

Статистическое моделирование систем

Характеристика метода статистического моделирования

В практике моделирования систем наиболее часто приходится иметь дело с объектами, которые в процессе своего функционирования содержат элементы стохастичности или подвергаются стохастическим воздействиям внешней среды. Поэтому основным методом получения результатов с помощью имитационных моделей таких стохастических систем является метод статистического моделирования на ЭВМ, использующий в качестве теоретической базы предельные теоремы теории вероятностей.

На этапе исследования и проектирования систем при построении и реализации машинных моделей (аналитических и имитационных) широко используется метод статистических испытаний (Монте-Карло), который базируется на использовании случайных чисел, т. е. возможных значений некоторой случайной величины с заданным распределением вероятностей. Статистическое моделирование представляет собой метод получения с помощью ЭВМ статистических данных о процессах, происходящих в моделируемой системе. Для получения представляющих интерес оценок характеристик моделируемой системы S с учетом воздействий внешней среды E статистические данные обрабатываются и классифицируются с использованием методов математической статистики.

Сущность метода статистического моделирования сводится к построению для процесса функционирования исследуемой системы S некоторого моделирующего алгоритма, имитирующего

поведение и взаимодействие элементов системы с учетом случайных входных воздействий и воздействий внешней среды E , и реализации этого алгоритма с использованием программно-технических средств.

Различают две области применения метода:

- 1) для изучения стохастических систем;
- 2) для решения детерминированных задач.

Основной идеей, которая используется для решения детерминированных задач методом статистического моделирования, является замена детерминированной задачи эквивалентной схемой некоторой стохастической системы, выходные характеристики последней совпадают с результатом решения детерминированной задачи. Естественно, что при такой замене вместо точного решения задачи получается приближенное решение и погрешность уменьшается с увеличением числа испытаний (реализаций моделирующего алгоритма) N .

В результате статистического моделирования системы S получается серия частных значений искомых величин или функций, статистическая обработка которых позволяет получить сведения о поведении реального объекта или процесса в произвольные моменты времени. Если количество реализаций N достаточно велико, то полученные результаты моделирования системы приобретают статистическую устойчивость и с достаточной точностью могут быть приняты в качестве оценок искомых характеристик процесса функционирования системы S .

Теоретической основой метода статистического моделирования систем на ЭВМ являются **предельные теоремы теории вероятностей**.

Множества случайных явлений (событий, величин) подчиняются определенным закономерностям, позволяющим не только прогнозировать их поведение, но и количественно оценить некоторые средние их характеристики, проявляющие определенную устойчивость. Характерные закономерности наблюдаются также в распределениях случайных величин, которые образуются при сложении множества воздействий.

Принципиальное значение предельных теорем состоит в том, что они гарантируют высокое качество статистических оценок при весьма большом числе испытаний (реализаций) N . Практически приемлемые при статистическом моделировании количественные оценки характеристик систем часто могут быть получены уже при сравнительно небольших (при использовании ЭВМ) N . Статистическое моделирование систем на ЭВМ требует формирования значений случайных величин, что реализуется с помощью датчиков (генераторов) случайных чисел.

При использовании статистического моделирования независимо от природы объекта исследования (будет ли он детерминированным или стохастическим) необходимо предварительно построить стохастическую систему, выходные характеристики которой позволяют оценить искомые.

Псевдослучайные последовательности

При статистическом моделировании систем одним из основных вопросов является учет стохастических воздействий. Количество случайных чисел, используемых для получения статистически устойчивой оценки характеристики процесса функционирования системы S при реализации моделирующего алгоритма на ЭВМ, колеблется в достаточно широких пределах в

зависимости от класса объекта моделирования, вида оцениваемых характеристик, необходимой точности и достоверности результатов моделирования. Для метода статистического моделирования на ЭВМ характерно, что большое число операций, а соответственно и большая доля машинного времени расходуется на действия со случайными числами. Кроме того, результаты статистического моделирования существенно зависят от качества исходных (базовых) последовательностей случайных чисел. Поэтому наличие простых и экономичных способов формирования последовательностей случайных чисел требуемого качества во многом определяет возможность практического использования машинного моделирования систем.

На практике используются три основных способа генерации случайных- чисел:

1. аппаратный (физический);
2. табличный (файловый);
3. алгоритмический (программный).

