Глава 1. Неопределённый интеграл

Лектор – Шерстнёва
Анна Игоревна

§1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Основная задача дифференциального исчисления:

для функции $f(x)$ найти $f'(x)$.

Обратная задача: известна $f'(x)$, требуется найти $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* $f(x)$ *и* $F(x)$ *определены на* $X \subseteq \mathbb{R}$.
Функция $F(x)$ *называется* ***первообразной*** *для функции* $f(x)$ *на промежутке* $X \subseteq \mathbb{R}$, *если* $F(x)$ *дифференцируема на* X *и* $\forall x \in X$ *выполняется равенство*

$$F'(x) = f(x) .$$

ПРИМЕРЫ.

1) $F(x) = \sin x$ – первообразная для $f(x) = \cos x$ на $\mathbb{R}$, т.к.

$$(\sin x)' = \cos x , \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

2) $F(x) = \ln|x|$ – первообразная для $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на любом промежутке, не содержащем точки $x = 0$, т.к.

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

ВОПРОСЫ:

1) для любой ли функции существует первообразная;
2) если функция имеет первообразную, то будет ли она единственной?

ТЕОРЕМА 1 (о связи первообразных).

Пусть $F(x)$ *– первообразная для функции* $f(x)$ *на* X.

Функция $\Phi(x)$ *будет первообразной для* $f(x)$ *на* $X \Leftrightarrow$ *функции* $\Phi(x)$ *и* $F(x)$ *на* X *связаны равенством*

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

где C *– некоторое число*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Множество всех первообразных функции* $f(x)$ *называют* ***неопределенным интегралом*** *от функции* $f(x)$ *и обозначают символом*

$$\int f(x)dx$$

Называют:

$f(x)$ – подинтегральная функция,

$f(x)dx$ – подинтегральное выражение,

x – переменная интегрирования,

символ $\int$ – знак интеграла.

По определению и теореме 1

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$, C – произвольная постоянная.

Нахождение первообразной для функции $f(x)$ называется ***интегрированием функции*** $f(x)$.

ТЕОРЕМА 2 (достаточное условие интегрируемости).

Если функция непрерывна на некотором промежутке, то она имеет на этом промежутке первообразную.

Замечание.

Производная от элементарной функции всегда является функцией элементарной.

Первообразная от элементарной функции может не быть функцией элементарной.

Интегралы от таких функций называются ***неберущимися***.

Неберущимися являются, например, интегралы

$$\int e^{-x^2}dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}dx, \quad \int \frac{e^x}{x}dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}.$$

СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

Замечание.

Правильность интегрирования всегда можно проверить: достаточно продифференцировать результат. При этом должна получиться подынтегральная функция.

2. $\int F'(x)dx = F(x) + C$.

Замечание.

Имеем: $F'(x) \cdot dx = dF(x)$.

$\Rightarrow$ свойство 2 можно записать в виде

$$\int d(F(x)) = F(x) + C.$$

3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int \big(f(x) \pm \varphi(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

4. Постоянный множитель k $(k \neq 0)$ можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

§2. Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Суть метода: с помощью простых преобразований (выполнение каких-либо арифметических действий, применение стандартных формул алгебры и геометрии и т.д.) подинтегральная функция записывается в виде суммы функций, первообразные для которых известны (говорят: «записывается в виде суммы табличных интегралов»).

Таблица интегралов

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

1(a). $\int dx = x + C$

1(b). $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

4. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

7. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

7(a). $\int e^x\,dx = e^x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C$

8(a). $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctg\,x + C \\ -arcctg\,x + C \end{cases}$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

9(a). $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

10. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

11. $\int shx\,dx = chx + C$

12. $\int chx\,dx = shx + C$

13. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C$

14. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

15. $\int tgx\,dx = -\ln|\cos x| + C$

16. $\int ctgx\,dx = \ln|\sin x| + C$

17. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + C$

18. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

Пример.

