Непрерывно-детерминированные модели (D-схемы)

Особенностью непрерывно-детерминированного подхода является применение в качестве математических моделей дифференциальные уравнений. **Дифференциальными уравнениями** называются такие уравнения, в которых неизвестными являются функции одной или нескольких переменных, причем в уравнение входят не только функции, но и их производные различных порядков. Если неизвестные — функции многих переменных, то уравнения называются **уравнениями в частных производных**, в противном случае при рассмотрении функции только одной независимой переменной уравнения называются **обыкновенными дифференциальными уравнениями**.

Обычно в таких математических моделях в качестве независимой переменной, от которой зависят неизвестные искомые функции, служит время t.

Тогда математическое соотношение для детерминированных систем (4.6) в общем виде будет

$$\vec{y}' = \vec{f}\left(\vec{y},\, t\right);\ \vec{y}\left(t_0\right) = \vec{y}_{0,} \tag{5.1}$$

где $\vec{y}' = {d\,\vec{y}}/{dt}$, $\vec{y} = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$ и $\vec{f} = \left(f_1,\, f_2, ...,\, f_n\right)$ — *n*-мерные векторы; $f\left(\vec{y}, \vec{t}\right)$ —вектор-функция, которая определена на некотором *(n + 1)*-мерном $\left(\vec{y}, t\right)$ множестве и является непрерывной.

Так как математические схемы такого вида отражают динамику изучаемой системы, т. е. ее поведение во времени, то они называются *D-схемами* (англ. dynamic). В простейшем случае обыкновенное дифференциальное уравнение имеет вид

$$y' = f(y, t). \tag{5.2}$$

Наиболее важно для системотехники приложение D-схем в качестве математического аппарата в теории автоматического управления. Для иллюстрации особенностей построения и применения D-схем рассмотрим простейший пример формализации процесса функционирования двух элементарных систем различной физической природы:

- механической S_M (колебания маятника, рис. 1);

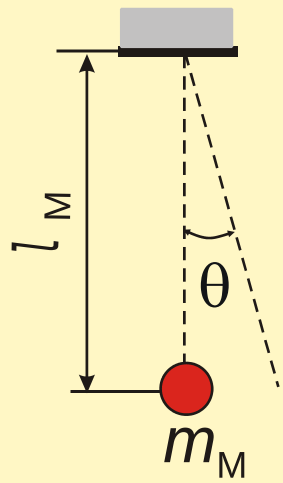

Рис 1.

- электрической S_K (колебательный контур, рис. 2).

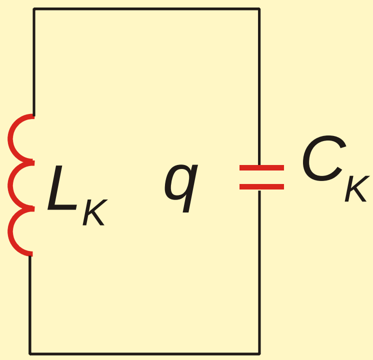

Рис 2.

Процесс малых колебаний маятника описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$m_M l_M^2 \left[d^2\theta(t)/dt^2 \right] + m_M g l_M \theta(t) = 0,$$

где m_M, l_M — масса и длина подвеса маятника; g — ускорение свободного падения; в $\theta(t)$ — угол отклонения маятника в момент времени t. Из этого уравнения свободного колебания маятника можно найти оценки интересующих характеристик.

Аналогично, процессы в электрическом колебательном контуре описываются обыкновенным дифференциальным уравнением

$$L_X \left[d^2q(t)/dt^2 \right] + \left[q(t)/C_X \right] = 0,$$

где L_X, C_X — индуктивность и емкость конденсатора; $q(t)$ — заряд конденсатора в момент времени t.

Из этого уравнения можно получить различные оценки характеристик процесса в колебательном контуре.

Очевидно, что, введя обозначения $h_0 = m_M l_M^2 = L_X$, $h_1 = 0$, $h_2 = m_M g l_M = 1/C_X$, $\theta(t) = q(t) = z(t)$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее поведение замкнутой системы:

$$h_0 \left[d^2 z(t) dt^2 \right] + h_1 \left[dz(t)/dt \right] + z_2 z(t) = 0 \qquad (5.3)$$

где h_0, h_l, h_2 — параметры системы; $z(t)$ — состояние системы в момент времени t.

Таким образом, поведение этих двух объектов может быть исследовано на основе общей математической модели (5.3). Кроме того, необходимо отметить, что поведение одной из систем может быть проанализировано с помощью другой. Например, поведение маятника (системы S_M) может быть изучено с помощью электрического колебательного контура (системы S_X).

