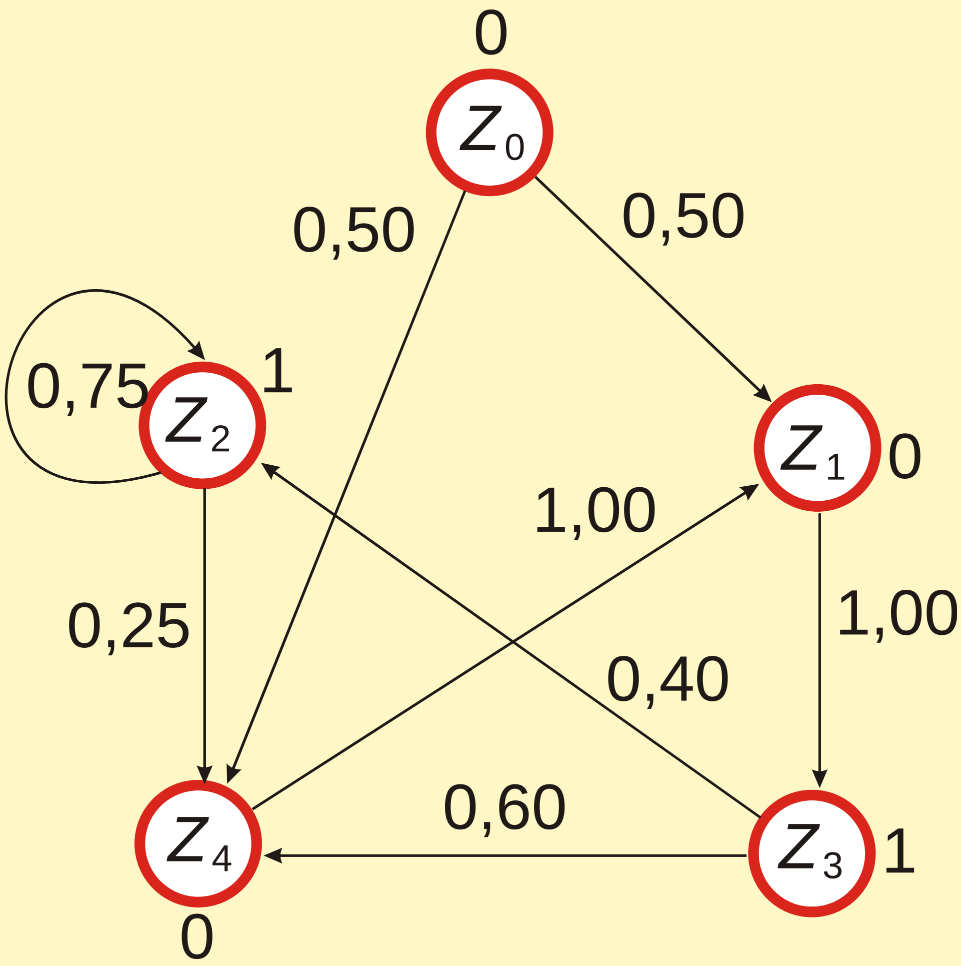

Рис 1.

***P*-автоматы могут использоваться как генераторы марковских последовательностей, которые необходимы при построении и реализации процессов функционирования систем *S* или воздействий внешней среды *E*.**

Для оценки различных характеристик исследуемых систем, представляемых в виде *P*-схем, кроме случая аналитических моделей можно применять и имитационные модели, реализуемые, например, методом статистического моделирования.

Непрерывно-стохастические модели (Q-схемы)

При непрерывно-стохастическом подходе в качестве типовых математических схем применяется система массового обслуживания (англ. queueing system), которые будем называть Q-схемами. Системы массового обслуживания представляют собой класс математических схем, разработанных в теории массового обслуживания и различных приложениях для формализации процессов функционирования систем, которые по своей сути являются процессами обслуживания.

В качестве процесса обслуживания могут быть представлены различные по своей физической природе процессы функционирования экономических, производственных, технических и других систем, например потоки поставок продукции некоторому предприятию, потоки деталей и комплектующих изделий на сборочном конвейере цеха, заявки на обработку информации ЭВМ от удаленных терминалов и т. д.

При этом характерным для работы таких объектов является случайное появление заявок (требований) на обслуживание и завершение обслуживания в случайные моменты времени, т. е. стохастический характер процесса их функционирования. Остановимся на основных понятиях массового обслуживания, необходимых для использования Q-схем, как при аналитическом, так и при имитационном.

В любом элементарном акте обслуживания можно выделить две основные составляющие:

1. ожидание обслуживания заявки;

2. собственно обслуживание заявки.