$$\int\left(\frac{1}{x^2}-\sin x+\sqrt{x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=$$

$$=\int x^{-2}dx-\int\sin x dx+\int x^{1/2}dx-\int\frac{1}{x}dx-\int x^{-1/3}dx=$$

$$=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-(-\cos x)+\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}-\ln x-\frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1}=$$

$$=-x^{-1}\quad+\cos x+\quad\frac{2x^{3/2}}{3}-\ln x-\frac{3x^{2/3}}{2}+C$$

Пример. $$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx = \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \int 1dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = x - arctgx + C$$

Проверка

$F(x) = x - arctgx + C$ $\qquad F'(x) = f(x)$ – подынтегральная функция

$$F'(x) = (x - arctgx + C)' = 1 - \frac{1}{1+x^2} + 0 = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

2. Замена переменной (метод подстановки)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция $y = f(x)$ называется* ***непрерывно дифференцируемой*** *на промежутке $X \subseteq \mathbb{R}$, если $f(x)$ дифференцируема на X, причем ее производная $f'(x)$ – непрерывна на X.*

ТЕОРЕМА 3 (о замене переменной под знаком интеграла).

Пусть $\varphi: T \to X$ и $x = \varphi(t)$ – непрерывно дифференцируема на T,

$f : X \to Y$ и $y = f(x)$ *непрерывна на X.*

Тогда функции $f(x)$ и *$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ интегрируемы на X и T соответственно, причем, если*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

3. Внесение функции под знак дифференциала – частный случай подстановки

СЛЕДСТВИЕ 4 теоремы 3 (об инвариантности формул интегрирования).

Любая формула интегрирования остается справедливой, если везде заменить переменную на непрерывно дифференцируемую функцию, т.е. если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

где $u = \varphi(x)$ *– любая непрерывно дифференцируемая функция*

Например, так как $\int \cos x dx = \sin x + C$,

то

$$\int \cos(x^2+1)d(x^2+1) = \sin(x^2+1) + C,$$

$$\int \cos e^x d(e^x) = \sin e^x + C$$

$$\int f(x)dx = \int f(z)dz$$

Пример. $\int \sin x d\sin x = \left| \; \sin x = z \; \right| = \int zdz = \frac{z^2}{2} + C = \frac{(\sin x)^2}{2} + C$

Пример. $\int \frac{d(\ln x)}{(\ln x)} = \quad \ln|\ln x| + C$

Пример. $\int \frac{\sin xdx}{\cos x} = \left| \begin{array}{l} \textit{заметим} \quad \sin xdx = d(-\cos x) \\ \textit{т.к.} \;\; \underline{d(-\cos x) = (-\cos x)'dx} = \sin xdx \end{array} \right|$

Выразим dx: $\quad \frac{d(-\cos x)}{(-\cos x)'} = dx$

$$= \int \frac{\sin xd\boxed{\cos x}}{\cos x \cdot (\boxed{\cos x})'} = \int \frac{\sin xd\cos x}{\cos x \cdot (-\sin x)} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

Пример. $\int \sin(2x+1)dx = \int \frac{\sin(2x+1)d(\boxed{2x+1})}{(\boxed{2x+1})'} =$

$$= \int \frac{\sin(2x+1)d(2x+1)}{2} = -\frac{\cos(2x+1)}{2} + C$$

Пример. $\int \frac{dx}{1-x} = \int \frac{d\boxed{(1-x)}}{(1-x)\boxed{(1-x)}'} = \int \frac{d(1-x)}{(1-x)(-1)} = -\ln(1-x) + C$