Аппаратный способ. При этом способе генерации случайные числа вырабатываются специальной электронной приставкой — генератором (датчиком) случайных чисел,— служащей в качестве одного из внешних устройств ЭВМ. Таким образом, реализация этого способа генерации не требует дополнительных вычислительных операций ЭВМ по выработке случайных чисел, а необходима только операция обращения к внешнему устройству (датчику). В качестве физического эффекта, лежащего в основе таких генераторов чисел, чаще всего используются шумы в электронных и полупроводниковых приборах, явления распада

радиоактивных элементов и т. д. Рассмотрим принцип получения случайных чисел от приставки, основанный, например, на эффекте шума в полупроводниковых приборах.

Структурная схема аппаратного генератора случайных чисел приведена на рис. 1.

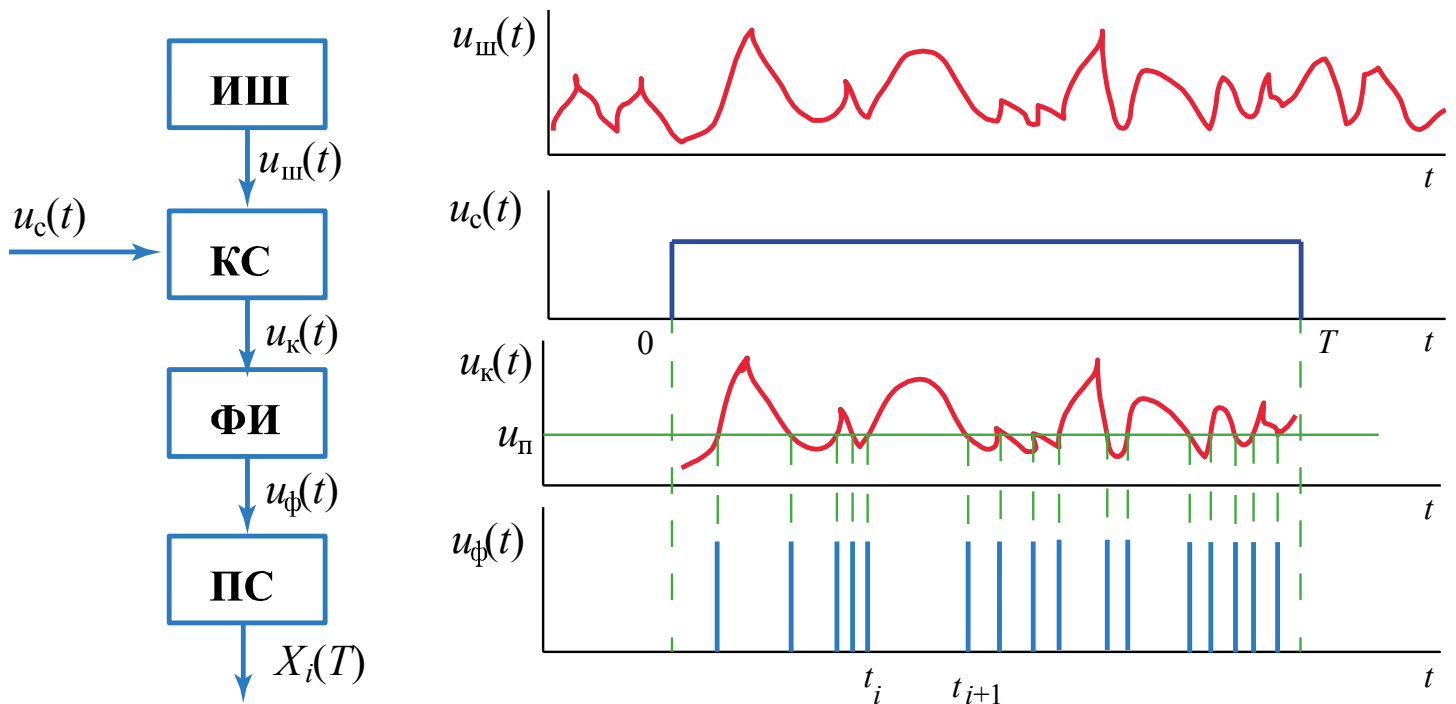


Рис. 1.