Если изучаемая система S, т. е. маятник или контур, взаимодействует с внешней средой E, то появляется входное воздействие *x(t)* (внешняя сила для маятника и источник энергии для контура) и ***непрерывно-детерминированная модель*** такой системы будет иметь вид

$$h_0\left[d^2z(t)/dt^2\right]+h_1\left[dz(t)dt\right]+h_2z(t)=x(t) \qquad (5.4)$$

С точки зрения общей схемы математической модели *x(t)* является входным (управляющим) воздействием, а состояние системы S в данном случае можно рассматривать как выходную характеристику, т. е. полагать, что выходная переменная совпадает с состоянием системы в данный момент времени *y = z.*

При решении задач системотехники важное значение имеют проблемы управления большими системами. Следует обратить внимание на системы автоматического управления — частный случай динамических систем, описываемых D-схемами и выделенных в отдельный класс моделей в силу их практической специфики.

Описывая процессы автоматического управления, придерживаются обычно представления реального объекта в виде двух систем: управляющей и управляемой (объекта управления). Структура многомерной системы автоматического управления общего вида представлена на (рис. 3), где обозначены эндогенные переменные: $\vec{x}(t)$ — вектор входных (задающих) воздействий; $\vec{v}(t)$ — вектор возмущающих воздействий; $\vec{h}'(t)$ —

вектор сигналов ошибки; $\vec{h}''(t)$ — вектор управляющих воздействий; независимые переменные: $\vec{z}(t)$ — вектор состояний системы S; $\vec{y}(t)$ — вектор выходных s переменных, обычно $\vec{y}(t)=\vec{z}(t)$.