Пример. $\int \frac{tg3x}{\cos^2 3x}dx = \int \frac{tg3x}{\cos^2 3x}\frac{d\boxed{(tg3x)}}{\boxed{(tg3x)}'} = \int \frac{tg3x}{\cos^2 3x}\frac{d(tg3x)}{\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3} =$

$$= \frac{1}{3}\int tg3x\,d(tg3x) = \frac{1}{3}\frac{(tg3x)^2}{2} + C$$

Пример. $$\int \frac{e^x dx}{e^x+1} = \left| \begin{array}{l} e^x+1=z \\ e^x=z-1 \\ x=\ln(z-1) \\ dx=\dfrac{dz}{z-1} \end{array} \right| = \int \frac{(z-1)}{z}\,\frac{dz}{z-1} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z|+C =$$

$$=\ln|e^x+1|+C$$

Пример. $$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt{x^3}}dx = \int \frac{x^{1/2}}{x^{4/3}+x^{3/2}}dx = \left| \begin{array}{l} x=z^6 \\ dx=6z^5dz \end{array} \right|$$

$$=\int \frac{(z^6)^{1/2}}{(z^6)^{4/3}+(z^6)^{3/2}}6z^5dz = 6\int \frac{z^3}{z^8+z^9}z^5dz = 6\int \frac{z^8}{z^8(1+z)}dz =$$

$$=6\int \frac{dz}{1+z} = 6\int \frac{d(z+1)}{1+z} = 6\ln|z+1|+C$$

4. Интегрирование по частям

ТЕОРЕМА 5.

Пусть функции $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на* $X \subseteq \mathbb{R}$. *Тогда на* X *существуют интегралы*

$$\int u dv \qquad \text{и} \qquad \int v du$$

и справедливо равенство

$$\int u dv = uv - \int v du . \qquad (1)$$

Формула (1) называется ***формулой интегрирования по частям***.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\int udv = uv - \int vdu \, .$$

I.

$$\int p_n(x)a^x dx$$

$$\int p_n(x)\cos x dx$$

$$\int p_n(x)\sin x dx$$

$$\int \underbrace{p_n(x)}_{U}\underbrace{e^x dx}_{dV}$$

II.

$$\int \ln x \cdot P_n(x)dx$$

$$\int arctgx \cdot P_n(x)dx$$

$$\int \underbrace{\arcsin x}_{U} \cdot \underbrace{P_n(x)dx}_{dV}$$

III. (циклический)

$$\int a^{mx} \cos nx \, dx$$

$$\int \underbrace{a^{mx}}_{U=a^{mx}} \underbrace{\sin nx \, dx}_{dV}$$

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

Пример.

$$\int \underbrace{(x^2+1)}_{U}\underbrace{\sin 2x dx}_{dV} = \left| \begin{array}{l} U = x^2+1 \quad dU = 2xdx \\ dV = \sin 2xdx \Rightarrow V = \int \sin 2xdx = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{array} \right|$$

$$= (x^2+1)\cdot(-\frac{\cos 2x}{2}) - \int 2x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx =$$

$$= -\frac{(x^2+1)\cos 2x}{2}) + \int \underbrace{x}_{U}\ \underbrace{\cos 2xdx}_{dV} = \left| \begin{array}{l} U = x \quad dU = dx \\ dV = \cos 2xdx \Rightarrow V = \dfrac{\sin 2x}{2} \end{array} \right|$$

$$= -\frac{(x^2+1)\cos 2x}{2}) + x\cdot\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \sin 2xdx =$$

$$= -\frac{(x^2+1)\cos 2x}{2}) + x\cdot\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

§3. Интегрирование рациональных дробей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Рациональной дробью*** *называется отношение* 2-х *многочленов*, т.е. функция вида $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$,

где $P_m(x)$, $P_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно.

Если $m < n$, то рациональная дробь называется ***правильной***. В противном случае (т.е. если $m \geq n$) дробь называется ***неправильной***.

Неправильная рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = Q(x) + \frac{P_r(x)}{P_n(x)},$$

где $Q(x)$ – некоторый многочлен степени $m - n$,

$P_r(x)$ – многочлен степени $r < n$.

