

ВАРИАНТ 13

I. Найти экстремумы функций:

а) $y = 2x + 3\sqrt{x^2}$, б) $y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$

в) $y = x \ln x$;

II. Найти наибольшее и наименьшее значения в указанных интервалах:

а) $y = 81x - x^4$ $[-1; 4]$, б) $y = \frac{4-x^2}{4+x^2}$ $[-1; 3]$,

в) $y = 2\sin x - \sin 2x$ $[0; \frac{3}{2}\pi]$;

III. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = x^{2/3} \cdot e^{-x}$, б) $y = \frac{1}{e^x - 1}$,

в) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$;

IV. Периметр кругового сектора равен 20 см. Определить радиус так, чтобы площадь сектора была наибольшей.

V. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ctg}(x-a)}{\ln(x-a)}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1})$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

VI. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1. Область определения: $X = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

2. Вертикальные асимптоты: $x = -1$, $x = 1$.

3. Горизонтальные асимптоты: —

4. Наклонные асимптоты: $y = x$ ($x \rightarrow \pm \infty$).

5. Стационарные точки: -2 ; 0 ; 2 ;

6. Точки, где $y' = \infty$: -3 ; 3 ;

7. Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-\infty; -3)$, $(-2; -1)$, $(1; 2)$, $(3; \infty)$.

б) убывания: $(-3; 2)$, $(-1; 1)$, $(2; 3)$.

8. Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(0; 1)$, $(1; 3)$, $(3; \infty)$.

б) вогнутости: $(-\infty; -3)$, $(-3; -1)$, $(-1; 0)$.

9. Значения функции в некоторых точках:

$y(-3) = -1$; $y(-2) = -3$, $y(0) = 0$, $y(2) = 3$, $y(3) = 1$.

ВАРИАНТ 14

I. Найти экстремумы функций:

а) $y = x^2(x-12)^2$, б) $y = \frac{16}{x(4-x^2)}$;

в) $y = \sqrt{x} \ln x$;

II. Найти наибольшее и наименьшее значения в указанных интервалах:

а) $y = x^3 - 3x + 1$ $[0; 2]$, б) $y = \frac{1}{2}x + \cos x$ $[0; \frac{\pi}{2}]$,

в) $y = \frac{x^2}{x^2-4}$ $[-2; 3]$.

III. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = 4x - \frac{x^3}{3}$, б) $y = (\frac{x+1}{x-1})^2$;

в) $y = \ln(2x^2+3)$;

IV. Решеткой длиной 120 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Определить размеры прямоугольной площадки.

V. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{x/(x-1)} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}]$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-\sqrt{1+\cos x}}}{\sin^2 x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + x)^{1/x}$;

VI. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования.

1. Область определения: $X = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

2. Вертикальные асимптоты: $x = -1$.

3. Горизонтальные асимптоты: —

4. Наклонные асимптоты: $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

5. Стационарные точки: -2 ; 2 ; 0 .

6. Точки, где $y' = \infty$: 1 ;

7. Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-2; -1)$, $(1; 2)$

б) убывания: $(-\infty; -2)$, $(-1; 1)$, $(2; \infty)$;

8. Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-\infty; -3)$, $(0; 1)$, $(1; 3)$

б) вогнутости: $(-3; -1)$, $(-1; 0)$, $(3; \infty)$.

9. Значения функции в некоторых точках:

$y(-3) = 1$, $y(-2) = 0$, $y(-1) = 1$, $y(0) = 0$;

$y(1) = -2$, $y(2) = 1$, $y(3) = 0$.

I. Найти экстремумы функций:

а) $y = x^3 + x^2 + 3$, б) $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$,

в) $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

II. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

а) $y = x^3(8-x)$ $[0; 7]$, б) $y = \frac{x-3}{x^2+7}$ $[-3; 2]$,

в) $y = \sin 3x - 3 \sin x$ $[0; \frac{3}{2}\pi]$.

III. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$, б) $y = \frac{x^3-1}{4x^2}$,

в) $y = e^{3x-x^2}$.

IV. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник наибольшей площади. Определить площадь прямоугольника.

V. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin x})$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos x}}{x^2}$,

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}$;

VI. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

- Область определения: $X = (-\infty; \infty)$
- Вертикальные асимптоты: —
- Горизонтальные асимптоты: $y = -1$ ($x \rightarrow \infty$), $y = 0$ ($x \rightarrow -\infty$)
- Наклонные асимптоты: —
- Стационарные точки: $-4; -2; 0; 2; 4$.
- Точки, где $y' = \infty$: $-1; 1$;
- Интервалы монотонности:
 - возрастания: $(-\infty; -4), (-2; -1), (0; 1), (2; 4)$.
 - убывания: $(-4; -2), (-1; 0), (-1; 2), (4; \infty)$
- Интервалы выпуклости и вогнутости:
 - выпуклости: $(-5; -3), (3; 5)$.
 - вогнутости: $(-\infty; -5), (-5; -1), (-1; 1), (1; 3)$.
- Значения функции в некоторых точках:

$y(-5) = \frac{1}{2}, y(4) = 1, y(-3) = 0, y(-2) = -1$
 $y(-1) = 2, y(0) = 1, y(2) = -2, y(3) = -1, y(4) = 0, y(5) = -\frac{1}{2}$.