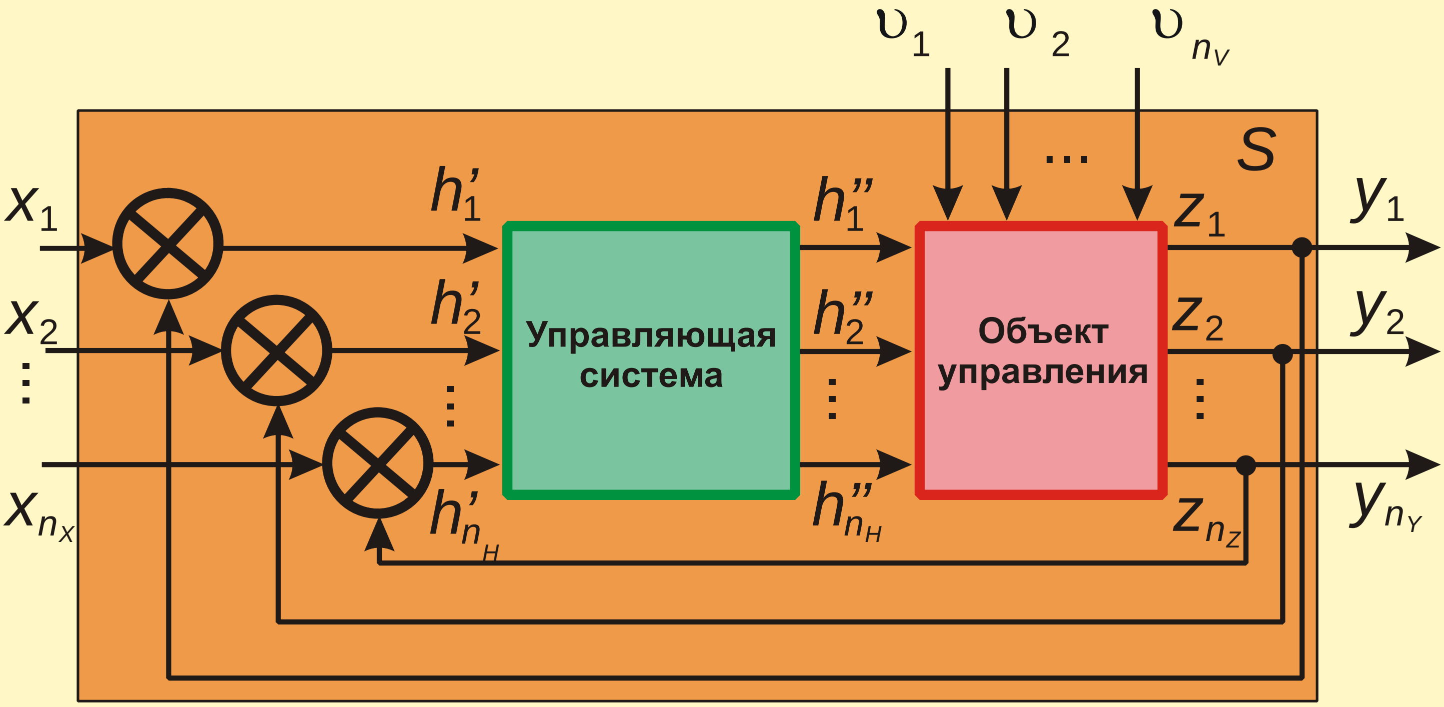

Рис 3. Структура системы автоматического управления

Современная управляющая система — это совокупность программно-технических средств, обеспечивающих достижение объектом управления определенной цели. Насколько точно объект управления достигает заданной цели, можно судить для одномерной системы по координате состояния *y(t)*. Разность между заданным $y_{зад}(t)$ и действительным *y(t)* законами изменения управляемой величины есть ошибка управления $h'(t)= y_{зад}(t) - y(t)$.

Системы, для которых ошибки управления $h'(t) = 0$ во все моменты времени, называются *идеальными*. На практике реализация идеальных систем невозможна. Таким образом, ошибка *h'(t)* — необходимый субстрат автоматического

управления, основанного на принципе отрицательной обратной связи, так как для приведения в соответствие выходной переменной *y(t)* ее заданному значению используется информация об отклонении между ними. Задачей системы автоматического управления является изменение переменной *y(t)* согласно заданному закону с определенной точностью (с допустимой ошибкой). При проектировании и эксплуатации систем автоматического управления необходимо выбрать такие параметры системы *S*, которые обеспечили бы требуемую точность управления, а также устойчивость системы в переходном процессе.

Если система устойчива, то представляют практический интерес поведение системы во времени, максимальное отклонение регулируемой переменной *y(t)* в переходном процессе, время переходного процесса и т. п. Выводы о свойствах систем автоматического управления различных классов можно сделать по виду дифференциальных уравнений, приближенно описывающих процессы в системах. Порядок дифференциального уравнения и значения его коэффициентов полностью определяются статическими и динамическими параметрами системы *S*.

Таким образом, использование D-схем позволяет формализовать процесс функционирования непрерывно-детерминированных систем *S* и оценить их основные характеристики, применяя аналитический или имитационный подход, реализованный в виде соответствующего языка для моделирования непрерывных систем или использующий аналоговые и гибридные средства вычислительной техники.

Дискретно-детерминированные модели (F-схемы)

Дискретно-детерминированный подход характерен тем, что в качестве математического аппарата на этапе формализации процесса функционирования систем используется математического аппарата математический аппарат теории автоматов. Теория автоматов — это раздел теоретической кибернетики, в котором изучаются математические модели — автоматы. На основе этой теории система представляется в виде автомата, перерабатывающего дискретную информацию и меняющего свои внутренние состояния лишь в допустимые моменты времени.

Автомат можно представить как некоторое устройство (черный ящик), на которое подаются входные сигналы и снимаются выходные и которое может иметь некоторые внутренние состояния. Конечным автоматом называется автомат, у которого множество внутренних состояний и входных сигналов (а следовательно, и множество выходных сигналов) являются конечными множествами.

Абстрактно конечный автомат (англ. finite automata) можно представить как математическую схему (F-схему), характеризующуюся шестью элементами: конечным множеством X входных сигналов (входным алфавитом); конечным множеством Y выходных сигналов (выходным алфавитом); конечным множеством Z внутренних состояний (внутренним алфавитом или алфавитом состояний); начальным состоянием z_0, $z_0 \in Z$; функцией переходов $\varphi(z, x)$\ функцией выходов $\psi(z, x)$.

Автомат, задаваемый F-схемой: $F = \langle Z, X, Y, \varphi, \psi, z_0 \rangle$ **,— функционирует в дискретные моменты времени, которые называются такты, равные друг другу, каждому из которых соответствуют постоянные значения входного и выходного сигналов и внутренние состояния.**

Абстрактный конечный автомат имеет один входной и один выходной каналы. В каждый момент *t = 0, 1, 2, ...* дискретного времени F-автомат находится в определенном состоянии *z(t)* из множества *Z* состояний автомата, причем в начальный момент времени *t = 0* он всегда находится в начальном состоянии *z(0)=*z_0. В момент *t*, будучи в состоянии *z(t)*, автомат способен воспринять на входном канале сигнал *x(t)*$\in$*X* и выдать на выходном канале сигнал *y(t)* = ψ *[z(t), x(t)]*, переходя в состояние *z(t +1)* = φ *[z(t), x(t)]*, *z(t)*$\in$*Z*, *y(t)*$\in$*Y*. Абстрактный конечный автомат реализует некоторое отображение множества слов входного алфавита *X* на множество слов выходного алфавита *Y*. Другими словами, если на вход конечного автомата, установленного в начальное состояние z_0, подавать в некоторой последовательности буквы входного алфавита *x(0), x(1), x(2), ...*, т. е. входное слово, то на выходе автомата будут последовательно появляться буквы выходного алфавита *y(0), y(1), y(2), ...*, образуя выходное слово.