(многочлены $Q(x)$ и $P_r(x)$ получаются в результате деления с остатком $P_m(x)$ на $P_n(x)$)

1. Интегрирование простейших рациональных дробей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Простейшими рациональными дробями*** I, II, III, IV *типа называются соответственно правильные дроби вида* $\dfrac{A}{x+a}$, $\dfrac{A}{(x+a)^m}$, $\dfrac{Ax+B}{x^2+bx+c}$, $\dfrac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^m}$,
где $D=b^2-4c<0$, m *– натуральное число* $(m>1)$.

1) Интегрирование простейших дробей I типа:

$$\int \frac{A}{x+a}dx = A\int \frac{dx}{x+a} = A\int \frac{d(x+a)}{x+a} = A\ln|x+a| + C.$$

2) Интегрирование простейших дробей II типа:

$$\int \frac{A}{(x+a)^m}dx = A\int \frac{d(x+a)}{(x+a)^m} = A\frac{(x+a)^{-m+1}}{-m+1} + C.$$

3) Интегрирование простейших дробей III типа:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx$$

$$D=b^2-4c<0$$

а) Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$(x^2+bx)+c=\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2}+\frac{b^2}{4}\right)-\frac{b^2}{4}+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c,$$

$$-\frac{b^2}{4}+c=\frac{-b^2+4c}{4}=-\frac{D}{4}>0,$$

$$\Rightarrow\quad x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+q^2.$$

б) Сделаем замену: $t = x + \dfrac{b}{2}.$

В результате интеграл будет приведен к виду $\displaystyle\int \frac{At + M}{t^2 + q^2}\,dt.$

в) Представим получившийся интеграл в виде суммы 2-х интегралов:
$$\int \frac{At + M}{t^2 + q^2}\,dt = \int \frac{At}{t^2 + q^2}\,dt + \int \frac{M}{t^2 + q^2}\,dt.$$

В первом – внесем под знак дифференциала знаменатель,
$$\int \frac{At}{t^2 + q^2}\,dt = A\int \frac{t}{t^2 + q^2} \cdot \frac{d(t^2 + q^2)}{2t} = \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2 + q^2)}{t^2 + q^2} =$$
$$= \frac{A}{2}\ln(t^2 + q^2) + C;$$

Второй интеграл – табличный:
$$\int \frac{M}{t^2 + q^2}\,dt = \frac{M}{q}\operatorname{arctg}\frac{t}{q} + C.$$

г) Вернемся к исходной переменной x.

4) Интегрирование простейших дробей IV типа:

а) Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2+bx+c=\left(x+b/2\right)^2+q^2.$$

б) Сделаем замену: $t=x+b/2$

В результате интеграл будет приведен к виду $\displaystyle\int\frac{At+M}{(t^2+q^2)^m}dt$.

в) Представим получившийся интеграл в виде суммы 2-х интегралов:

$$\int\frac{At+M}{(t^2+q^2)^m}dt=A\int\frac{tdt}{(t^2+q^2)^m}+M\int\frac{dt}{(t^2+q^2)^m}.$$

Первый из этих интегралов найдем, внеся t^2+q^2 под знак дифференциала:

$$\int\frac{tdt}{(t^2+q^2)^m}=\int\frac{t}{(t^2+q^2)^m}\cdot\frac{d(t^2+q^2)}{2t}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+q^2)}{(t^2+q^2)^m}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(t^2+q^2)^{-m+1}}{-m+1}+C.$$

Для интеграла $J_m = \int \frac{dt}{(t^2+q^2)^m}$ справедлива рекуррентная формула:

$$J_m = -\frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{2(1-m)} \cdot \frac{t}{(t^2+q^2)^{m-1}} + \frac{3-2m}{2q^2(1-m)} J_{m-1}, \quad (1)$$

где $J_{m-1} = \int \frac{dt}{(t^2+q^2)^{m-1}}$.

Применив формулу (1) последовательно (m – 1) интеграл J_m сведется к табличному интегралу

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+q^2} = \frac{1}{q} \operatorname{arctg} \frac{t}{q} + C$$

г) Вернемся к исходной переменной x .