Где **ИШ** — источник шума; **КС** — ключевая схема; **ФИ** — формирователь импульсов; **ПС** — пересчетная схема. При усилении шумов на выходе **ИШ** получается напряжение $u_{ш}(t)$, которое является случайным процессом, показанным на временной диаграмме рис. 1. Причем отрезок шумовой реализации $u_{ш}(t)$, сформированный на интервале времени $(0, T)$ с помощью **КС**, содержит случайное число выбросов. Сравнение напряжения $u_k(t)$ с пороговым U_n позволяет сформировать на выходе **ФИ** серию импульсов $u_{\phi}(t)$. Тогда на выходе **ПС** может быть получена последовательность случайных чисел $X_i(t)$.

Например, если провести масштабирование и принять длину интервала $(0, T)$ за единицу, то значения интервалов времени

$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, между соседними импульсами $u_{\Phi}(t)$ будут случайными числами $x_i \in (0, 1)$. Возможны и другие схемные решения аппаратных генераторов случайных чисел.

Однако аппаратный способ получения случайных чисел не позволяет гарантировать качество последовательности непосредственно во время моделирования системы S на ЭВМ, а также повторно получать при моделировании одинаковые последовательности чисел.

Табличный способ. Если случайные числа, оформленные в виде таблицы, помещать во внешнюю или оперативную память ЭВМ, предварительно сформировав из них соответствующий файл (массив чисел), то такой способ будет называться табличным. Однако этот способ получения случайных чисел при моделировании систем на ЭВМ обычно рационально использовать при сравнительно небольшом объеме таблицы и соответственно файла чисел, когда для хранения можно применять оперативную память. Хранение файла во внешней памяти при частом обращении в процессе статистического моделирования не рационально, так как вызывает увеличение затрат машинного времени при моделировании системы S из-за необходимости обращения к внешнему накопителю. Возможны промежуточные способы организации файла, когда он переписывается в оперативную память периодически по частям. Это уменьшает время на обращение к внешней памяти, но сокращает объем оперативной памяти, который можно использовать для моделирования процесса функционирования системы S .

Алгоритмический способ. Способ получения последовательностей случайных чисел основан на формировании случайных чисел в ЭВМ с помощью специальных алгоритмов и реализующих их программ. Каждое случайное число вычисляется с помощью соответствующей программы по мере возникновения потребностей при моделировании системы на ЭВМ.

Достоинства и недостатки трех перечисленных способов получения случайных чисел для сравнения представлены в табл. 1. Из этой таблицы видно, что алгоритмический способ получения случайных чисел наиболее рационален на практике при моделировании систем на универсальных ЭВМ.

Способ	Достоинства	Недостатки
Аппаратный	<ul style="list-style-type: none"> ::Запас чисел неограничен; ::Расходуется мало операций вычислительной машины; ::Не занимает место в памяти машины. 	<ul style="list-style-type: none"> ::Требуется периодическая проверка; ::Нельзя воспроизводить последовательности; ::Используется специальное устройство; ::Необходимы меры по обеспечению стабильности
Табличный	<ul style="list-style-type: none"> ::Требуется однократная проверка; ::Можно воспроизводить последовательности. 	<ul style="list-style-type: none"> ::Запас чисел ограничен; ::Занимает много места в оперативной памяти или необходимо время на обращение к внешней памяти.
Алгоритмический	<ul style="list-style-type: none"> ::Требуется однократная проверка; ::Можно многократно воспроизводить последовательности; ::Занимает мало места в памяти машины; ::Не используются внешние устройства. 	<ul style="list-style-type: none"> ::Запас чисел последовательности ограничен ее периодом; ::Существуют затраты машинного времени.

При моделировании систем на ЭВМ программная имитация случайных воздействий любой сложности сводится к генерированию некоторых стандартных (базовых) процессов и к их последующему функциональному преобразованию. Вообще говоря, в качестве базового может быть принят любой удобный в случае моделирования конкретной системы S процесс. Однако при дискретном моделировании базовым процессом является последовательность чисел представляющих собой реализации независимых, равномерно распределенных на интервале $(0, 1)$ случайных величин.

Но получить его на цифровой ЭВМ невозможно, так как машина оперирует с n -разрядными числами. Поэтому на ЭВМ вместо непрерывной совокупности равномерных случайных чисел интервала $(0, 1)$ используют дискретную последовательность 2^n случайных чисел того же интервала. Закон распределения такой дискретной последовательности называют **квазиравномерным распределением**.

На ЭВМ невозможно получить идеальную последовательность случайных чисел хотя бы потому, что на ней можно оперировать только с конечным множеством чисел. Кроме того, для получения значений случайной величины используются формулы (алгоритмы). Поэтому такие последовательности, являющиеся по своей сути детерминированными – называются **псевдослучайными**.

