# Сетевые модели (N-схемы)

**В практике моделирования объектов часто приходится решать задачи, связанные с формализованным описанием и анализом причинно-следственных связей в сложных системах, где одновременно параллельно протекает несколько процессов. Самым распространенным в настоящее время формализмом, описывающим структуру и взаимодействие параллельных систем и процессов, являются сети Петри (англ. Petri Nets), предложенные К. Петри.**

**Теория сетей Петри развивается в нескольких направлениях:**

1. **разработка математических основ,**
2. **структурная теория сетей,**
3. **различные приложения (параллельное программирование, дискретные динамические системы и т. д.).**

**Формально сеть Петри (N-схема) задается четверкой вида**

$$N = \langle B, D, I, O \rangle,$$

**где B — конечное множество символов, называемых позициями $B \neq \varnothing$, D — конечное множество символов, называемых переходами, $D \neq \varnothing$, $B \cap D \neq \varnothing$; I — входная функция (прямая функция инцидентности) $I : B \times D \to \{0,1\}$; O — выходная функция (обратная функция инцидентности), $O : D \times B \to \{0,1\}$.**

**Таким образом, входная функция *I* отображает переход $d_j$ в множество входных позиций $b_i \in I(d_j)$, а выходная функция *O* отображает переход $d_j$ в множество выходных позиций $b_i \in D(d_j)$. Для каждого перехода $d_j \in D$ можно определить**

**множество входных позиций перехода *I(d$_j$)* и выходных позиций перехода *O(d$_j$)* как**

$$I\left(d_j\right)=\left\{b_i\in B\big/I\left(b_i,d_j\right)=1\right\},\qquad i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m};\ n=\left|B\right|;\ m=\left|D\right|;$$
$$O\left(d_j\right)=\left\{b_i\in B\big/O\left(d_j,b_i\right)=1\right\},$$

**Аналогично, для каждого перехода $b_i \in B$ вводятся определения множества входных переходов позиции *I(b$_i$)* и множества выходных переходов позиции *O(b$_i$)*:**

$$I\left(b_i\right)=\left\{d_j\in D\big/I\left(d_j,b_i\right)=1\right\},$$
$$O\left(b_i\right)=\left\{d_j\in D\big/O\left(b_i,d_j\right)=1\right\},$$

**Графически *N*-схема изображается в виде двудольного ориентированного мультиграфа, представляющего собой совокупность позиций и переходов (рис. 1).**

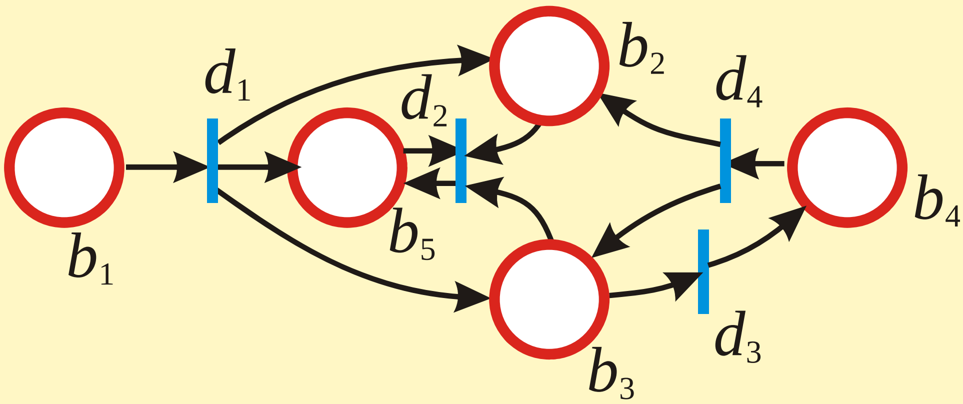


**Рис. 1. Графическое изображение N-схемы**

**Как видно из этого рисунка, граф N-схемы имеет два типа узлов: позиции и переходы, изображаемые 0 и 1 соответственно. Ориентировочные дуги соединяют позиции и переходы, причем каждая дуга направлена от элемента одного множества (позиции или перехода) к элементу другого множества (переходу или позиции). Граф N-схемы является мультиграфом, так как он**

допускает существование кратных дуг от одной вершины к другой.

Приведенное представление N-схемы может использоваться только для отражения статики моделируемой системы (взаимосвязи событий и условий), но не позволяет отразить в модели динамику функционирования моделируемой системы. Для представления динамических свойств объекта вводится функция маркировки (разметки) $M : B \rightarrow \{0,1,2,3,...\}$.