2. Интегрирование правильных рациональных дробей

Пусть $\dfrac{P_r(x)}{P_n(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Запишем $P_\text{n}(x)$ в виде произведения линейных и квадратичных множителей:

$$P_n(x) = \alpha(x-a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_i)^{k_i} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+b_sx+c_s)^{t_s}, \quad (2)$$

где $D_j = b_j^2 - 4c_j < 0, \quad j = 1,2,\ldots,s$

ТЕОРЕМА 1.

Любая правильная рациональная дробь единственным образом представима в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей.

При этом между слагаемыми этой суммы и множителями в разложении (2) *имеет место следующее соответствие:*

1) *каждому множителю вида* $(x-a)^k$ *соответствует сумма из* k *простейших дробей вида*

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *– некоторые числа;*

2) *каждому множителю вида* $(x^2+bx+c)^t$ *соответствует сумма из* t *простейших дробей вида*

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{B_tx+C_t}{(x^2+bx+c)^t}$$

где $B_1, B_2, \ldots, B_t, C_1, C_2, \ldots, C_t$ *– некоторые числа.*

ПРИМЕРЫ.

$$1)\quad \frac{x^3+2x-1}{(x-2)\cdot(x+1)^3}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{(x+1)^2}+\frac{A_4}{(x+1)^3};$$

$$2)\quad \frac{x+1}{x^2(x^2-2x+1)}=\frac{x+1}{x^2(x-1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{A_4}{(x-1)^2};$$

$$3)\quad \frac{x+1}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2};$$

$$4)\quad \frac{x^4+1}{(x+2)(x^2+x+3)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+x+3}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+x+3)^2}.$$

Разложение конкретной правильной рациональной дроби в сумму простейших обычно производят ***методом неопределенных коэффициентов***, который представляет собой следующую последовательность действий:

1) записываем знаменатель $P_{\mathrm{n}}(x)$ в виде произведения линейных и неразложимых квадратичных множителей;
2) записываем разложение дроби в сумму простейших с неопределенными коэффициентами в числителях (по теореме 1);
3) складываем простейшие дроби и приравниваем многочлен $Q_{\mathrm{r}}(x)$, получившийся в числителе, числителю исходной дроби $P_{\mathrm{r}}(x)$;
4) из равенства $Q_{\mathrm{r}}(x) = P_{\mathrm{r}}(x)$, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов $Q_{\mathrm{r}}(x)$ и $P_{\mathrm{r}}(x)$, получим систему r линейных уравнений для нахождения r неизвестных коэффициентов.

Замечание.

1) Систему для нахождения неизвестных коэффициентов можно получить из равенства $Q_r(x) = P_r(x)$ и другим способом.

   А именно, придавая x r конкретных значений, получим из равенства $Q_r(x) = P_r(x)$ r уравнений, связывающие неизвестные коэффициенты.

   Такой метод получения системы уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов называется ***методом частных значений***.

2) Разлагать правильную рациональную дробь в сумму простейших **не следует**, если есть более простой способ найти интеграл.

   Например, в интеграле $\int \frac{x^2 dx}{x^3 - 4}$

   лучше внести под знак дифференциала знаменатель.

   В интеграле $\int \frac{x dx}{x^4 + x^2 + 1}$

   лучше предварительно сделать замену переменной $x^2 = t$.

План интегрирования рациональной дроби

1. Выделить целую часть (сделать дробь правильной)
2. Разложить знаменатель на множители.
3. Записать дробь в виде суммы простейших дробей.
4. Определить коэффициенты.
5. Проинтегрировать.

§4. Интегрирование тригонометрических выражений

1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ (над синусом и косинусом проведены только рациональные операции – сложение, вычитание, умножение и деление)

Универсальная тригонометрическая подстановка:

$$\boxed{tg(x/2) = t.}$$

Выразим x и получим $x = 2arctgt$ => $\boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}} \quad \boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

Интеграл принимает вид:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_1(t)dt$$

Сводится к вычислению интеграла от рациональной функции.