Это можно изобразить в виде некоторого *i*-го прибора обслуживания $П_i$ (рис. 2.), состоящего из накопителя заявок $Н_i$, в котором может одновременно находиться $l_i = \overline{0, L_i^H}$ заявок, где L_i^H —емкость *i*-го накопителя, и канала обслуживания заявок (или просто канала) $К_i$

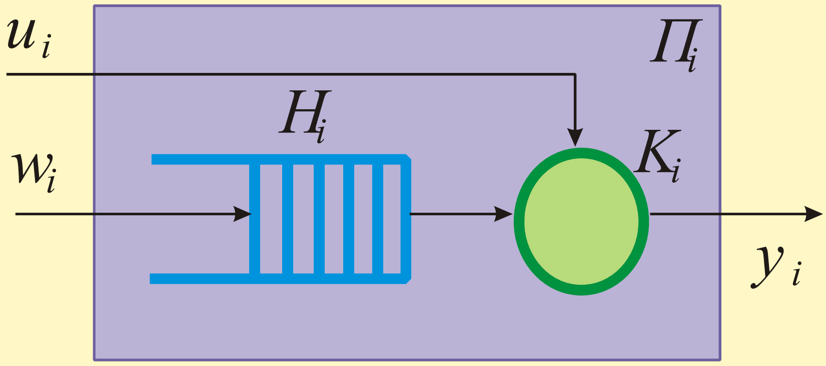

Рис. 2.

На каждый элемент прибора обслуживания $П_i$, поступают потоки событий: в накопитель $Н_i$ — поток заявок w_i на канал $К_i$ — поток обслуживании u_i.

Потоком событий называется последовательность событий, происходящих одно за другим в какие-то случайные моменты времени. Различают потоки однородных и неоднородных событий.

Поток событий называется однородным, если он характеризуется только моментами поступления этих событий (вызывающими моментами) и задается последовательностью $\{t_n\} = \{0 \le t_1 \le t_2 \ldots \le t_n \le \ldots\}$, где t_n — момент наступления *n*-го события — неотрицательное вещественное число.

Однородный поток событий также может быть задан в виде последовательности промежутков времени между *n*-м и *(n—1)*-м событиями $\{\tau_n\}$, которая однозначно связана с последовательностью вызывающих моментов $\{t_n\}$, где $\tau_n = t_n - t_n - t_{n-1}, n \geq 1$, $t_o = 0$, т. е. $\tau_1 = t_1$

Потоком неоднородных событий называется последовательность $\{t_n, f_n\}$, где t_n — вызывающие моменты; f_n — набор признаков события. Например, применительно к процессу обслуживания для неоднородного потока заявок могут быть заданы принадлежность к тому или иному источнику заявок, наличие приоритета, возможность обслуживания тем или иным типом канала и т. п.

Поток, в котором события разделены интервалами времени τ_1, τ_2,…, которые вообще являются случайными величинами. Пусть интервалы τ_1, τ_2,.., независимы между собой. Тогда поток событий называется **потоком с ограниченным последействием**. Пример потока событий приведен на рис. 3. , где обозначено T_j — интервал между событиями (случайная величина); $T_н$ — время наблюдения, T_c — момент совершения события.

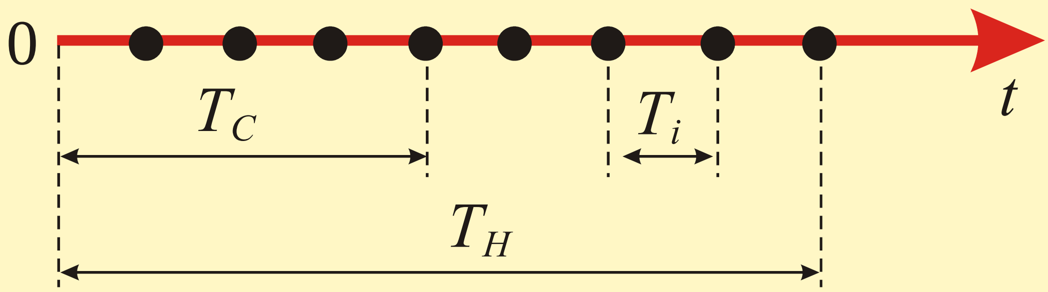

Рис. 3.

Интенсивность потока можно рассчитать экспериментально по формуле

$$\lambda = \frac{N}{T_н}$$

где N— число событий, произошедших за время наблюдения $T_н$.

Если $T_н$ =*const* или определено какой-либо формулой $T_j = f\left(T_{j-1}\right)$, то поток называется детерминированным. Иначе поток называется случайным.

Случайные потоки бывают:

1. **ординарными - когда вероятность одновременного появления 2-х и более событий равна нулю. Поток событий называется ординарным, если вероятность того, что на малый интервал времени Δt, примыкающий к моменту времени t, попадает больше одного события $P_{>1}(t, \Delta t)$, пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью того, что на этот же интервал времени Δt попадает ровно одно событие $P_1(t, \Delta t)$, т. е. $P_1(t, \Delta t)$» $P_{>1}(t, \Delta t)$.**
2. **стационарными - когда частота появления событий постоянная. Стационарным потоком событий называется поток, для которого вероятность появления того или иного числа событий на интервале времени τ зависит лишь от длины этого участка и не зависит от того, где на оси времени взят этот участок.**
3. **без последействия - когда вероятность не зависит от момента совершения предыдущих событий.**

Обычно при моделировании различных систем применительно к элементарному каналу обслуживания K_i можно считать, что поток заявок $w_i \in W$, т. е. интервалы времени между моментами появления заявок (вызывающие моменты) на входе K_i образует подмножество неуправляемых переменных, а поток обслуживания $u_i \in U$, т. е. интервалы времени между началом и

окончанием обслуживания заявки, образует подмножество управляемых переменных.