I. Найти экстремумы функций:

а) $y = x^3 + x^2 - x + 2$, б) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$,

в) $y = \frac{2x}{1+x^2}$;

II. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

а) $y = x^3 \sqrt{(x-1)^2}$ $[-2; 2]$, б) $y = \cos x + \frac{1}{2}x$ $[\frac{\pi}{2}; \pi]$,

в) $y = \frac{x-2}{x^2+5}$ $[2; 8]$;

III. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = e^{2x-x^2}$, б) $y = \ln \frac{x+1}{x+2}$,

в) $y = \frac{x}{(x-1)^2}$;

IV. Во сколько раз объем шара больше объема наибольшего цилиндра, вписанного в этот шар?

V. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\ln 2x - 2x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)^{1+x} - \frac{1}{x}}{x^2}$;

VI. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

- Область определения: $X = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.
- Вертикальные асимптоты: $x = -1, x = 1$.
- Горизонтальные асимптоты: —
- Наклонные асимптоты: $-y = \frac{1}{2}x$.
- Стационарные точки: $-2\frac{1}{2}; 0; 2\frac{1}{2}$;
- Точки, где $y' = \infty$: -4 .
- Интервалы монотонности:
 - возрастания: $(-\infty; -4), (-2\frac{1}{2}; -1), (1; 1), (2\frac{1}{2}; \infty)$.
 - убывания: $(-4; -2\frac{1}{2}), (1; 2\frac{1}{2})$.
- Интервалы выпуклости и вогнутости:
 - выпуклости: $(-1; 0), (4; \infty)$.
 - вогнутости: $(-\infty; -4), (-4; -1), (0; 1), (1; 4)$.
- Значения функции в некоторых точках:

$y(-4) = 0, y(-2\frac{1}{2}) = -2, y(0) = 0, y(2\frac{1}{2}) = 0$
 $y(4) = 1$.

ВАРИАНТ 17

I. Найти экстремумы функций:

а) $y = 14x - x^4$,

б) $y = x e^{-x}$

в) $y = x - \arctg x$

II. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

а) $y = x^3 - 3x + 1$ $[-1; \frac{1}{2}]$,

б) $y = \frac{x+6}{x^2+13}$ $[-5; 5]$

в) $y = \frac{1}{2}x + \cos x$ $[-\frac{3}{2}; -\pi]$

III. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \sqrt{x^3 - 3x}$,

б) $y = \frac{x^3}{x^2-4}$

в) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

IV. Из всех прямоугольников, имеющих периметр, равный 2а, найти тот, площадь которого наибольшая.

V. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$,

б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

VI. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1. Область определения:

$X = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$

2. Вертикальные асимптоты:

$x = 2$

3. Горизонтальные асимптоты:

$y = -\frac{1}{2}x - 1$

4. Наклонные асимптоты:

$-4; 0; 4$

5. Стационарные точки:

-2

6. Точки, где $y' = \infty$:

а) возрастания:

$(-4; -2), (2; 4)$

б) убывания:

$(-\infty; -4), (-2; 2), (4; \infty)$

7. Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости:

$(-\infty; -5), (0; 2), (2; 5)$

б) вогнутости:

$(-5; -2), (-2; 0), (5; \infty)$

8. Значения функции в некоторых точках:

$y(-5) = 0, y(-4) = -2, y(-2) = 4, y(0) = 0$

$y(4) = -1, y(5) = -2$

ВАРИАНТ 18

I. Найти экстремумы функций:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$,

б) $y = x \sqrt{1-x}$

в) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$

II. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

а) $y = x^2 - \frac{5}{3}x^3 + 2$ $[0; 2]$,

б) $y = \frac{x-3}{x^2+16}$ $[-5; 5]$

в) $y = \frac{1}{2}x - \sin x$ $[-\frac{\pi}{2}; 0]$

III. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = x + \frac{1}{x}$,

б) $y = x^3 e^{-x}$

в) $y = \ln \frac{x}{x-1}$

IV. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 м. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

V. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\ln(1+x)})$

VI. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования.

1. Область определения:

$X = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$

2. Вертикальные асимптоты:

$x = 2$

3. Горизонтальные асимптоты:

$y = 1 (x \rightarrow +\infty), y = 0 (x \rightarrow -\infty)$

4. Наклонные асимптоты:

$-1; 1; 4$

5. Стационарные точки:

0

6. Точки, где $y' = \infty$:

а) возрастания:

$(-1; 0), (1; 2), (2; 4)$

б) убывания:

$(-\infty; -1), (0; 1), (4; \infty)$

7. Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости:

$(-\infty; -2), (2; 5)$

б) вогнутости:

$(-2; 0), (0; 2), (5; \infty)$

8. Значения функции в некоторых точках:

$y(-2) = -\frac{1}{2}$,

$y(-1) = -1, y(0) = 3, y(3) = 1,5$

$y(4) = 2,$

$y(5) = 1,5$