Таким образом, работа конечного автомата происходит по следующей схеме: в каждом *i* такте на вход автомата, находящегося в состоянии *z(t)*, подается некоторый сигнал *x(t)*, на который он реагирует переходом в *(i + 1)*-такте в новое состояние *z(t + l)* и выдачей некоторого выходного сигнала.

По числу состояний различают конечные автоматы *с памятью* и *без памяти*.

Автоматы с памятью имеют более одного состояния, а автоматы без памяти (комбинационные или логические схемы) обладают лишь одним состоянием. При этом, работа комбинационной схемы заключается в том, что она ставит в соответствие каждому входному сигналу *x(t)* определенный выходной сигнал *y(t)*, т. е. реализует логическую функцию вида

$$y(t) = \psi\left[x(t)\right], \; t = 1,2,\ldots$$

Эта функция называется булевой, если алфавиты *X* и *Y*, которым принадлежат значения сигналов *x* и *y*, состоят из двух букв.

По характеру отсчета дискретного времени конечные автоматы делятся на синхронные и асинхронные.

***В синхронных* F-автоматах моменты времени, в которые автомат «считывает» входные сигналы, определяются принудительно синхронизирующими сигналами. После очередного синхронизирующего сигнала с учетом «считанного» происходит переход в новое состояние и выдача сигнала на выходе, после чего автомат может воспринимать следующее значение входного сигнала. Таким образом, реакция автомата на каждое значение входного сигнала заканчивается за один такт, длительность которого определяется интервалом между соседними синхронизирующими сигналами.**

***Асинхронный* F-автомат считывает входной сигнал непрерывно, и поэтому, реагируя на достаточно длинный входной сигнал постоянной величины *x*, он может несколько раз**

изменять состояние, выдавая соответствующее число выходных сигналов, пока не перейдет в устойчивое, которое уже не может быть изменено данным входным сигналом.

Чтобы задать конечный F-автомат, необходимо описать все элементы множества $F = \langle Z, X, Y, \varphi, \psi, z_0 \rangle$, **т. е. входной, внутренний и выходной алфавиты, а также функции переходов и выходов, причем среди множества состояний необходимо выделить состояние z_0, в котором автомат находился в момент времени $t=0$.**

Существует несколько способов задания работы F-автоматов, но наиболее часто используются табличный, графический и матричный.

Простейший табличный способ задания конечного автомата **основан на использовании таблиц переходов и выходов, строки которых соответствуют входным сигналам автомата, а столбцы — его состояниям. При этом обычно первый слева столбец соответствует начальному состоянию z_0. На пересечении i-й строки и k-го столбца таблицы переходов помещается соответствующее значение $\varphi(z_k, x_i)$ функции переходов, а в таблице выходов — соответствующее значение $\psi(z_k, x_i)$ функции выходов.**

Для некоторых F-автоматов называемых *автоматами Мура*, характеризующихся тем, что функция выходов не зависит от входной переменной $x(t)$, обе таблицы можно совместить, получив так называемую отмеченную таблицу переходов, в которой над каждым состоянием z_k автомата, обозначающим

столбец таблицы, стоит соответствующий этому состоянию, согласно, выходной сигнал $\psi(z_i)$.

При другом способе задания конечного автомата используется понятие направленного графа. Граф автомата представляет собой набор вершин, соответствующих различным состояниям автомата и соединяющих вершины дуг графа, соответствующих тем или иным переходам автомата.

Если входной сигнал x_k вызывает переход из состояния z_i, в состояние z_j,-, то на графе автомата дуга, соединяющая вершину z_i с вершиной z_j, обозначается x_k. Для того чтобы задать функцию выходов, дуги графа необходимо отметить соответствующими выходными сигналами.

Для конечного автомата (*автомата Мили*) эта разметка производится так: если входной сигнал x_k действует на состояние z_i, то, согласно сказанному, получается дуга, исходящая из z_i и помеченная x_k; эту дугу дополнительно отмечают выходным сигналом $y=\psi\left(z_i, x_k\right)$ рис. 4.