Маркировка *M* есть присвоение неких абстрактных объектов, называемых метками (фишками), позициям N-схемы, причем количество меток, соответствующее каждой позиции, может меняться. При графическом задании N-схемы разметка отображается помещением внутри вершин-позиций соответствующего числа точек (когда количество точек велико, ставят цифры).

Маркированная (размеченная) N-схема может быть описана в виде пятерки $N_M = \langle B, D, I, O, M \rangle$ и является совокупностью сети Петри и маркировки *M*.

Функционирование N-схемы отражается путем перехода от разметки к разметке. Начальная разметка обозначается как $M_0 : B \rightarrow \{0,1,2,3,...\}$. Смена разметок происходит в результате срабатывания одного из переходов $d_j \in D$ сети. Необходимым условием срабатывания перехода $d_j$ является $b_i \in I(d_j)$ $\{M(B_i) \geq 1\}$, где $M\{b_i\}$, - разметка позиции $b_i$. Переход $d_j$ для которого выполняется указанное условие, определяется как находящийся в состоянии готовности к срабатыванию или как возбужденный переход.

**Срабатывание перехода изменяет разметку сети $M(b) = (M(b_1), M(b_2), \ldots, M(b_n))$[2] на разметку $M'(b)$ по следующему правилу:**

$$M'(b) = M(b) - I(d_j) + O(d_j)$$

т. е. переход $d_j$ изымает по одной метке из каждой своей входной позиции и добавляет по одной метке в каждую из выходных позиций.

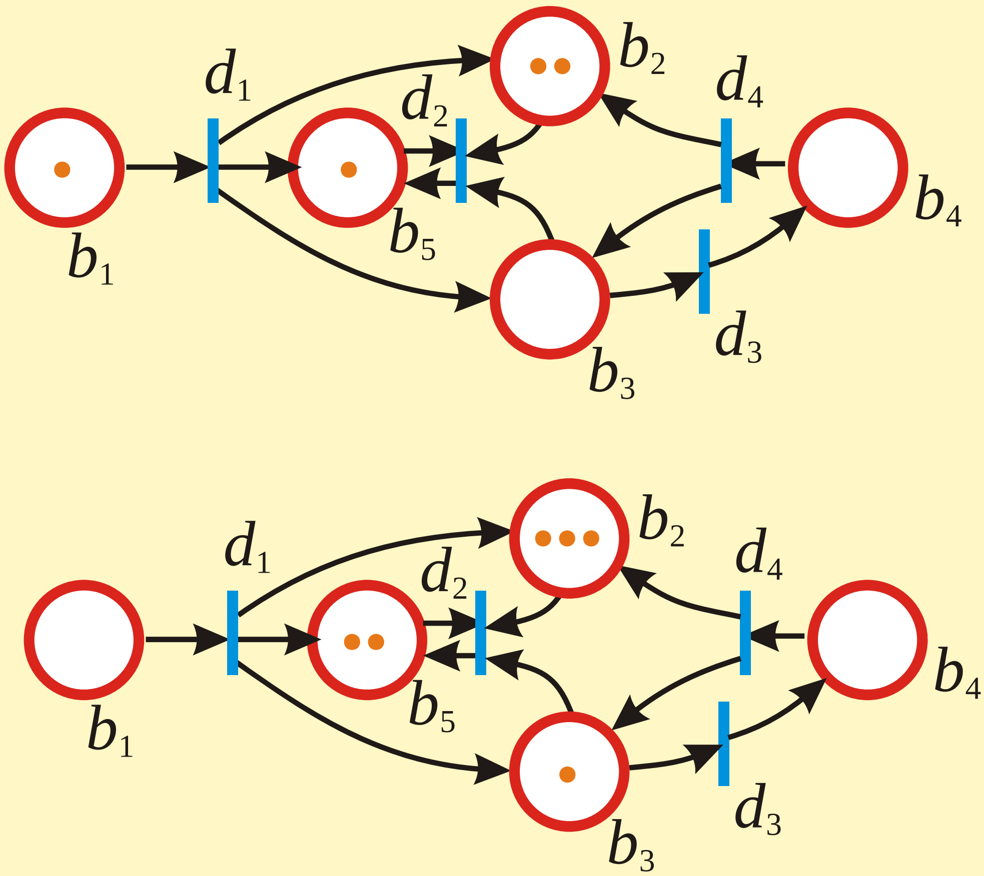


Рис. 2. Пример функционирования размеченной N-схемы

Важной особенностью моделей процесса функционирования систем с использованием типовых N-схем является простота построения иерархических конструкций модели. С одной стороны, каждая N-схема может рассматриваться как макропереход или макропозиция модели более высокого уровня. С другой стороны, переход, или позиция N-схемы, может