В ряде случаев существуют и более простые методы.

2. $\int R(\sin x, \cos x)dx$

а) подынтегральная функция нечетна относительно синуса

$$\int R(-\sin x, \cos x)dx = -\int R(\sin x, \cos x)dx$$

Рекомендуемая подстановка:

$\cos x = t$

б) подынтегральная функция нечетна относительно косинуса

$$\int R(\sin x, -\cos x)dx = -\int R(\sin x, \cos x)dx$$

Рекомендуемая подстановка:

$\sin x = t.$

в) подынтегральная функция четная относительно синуса и косинуса

$$\int R(-\sin x, -\cos x)dx = \int R(\sin x, \cos x)dx$$

Рекомендуемая подстановка:

$$tgx = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

3. Интегралы вида $\int R(tgx, \cos^2 x, \sin^2 x)dx$

$$\int R(ctgx, \cos^2 x, \sin^2 x)dx$$

Рекомендуемая подстановка:

$$tgx = t \quad => \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2};\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$ctgx = t \; => dx = -\frac{dt}{1+t^2} \qquad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2};\ \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

4. $\int \sin kx \cos mx dx, \quad \int \cos kx \cos mx dx, \quad \int \sin kx \sin mx dx$

Следует использовать формулы:

$$\sin k\,x \cdot \cos l\,x = \frac{1}{2}\left[\sin(k-l)\,x + \sin(k+l)\,x\right]$$

$$\sin k\,x \cdot \sin l\,x = \frac{1}{2}\left[\cos(k-l)\,x - \cos(k+l)\,x\right]$$

$$\cos k\,x \cdot \cos l\,x = \frac{1}{2}\left[\cos(k-l)\,x + \cos(k+l)\,x\right]$$

5. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

а) m – нечётное $\Rightarrow$ $t = \cos x$

отделяем $\sin x$: $\sin x dx = -dt$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

б) n – нечётное $\Rightarrow$ $t = \sin x$

отделяем $\cos x$: $\cos x dx = dt$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

в) m и n –чётные $\Rightarrow$ понижаем степень

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

§5. Интегрирование иррациональных выражений

$$1.\int R(x,\sqrt{x^2+px+q})dx$$

$$x^2+bx+c=\left(x+b/2\right)^2+q^2$$

Замена: $t=x+b/2$

$$2.\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$$

Рекомендуемая подстановка:

$$x=a\cdot\sin t \quad dx=a\cdot\cos t\,dt$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\cos t$$

$$\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$$

$$x=a\cdot tg\ t \quad dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\frac{a}{\cos t}$$

$$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$$

$$x=\frac{a}{\cos t} \quad dx=a\frac{\sin t\,dt}{\cos^2 t}$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\frac{\sin t}{\cos t}$$

3. $\int R(x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{\chi}, ...)dx$

α, β, γ …– дробные рациональные числа,
s – наименьшее общее кратное чисел α, β, γ …

$$x = t^{s}$$

4. $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\chi}, ...\right)dx$

α, β, γ …– дробные рациональные числа,
s – наименьшее общее кратное чисел α, β, γ…

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^{s}$$

5. Дифференциальный бином

Выражение вида $x^m(a+bx^n)^p$,
где (m,n,p,a,b) – *const*, называется ***дифференциальным биномом***.

Теорема. (Чебышева)

Интегралы $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ $(m,n,p \in Q)$ выражаются в конечном виде через элементарные функции, если оказывается целым одно из чисел:

1) p — Подстановка $x = t^s$ (s – наименьшее общее кратное m и n)

2) $\dfrac{m+1}{n}$ — Подстановка $a+bx^n = t^s$, где s – знаменатель p

3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ — Подстановка $\dfrac{a+bx^n}{x^n} = t^s$, где s – знаменатель p