Заявки, обслуженные каналом *$К_i$* и заявки, покинувшие прибор *$П_i$*, по различным причинам необслуженными (например, из-за переполнения накопителя *$Н_i$*), образуют выходной поток $y_i \in Y$**, т. е. интервалы времени между моментами выхода заявок образуют подмножество выходных переменных.**

В практике моделирования систем, имеющих более сложные структурные связи и алгоритмы поведения, для формализации используются не отдельные приборы обслуживания, а Q-схемы, образуемые композицией многих элементарных приборов обслуживания *$П_i$* ((сети массового обслуживания). Если каналы *$К_i$* различных приборов обслуживания соединены параллельно, то имеет место многоканальное обслуживание (многоканальная Q-схема), а если приборы *$П_i$* и их параллельные композиции соединены последовательно, то имеет место многофазное обслуживание (многофазная Q-схема). Таким образом, для задания Q-схемы необходимо использовать оператор сопряжения *R*, отражающий взаимосвязь элементов структуры (каналов и накопителей) между собой. Связи между элементами Q-схемы изображают в виде стрелок (линий потока, отражающих направление движения заявок). Различают разомкнутые и замкнутые Q-схемы.

В разомкнутой Q-схеме выходной поток обслуженных заявок не может снова поступить на какой-либо элемент, т. е. обратная связь отсутствует.

в замкнутых Q-схемах имеются обратные связи, по которым заявки двигаются в направлении, обратном движению вход-выход.

Для задания Q-схемы также необходимо описать алгоритмы ее функционирования, которые определяют набор правил поведения заявок в системе в различных неоднозначных ситуациях. В зависимости от места возникновения таких ситуаций различают алгоритмы (дисциплины) ожидания заявок в накопителе H_i, и обслуживания заявок каналом K_i каждого элементарного обслуживающего прибора $П_i$ Q-схемы. Неоднородность заявок, отражающая процесс в той или иной реальной системе, учитывается с помощью введения классов приоритетов.

В зависимости от динамики приоритетов в Q-схемах различают статические и динамические приоритеты.

Статические приоритеты назначаются заранее и не зависят от состояний Q-схемы, т. е. они являются фиксированными в пределах решения конкретной задачи моделирования.

Динамические приоритеты возникают при моделировании в зависимости от возникающих ситуаций.

Исходя из правил выбора заявок из накопителя H_i на обслуживание каналом K_i можно выделить относительные и абсолютные приоритеты.

Относительный приоритет означает, что заявка с более высоким приоритетом, поступившая в накопитель H_i ожидает окончания обслуживания предшествующей заявки каналом K_i и только после этого занимает канал.

Абсолютный приоритет означает, что заявка с более высоким приоритетом, поступившая в накопитель H_i прерывает обслуживание каналом K_i заявки с более низким приоритетом и сама занимает канал (при этом вытесненная из K_i заявка может либо покинуть систему, либо может быть снова записана на какое-то место в H_i).

При рассмотрении алгоритмов функционирования приборов обслуживания $П_i$ (каналов K_i и накопителей H_i) необходимо также задать набор правил, по которым заявки покидают H_i и K_i, для H_i — либо правила переполнения, по которым заявки в зависимости от заполнения H_i, покидают систему, либо правила ухода, связанные с истечением времени ожидания заявки в H_i, для K_i — правила выбора маршрутов или направлений ухода.

Кроме того, для заявок необходимо задать правила, по которым они остаются в канале K_i или не допускаются до обслуживания каналом K_i т. е. правила блокировок канала. При этом различают блокировки K_i по выходу и по входу.

Весь набор возможных алгоритмов поведения заявок в Q-схеме можно представить в виде некоторого оператора алгоритмов поведения заявок A.

Таким образом, Q-схема, описывающая процесс функционирования системы массового обслуживания любой сложности, однозначно задается в виде $Q = \langle W, U, H, Z, R, A \rangle$.

При ряде упрощающих предположений относительно подмножеств входящих потоков W и потоков обслуживания U (выполнение условий стационарности, ординарности и ограниченного последействия) оператора сопряжения элементов

структуры *R* (однофазное одноканальное обслуживание в разомкнутой системе), подмножества собственных параметров *H* (обслуживание с бесконечной емкостью накопителя), оператора алгоритмов обслуживания заявок *A* (бесприоритетное обслуживание без прерываний и блокировок) для оценки вероятностно-временных характеристик можно использовать аналитический аппарат, разработанный в теории массового обслуживания.