**детализироваться в форме отдельной подсети для более углубленного исследования процессов в моделируемой системе *S*.**

**Типовые N-схемы на основе обычных размеченных сетей Петри пригодны для описания в моделируемой системе *S* событий произвольной длительности. В этом случае модель, построенная с использованием таких N-схем, отражает только порядок наступления событий в исследуемой системе *S*. Для отражения временных параметров процесса функционирования моделируемой системы *S* на базе N-схем используется расширение аппарата сетей Петри: временные сети, *E*-сети.**

## Комбинированные модели (A-схемы)

**Этот подход позволяет описывать поведение непрерывных и дискретных, детерминированных и стохастических систем, т. е. по сравнению с рассмотренными является обобщенным (универсальным) и базируется на понятии агрегативной системы (от англ. aggregate system), представляющей собой формальную схему общего вида, которую будем называть A-схемой .**

**Анализ существующих средств моделирования систем и задач, решаемых с помощью метода моделирования на ЭВМ, неизбежно приводит к выводу, что комплексное решение проблем, возникающих в процессе создания и машинной реализации модели, возможно лишь в случае, если моделирующие системы имеют в своей основе единую формальную математическую схему, т. е. A-схему.**

**Такая схема должна одновременно выполнять несколько функций:**

1. являться адекватным математическим описанием системы S;
2. служить основой для построения алгоритмов и программ при машинной реализации модели M;
3. позволять в упрощенном варианте (для частных случаев) проводить аналитические исследования.

При агрегативном подходе сначала дается формальное определение объекта моделирования — агрегативной системы, которая является математической схемой, отображающей системный характер изучаемых объектов.

При агрегативном описании сложный объект (система) разбивается на конечное число частей (подсистем), сохраняя при этом связи, обеспечивающие их взаимодействие. Если некоторые из полученных подсистем оказываются в свою очередь еще достаточно сложными, то процесс их разбиения продолжается до тех пор, пока не образуются подсистемы, которые в условиях рассматриваемой задачи моделирования могут считаться удобными для математического описания. В результате такой декомпозиции сложная система представляется в виде многоуровневой конструкции из взаимосвязанных элементов, объединенных в подсистемы различных уровней.

В качестве элемента A-схемы выступает агрегат, а связь между агрегатами осуществляется с помощью оператора сопряжения R. Агрегат сам может рассматриваться как A-схема, т. е. может разбиваться на элементы (агрегаты) следующего уровня.

Любой агрегат характеризуется следующими множествами: моментов времени $T$, входных $X$ и выходных $Y$ сигналов, состояний $Z$ в каждый момент времени $t$. Состояние агрегата в момент времени $t \in T$ обозначается как $z(t) \in Z$, а входные и выходные сигналы — как $x(t) \in X$ и $y(t) \in Y$ соответственно.

Будем полагать, что переход агрегата из состояния $z(t_1)$ в состояние $z(t_2) \neq z(t_1)$ происходит за малый интервал времени, т. е. имеет место скачок $\delta_z$. Переходы агрегата из состояния $z(t_1)$ в $z(t_2)$ определяются собственными (внутренними) параметрами самого агрегата $h(t) \in H$ и входными сигналами $x(t) \in X$.

Для описания скачков состояний $\delta_z$ в особые моменты времени $t_\delta$ будем использовать случайный оператор $W$, представляющий собой частный случай оператора $U$, т. е.

$$z(t_\delta + 0)=W[t_\delta, z(t_\delta)].$$

В множестве состояний $Z$ выделяется такое подмножество $Z^{(Y)}$, что если $z(t_\delta)$ достигает $Z^{(Y)}$, то это состояние является моментом выдачи выходного сигнала, определяемого оператором выходов

$$y=G[t_\delta, z(t_\delta)].$$

Таким образом, под агрегатом будем понимать любой объект, определяемый упорядоченной совокупностью рассмотренных множеств $T, X, Y, Z, Z^{(Y)}, H$ и случайных операторов $V, U, W, G$.

