

I. Найти экстремумы функций:

а) $y = \sqrt{(x^2-1)^2}$

б) $y = \frac{\ln^2 x}{x}$

в) $y = 2x^2 - x^4$

II. Найти наибольшее и наименьшее значения в указанных интервалах:

а) $y = x^3 - 18x^2 + 96x$ $[0; 9]$ б) $y = \frac{(x+2)^2}{x-1}$ $[-4; 0]$

в) $y = \cos 2x + 2x$ $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

III. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \ln(x^2-4)$ б) $y = \frac{2}{x^2-4}$

в) $y = xe^{-x}$

IV. Через данную точку $(1; 4)$ провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей.

V. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 6x + 6 \sin x}{x^5}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{2} + 2 \sin x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x})$

VI. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1. Область определения: $X = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$

2. Вертикальные асимптоты: $x = -1$

3. Горизонтальные асимптоты: —

4. Наклонные асимптоты: $y = \frac{1}{2}x - 1$

5. Стационарные точки: $x = 0$; $x = -3$

6. Точки, где $y' = \infty$: —

7. Интервалы монотонности: —

а) возрастания: $(-\infty; -3)$, $(-1; \infty)$

б) убывания: $(-3; -1)$

8. Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$

б) вогнутости: $(0; \infty)$

9. Значения функции в некоторых точках:

$y(-3) = -3\frac{3}{8}$; $y(-2) = -4$; $y(0) = 0$; $y(2) = \frac{4}{3}$

I. Найти экстремумы функций:

а) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$

б) $y = \sqrt{2x-x^2}$

в) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$

II. Найти наибольшее и наименьшее значения в указанных интервалах:

а) $y = x^3 - 12x + 7$ $[-3; 0]$

б) $y = \operatorname{tg} x - x$ $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$

в) $y = \frac{x^3+16}{x}$ $[1; 4]$

III. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = (x+4)e^{2x}$

б) $y = \frac{x^3-1}{x^{\frac{1}{3}}}$

в) $y = x - \ln(x+1)$

IV. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [(7-2x) \operatorname{tg} x]$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1})$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+e^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{x}}$

V. Найти отношение радиуса цилиндра к его высоте, при котором цилиндр имеет при данном объеме V наименьшую поверхность.

VI. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1. Область определения: $X = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$

2. Вертикальные асимптоты: $x = 1$

3. Горизонтальные асимптоты: $y = 0$

4. Наклонные асимптоты: —

5. Стационарные точки: 0 ; 3

6. Точки, где $y' = \infty$: —

7. Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(0; 1)$, $(1; 3)$

б) убывания: $(-\infty; 0)$, $(3; \infty)$

8. Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-\infty; -\frac{1}{2})$, $(1; 4)$

б) вогнутости: $(-\frac{1}{2}; 1)$, $(4; \infty)$

9. Значения функции в некоторых точках:

$y(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, $y(0) = -1$, $y(\frac{1}{2}) = 0$, $y(\frac{3}{2}) = 0$,
 $y(3) = 2$ $y(4) = 1$

I. Найти экстремумы функций:

а) $y = 3 - 2x^2 - x^4$

б) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

в) $y = e^x + e^{-x}$

II. Найти наибольшее и наименьшее значения в указанных интервалах:

а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ $[-1; 5]$; б) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ $[-2; 0,5]$

в) $y = \sqrt{2x^2 + 1}$ $[-2; 1]$

III. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$

б) $y = e^{3-x}$

в) $y = x^2 e^x$

IV. Найти отношение между радиусом R и высотой H пирамиды, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.

V. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1. Область определения: $X = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$

2. Вертикальные асимптоты: $x = -1$

3. Горизонтальные асимптоты: —

4. Наклонные асимптоты: $y = x - 1$

5. Стационарные точки: $-2; 0; 2$

6. Точки, где $y' = \infty$: 1

7. Интервалы выпуклости и вогнутости:
а) выпуклости: $(-\infty; -1), (0; 1), (1; 2)$;
б) вогнутости: $(-1; 0), (2; \infty)$;

8. Интервалы монотонности:
а) возрастания: $(-\infty; -2), (1; \infty)$
б) убывания: $(-2; -1), (-1; 0), (0; 1)$;

9. Значения функции в некоторых точках:
 $y(-2) = -3,5, y(0) = 0, y(1) = -2, y(2) = 2$;

VI. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

а) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x - \tan x)$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{2x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$

I. Найти экстремумы функций:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^4$

б) $y = x \sqrt[3]{x-1}$

в) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

II. Найти наибольшее и наименьшее значения в указанных интервалах:

а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ $[-3; 0]$; б) $y = \frac{(x+1)^2}{x-1}$ $[-3; 0]$;

в) $y = \arcsin x^2$ $[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$;

III. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \ln(x^2 - 4x + 8)$

б) $y = \frac{x-1}{x^2 - 2x}$

в) $y = (x-1)e^{3x}$

IV. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса R.

V. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1. Область определения: $X = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$;

2. Вертикальные асимптоты: $x = -2, x = 2$;

3. Горизонтальные асимптоты: $y = 0 (x \rightarrow \infty), y = -1 (x \rightarrow -\infty)$;

4. Наклонные асимптоты: —

5. Стационарные точки: $-4; 0; 4$;

6. Точки, где $y' = \infty$: —

7. Интервалы монотонности:
а) возрастания: $(-\infty; -4), (-2; 2), (4; \infty)$;

б) убывания: $(-4; -2), (2; 4)$;

8. Интервалы выпуклости и вогнутости:
а) выпуклости: $(-5; -2), (-2; 0), (5; \infty)$;

б) вогнутости: $(-\infty; -5), (0; 2), (2; 5)$;

9. Значения функции в некоторых точках:
 $y(-5) = 0, y(-4) = -1, y(-2) = 0, y(0) = 0, y(2) = -1, y(4) = -2, y(5) = -1$;

VI. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

а) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x-1})$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x + e^{\frac{1}{x}}}$

в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\tan x}$

I. Найти экстремумы функций:

$$a) y = x - \ln(1+x^2), \quad b) y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}},$$

$$в) y = x \sin x + \cos x - \frac{1}{4}x^2 \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

II. Найти наибольшее и наименьшее значения в указанных

интервалах:

$$a) y = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1-x} \quad (x < 1) \quad (a > 0, b > 0) \quad y = \frac{x-3}{x^2+4} \quad [2, 8],$$

$$в) y = \arctg \frac{1-x}{1+x} \quad [0; 1]$$

III. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = x^3 \ln x, \quad б) y = x - \sqrt{x^2},$$

$$в) y = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$$

IV. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны по 10 см. Определить ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

V. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1. Область определения: $X = (-\infty; \infty)$

2. Вертикальные асимптоты: —

3. Горизонтальные асимптоты: —

4. Наклонные асимптоты: $y = -\frac{1}{2}x$

5. Стационарные точки: $0; 4$

6. Точки, где $y' = \infty$: $-3; 3$

7. Интервалы монотонности:

a) возрастания: $(-3; 0), (3; 4)$

б) убывания: $(-\infty; -3), (0; 3), (4; \infty)$

8. Интервалы выпуклости и вогнутости:

a) выпуклости: $(-\infty; -3), (-3; 3), (3; 5)$

б) вогнутости: $(5; \infty)$

9. Значения функции в некоторых точках: $y(-4)=0, y(-3)=0, y(-2)=0, y(0)=4, y(2)=0, y(3)=-4, y(4)=0, y(5)=0$

VI. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right), \quad б) \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{x}}$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (e^x + e^{-x}) \cos x}{x^4}$$

Найти экстремумы функций:

$$a) y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x, \quad б) y = \frac{x}{1+x^2},$$

$$в) y = x e^{-x}$$

Найти наибольшее и наименьшее значения в указанных интервалах:

$$a) y = x^4 + 4x \quad [-2; 2], \quad б) y = x - \sin x \quad [0; 2\pi],$$

$$в) y = \sqrt{100-x^2} \quad [-6; 8]$$

Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \frac{1}{e^{2x}-1}, \quad б) y = \frac{x^3+16}{x},$$

$$в) y = x^2 - 2 \ln x;$$

Окно имеет форму прямоугольника, заканчивающегося полукругом.

Периметр фигуры равен 15 м. При каком радиусе полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света?

Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1. Область определения: $X = (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$

2. Вертикальные асимптоты: $x = 3;$

3. Горизонтальные асимптоты: $y = 0;$

4. Наклонные асимптоты: —

5. Стационарные точки: $-2; 2; 5;$

6. Точки, где $y' = \infty$: $0;$

7. Интервалы монотонности:

a) возрастания: $(-\infty; -2), (0; 2), (2; 3), (3, 5);$

б) убывания: $(-2; 0), (5; \infty);$

8. Интервалы выпуклости и вогнутости:

a) выпуклости: $(-3; 0), (0; 2), (3; 6);$

б) вогнутости: $(-\infty; -3), (2; 3), (6; \infty);$

9. Значения функции в некоторых точках: $y(-3)=1, y(-2)=2, y(0)=-4, y(2)=1, y(5)=2, y(6)=1;$

Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x^2), \quad б) \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) \frac{e^x}{\ln 2(x-1)},$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{e^{2x} - 1}$$