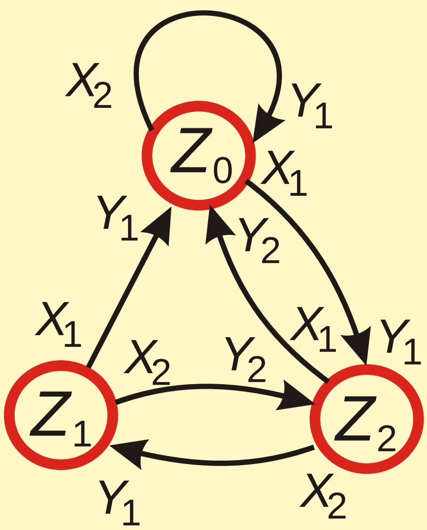

Рис. 4.

Для автомата Мура аналогичная разметка графа такова: если входной сигнал x_k, действуя на некоторое состояние автомата, вызывает переход в состояние z_j то дугу, направленную в z_j и помеченную x_k, дополнительно отмечают выходным сигналом $y = \psi\left(z_i, x_k\right)$ **рис. 5.**

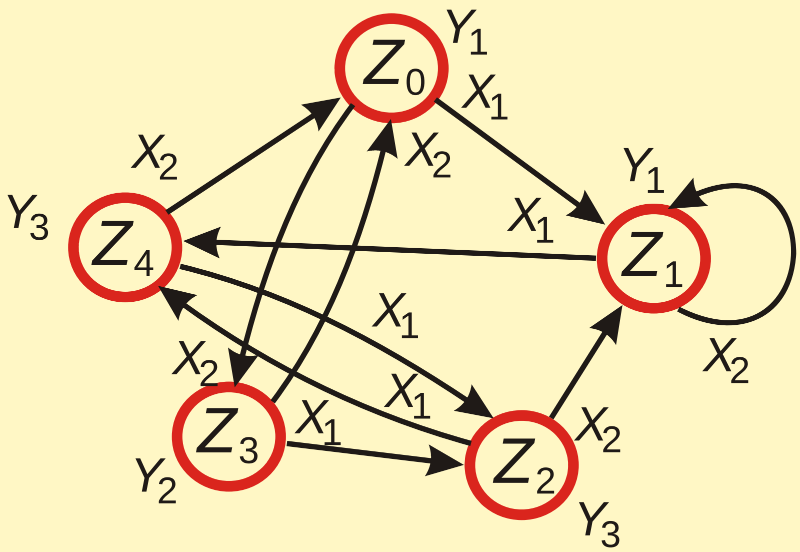

Рис. 5.

При решении задач моделирования систем часто более удобной формой является матричное задание конечного автомата. При этом матрица соединений автомата есть квадратная матрица C=||c$_{ij}$||, строки которой соответствуют исходным состояниям, а столбцы — состояниям перехода. Элемент $c_{ij}=x_k/y_s$, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, в случае автомата Мили соответствует входному сигналу x_k, вызывающему переход из состояния z_i в состояние z_j, и выходному сигналу y_s, выдаваемому при этом переходе. Для автомата Мили, матрица соединений имеет вид

$$C_1 = \begin{Vmatrix} x_2 y_1 & - & x_1 y_1 \\ x_1 y_1 & - & x_2 / y_2 \\ x_1 / y_2 & x_2 / y_1 & - \end{Vmatrix}.$$

Для **F**-автомата Мура элемент c_{ij} равен множеству входных сигналов на переходе (z_i, z_j), а выход описывается вектором выходов i-я компонента которого — выходной сигнал, отмечающий состояние z_i.

$$\vec{y} = \begin{Vmatrix} \psi(z_0) \\ \psi(z_1) \\ \dots \\ \psi(z_k) \\ \dots \\ \psi(z_K) \end{Vmatrix}.$$

Необходимо отметить, что вообще на практике автоматы всегда являются асинхронными, а устойчивость их состояний обеспечивается тем или иным способом, например введением сигналов синхронизации. Однако на уровне абстрактной теории, когда конечный автомат выступает в виде математической схемы для формализации конкретных объектов без учета ряда второстепенных особенностей, часто удобно оказывается оперировать с синхронными конечными автоматами.

Таким образом, понятие **F**-автомата в дискретно-детерминированном подходе к исследованию на моделях свойств объектов является математической абстракцией, удобной для описания широкого класса процессов функционирования реальных объектов в автоматизированных системах обработки информации и управления. В качестве таких объектов в первую очередь следует назвать элементы и узлы ЭВМ, устройства контроля, регулирования и управления, системы временной и пространственной коммутации в технике обмена

информацией и т. д. Для всех перечисленных объектов характерно наличие дискретных состояний и дискретный характер работы во времени, т. е. их описание с помощью F-схем является эффективным.