Последовательность входных сигналов, расположенных в порядке их поступления в А-схему, будем называть входным сообщением или $x$ - сообщением. Последовательность выходных сигналов, упорядоченную относительно времени выдачи, назовем выходным сообщением или $y$ - сообщением.

Существует класс больших систем, которые ввиду их сложности не могут быть формализованы в виде математических схем одиночных агрегатов, поэтому их формализуют некоторой конструкцией из отдельных агрегатов $A_n$, $n = \overline{1, N_A}$, которую назовем агрегативной системой или А-схемой. Для описания некоторой реальной системы *S* в виде А-схемы необходимо иметь описание как отдельных агрегатов $A_n$, так и связей между ними.

Для построения агрегата вводятся предположения о закономерностях функционирования А-схем, в соответствии реальной системой:

1) взаимодействие между А-схемой и внешней средой *E*, а также между отдельными агрегатами внутри системы *S* осуществляется при передаче сигналов, причем взаимные влияния, имеющие место вне механизма обмена сигналами, не учитываются;

2) для описания сигнала достаточно некоторого конечного набора характеристик;

3) элементарные сигналы мгновенно передаются в А-схеме независимо друг от друга по элементарным каналам;

4) к входному контакту любого элемента А-схемы подключается не более чем один элементарный канал, к выходному контакту - любое конечное число элементарных каналов при условии, что ко входу одного и того же элемента А-схемы направляется не более чем один из упомянутых элементарных каналов.