Полученные с помощью генератора псевдослучайные последовательности чисел должны состоять из квазиравномерно распределенных чисел, содержать статистически независимые

числа, быть воспроизводимыми, иметь неповторяющиеся числа, получаться с минимальными затратами машинного времени, занимать минимальный объем машинной памяти.

Наибольшее применение в практике моделирования на ЭВМ для генерации последовательностей псевдослучайных чисел находят алгоритмы вида

$$x_{i+1} = \Phi(x_i), \quad (9.1)$$

представляющие собой **рекуррентные соотношения** первого порядка, для которых начальное число x_0 и постоянные параметры заданы.

Одной из исторически первых процедур получения псевдослучайных чисел была процедура, получившая название метода серединных квадратов. Недостаток этого метода — наличие корреляции между числами последовательности, а в ряде случаев случайность вообще может отсутствовать.

Широкое применение при моделировании систем на ЭВМ получили **конгруэнтные процедуры** генерации псевдослучайных последовательностей, представляющие собой арифметические операции, в основе которых лежит фундаментальное понятие конгруэнтности. Два целых числа α и β конгруэнтны (сравнимы) по модулю m , где m — целое число, тогда и только тогда, когда существует такое целое число k , что $\alpha - \beta = km$, т. е. если разность $\alpha - \beta$ делится на m и если числа α и β дают одинаковые остатки от деления на абсолютную величину числа m .

Например, $1984 \equiv 4 \pmod{10}$, $5008 \equiv 8 \pmod{10^3}$ и т. д.

Конгруэнтные процедуры имеет вид

$$X_{i+1} = \lambda X_i + \mu \pmod{M}, \quad (9.2)$$

где X_i , λ , μ , M — неотрицательные целые числа.

Конгруэнтная процедура получения последовательностей псевдослучайных квазиравномерно распределенных чисел может быть реализована мультипликативным либо смешанным методом.

Мультипликативный метод. Задаёт последовательность неотрицательных целых чисел $\{X_i\}$, не превосходящих M , по формуле

$$X_{i+1} = \lambda X_i \pmod{M}, \quad (9.3)$$

это частный случай соотношения (9.2) при $\mu = 0$.

В силу детерминированности метода получаются воспроизводимые последовательности. Требуемый объем машинной памяти при этом минимален, а с вычислительной точки зрения необходим последовательный подсчет произведения двух целых чисел, т. е. выполнение операции, которая быстро реализуется современными ЭВМ.

Для машинной реализации наиболее удобна версия $M = p^g$, где p — число цифр в системе счисления, принятой в ЭВМ ($p = 2$ для двоичной и $p = 10$ для десятичной машины); g — число битов в машинном слове. Тогда вычисление остатка от деления на M сводится к выделению g младших разрядов делимого, а преобразование целого числа X_i в рациональную дробь из интервала $x_i \in (0, 1)$ осуществляется подстановкой слева от X_i двоичной или десятичной запятой.

Алгоритм построения последовательности для двоичной машины $M = 2^g$ сводится к выполнению таких операций :

1. Выбрать в качестве X_0 произвольное нечетное число.

2. Вычислить коэффициент $\lambda = 8t \pm 3$, где t — любое целое положительное число.
3. Найти произведение λX_0 , содержащее не более $2g$ значащих разрядов.
4. Взять g младших разрядов в качестве первого члена последовательности X_1 а остальные отбросить.
5. Определить дробь $x_1 = X_1/2^g$ из интервала $(0, 1)$.
6. Присвоить $X_0 = X_1$.
7. Вернуться к п. 3.

Смешанный метод. Позволяет вычислить последовательность неотрицательных целых чисел $\{X_i\}$, не превосходящих M , по формуле

$$X_{i+1} = \lambda X_i + \mu \pmod{M}, \quad (9.4)$$

т. е. в отличие от мультипликативного метода $\mu \neq 0$. С вычислительной точки зрения смешанный метод генерации сложнее мультипликативного на одну операцию сложения, но при этом возможность выбора дополнительного параметра позволяет уменьшить возможную корреляцию получаемых чисел.

Качество конкретной версии такого генератора можно оценить только с помощью соответствующего машинного эксперимента.

В настоящее время почти все пакеты прикладных программ универсальных ЭВМ для вычисления последовательностей равномерно распределенных случайных чисел основаны на конгруэнтной процедуре.