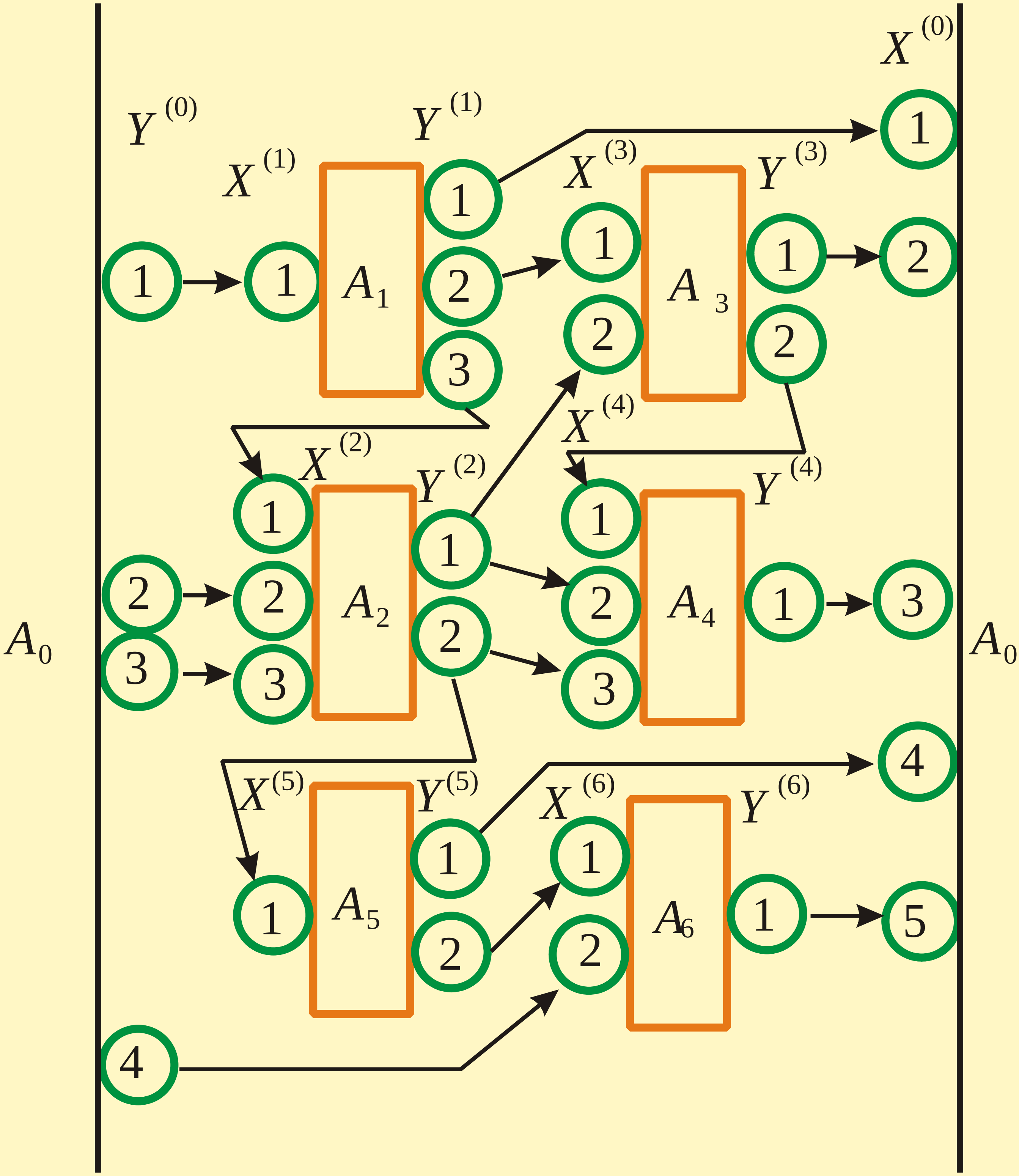


**Рис. 3. Структура агрегативной системы**

**Взаимодействие A-схемы с внешней средой *E* рассматривается как обмен сигналами между внешней средой *E* и элементами A-схемы. В соответствии с этим внешнюю среду *E* можно представить в виде фиктивного элемента системы $A_0$, вход которого содержит $I_0$ входных контактов, а выход — $J_0$ выходных контактов. Сигнал, выдаваемый A-схемой во внешнюю**

среду Е, принимается элементом $A_o$ как входной сигнал, состоящий из элементарных сигналов $x_1^{(0)}(t)$, $x_2^{(0)}(t)$, ..., $x_{I0}^{(0)}(t)$ Сигнал, поступающий в А-схему из внешней среды *E*, является выходным сигналом элемента $A_o$ и состоит из элементарных сигналов $y_1^{(0)}(t)$, $y_2^{(0)}(t)$, ..., $y_{l0}^{(0)}(t)$.

Таким образом, каждый $A_n$ (в том числе и $A_o$) как элемент А-схемы в рамках принятых предположений о механизме обмена сигналами достаточно охарактеризовать множеством входных контактов $X_1^{(n)}$, $X_2^{(n)}$ ,..., $X_{In}^{(n)}$ которое обозначим $\{X_i^{(n)}\}$, и множеством выходных контактов $Y_1^{(n)}$, $Y_2^{(n)}$ ,..., $Y_J^{(n)}$ которое обозначим $\{X_j^{(n)}\}$, где $n = \overline{0, N_A}$. Полученная пара множеств $\{X_i^{(n)}\}$, $\{X_j^{(n)}\}$ является математической моделью элемента $A_n$ используемого для формального описания сопряжения его с прочими элементами А-схемы и внешней средой *E*.

Если в А-схеме к контакту $X_i^{(n)}$ не подключен никакой элементарный канал, то оператор *R* не определен на этом контакте $X_i^{(n)}$. Оператор *R* называется оператором сопряжения элементов (агрегатов) в А-схему. Совокупность множеств $\{X_i^{(n)}\}$, $\{X_l^{(k)}\}$ и оператор *R* образуют схему сопряжения элементов в систему *S*. Оператор сопряжения R можно задать в виде таблицы, в которой на пересечении строк с номерами элементов (агрегатов) *n* и столбцов с номерами контактов *i* располагаются пары чисел *k*, *l*, указывающие номер элемента *k* и номер контакта *l*, с которым соединен контакт $X_i^{(n)}$.

Таким образом, использование обобщенной типовой математической схемы моделирования, т. е. А-схемы, в принципе не отличается от рассмотренных ранее D-, F-, P-, N-, Q-схем. Для

**частного случая, а именно для кусочно-линейных агрегатов, результаты могут быть получены аналитическим методом. В более сложных случаях, когда применение аналитических методов неэффективно или невозможно, прибегают к имитационному методу, причем представление объекта моделирования в виде А-схемы может являться тем фундаментом, на котором базируется построение имитационной системы и ее внешнего и внутреннего математического обеспечения. Стандартная форма представления исследуемого объекта в виде А-схемы приводит к унификации не только алгоритмов имитации, но и к возможности применять стандартные методы обработки и анализа результатов моделирования системы *S*.**

**Рассмотренные примеры использования типовых математических схем (F-, D, Q-, N-, А-схем) позволяют формализовать достаточно широкий класс больших систем, с которыми приходится иметь дело в практике исследования и проектирования сложных систем.**