ВАРИАНТ I

I. Найти экстремумы функций:

а) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+1$, б) $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$,

в) $y=x-2\ln x$;

II. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

а) $y=x+\sqrt{x}$ $[0;4]$, б) $y=\frac{x+3}{x^2+7}$ $[-3;7]$,

в) $y=x^4+8x^3+16x^2$ $[-3,1]$;

III. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=\ln(x^2+2x+2)$, б) $y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$,

в) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$;

IV. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

V. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right]$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{x}}{ctg\frac{\pi x}{2}}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}(ctg x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

VI. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1. Область определения: $X=(-\infty;4)\cup(4;\infty)$.
2. Вертикальные асимптоты: $x=4$.
3. Горизонтальные асимптоты: $y=0$ $(x\to+\infty)$
4. Наклонные асимптоты: $y=x$ $(x\to-\infty)$
5. Стационарные точки: $1;\ 2$;
6. Точки, где $y'=\infty$: $-2;\ 0$;
7. Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-\infty;-2),(-2;-1),(0;2),(2;4)$;
   б) убывания: $(-1;0)$, $(4;\infty)$;
8. Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-2;0)$, $(0;2)$;
   б) вогнутости: $(-\infty;-2)$, $(2;4)$, $(4,\infty)$;
9. Значения функции в некоторых точках:
   $y(-2)=0$, $y(-1)=2$, $y(0)=0$, $y(2)=3$, $y(5)=2$;

ВАРИАНТ 2

I. Найти экстремумы функций:

а) $y=\frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}$, б) $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$,

в) $y=\ln x+\frac{1}{x}$;

II. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=x^4-2x^2+3$ $[-3;2]$, б) $y=\frac{x-5}{x^2+11}$ $[-3;7]$,

в) $y=\sqrt{4-x^2}$ $[-2;2]$;

III. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=x+\ln(x^2-4)$, б) $y=\frac{x-1}{x^2-4}$,

в) $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$;

IV. Найти радиус основания и высоту цилиндра с наибольшей боковой поверхностью, который можно вписать в шар радиуса R.

V. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^n\sin\frac{a}{x}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$,

в) $\lim\left[\sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)}-x\right]$;

VI. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования.

1. Область определения: $X=(-2;+\infty)$.
2. Вертикальные асимптоты: $x=-2$.
3. Горизонтальные асимптоты: $y=2$ $(x\to+\infty)$.
4. Наклонные асимптоты: —
5. Стационарные точки: $-1;\ 1$;
6. Точки, где $y'=\infty$: $0;\ 2$;
7. Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-1;0)$, $(1;2)$, $(2;\infty)$.
   б) убывания: $(-2;-1)$, $(0;1)$.
8. Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(2;\infty)$.
   б) вогнутости: $(-2;0)$, $(0;2)$.
9. Значения функции в некоторых точках:
   $y(-1)=-2$, $y(0)=0$; $y(1)=-2$; $y(2)=0$.

ВАРИАНТ 3

I. Найти экстремумы функций:

а) $y = x\sqrt{2-x^2}$, б) $y=\frac{1+\ln x}{x}$;

в) $y=(x-1)^4$;

II. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=x^5-\frac{5}{3}x^3+2$ $[-\frac{1}{2};3]$, б) $y=\frac{x-4}{x^2+9}$ $[-4;6]$

в) $y=\frac{1}{2}x-\sin x$ $[-2\pi;-\frac{3}{2}\pi]$;

III. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=3\sqrt[3]{x^2}-2x$, б) $y=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$,

в) $y=x^3e^x$;

IV. Найти радиус основания и высоту конуса с образующей ℓ, чтобы объем конуса был наибольшим?

V. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^n e^{-x})$, б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\text{ctg}\,x-\frac{1}{x})$;

VI. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования.

1. Область определения: $X=(-\infty;2)\cup(2,\infty)$.
2. Вертикальные асимптоты: $x=2$.
3. Горизонтальные асимптоты: $y=3\ (x\to+\infty)$, $y=0\ (x\to-\infty)$
4. Наклонные асимптоты: —
5. Стационарные точки: $-2;\ 1,\ 3$;
6. Точки, где $y'=\infty$: 0.
7. Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-2,0)$, $(3;\infty)$.
   б) убывания: $(-\infty;-2)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;3)$.
8. Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-\infty;-3)$, $(1;2)$, $(4;\infty)$.
   б) вогнутости: $(-3;0)$, $(0;1)$, $(2;4)$.
9. Значения функции в некоторых точках:
   $y(-3)=-1$, $y(-2)=-2$, $y(0)=3$;
   $y(1)=1$, $y(3)=2$, $y(4)=2{,}5$.

ВАРИАНТ 4

I. Найти экстремумы функций:

а) $y=(1+x)e^x$, б) $y=\frac{4\sqrt{x}}{x+2}$,

в) $y=2x^3-3x^2$;

II. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=3x^4-16x^3+2$ $[-3;1]$, б) $y=\frac{x-2}{x^2+5}$ $[-2;3]$,

в) $y=\frac{1}{2}x-\sin x$ $[\frac{3}{2}\pi;2\pi]$;

III. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=\ln(x^2-2x+2)$, б) $y=x+\frac{2x}{x^2-1}$,

в) $y=x+\frac{1}{x^2}$;

IV. В окружность радиуса r вписан прямоугольник. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы площадь его была наибольшей?

V. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}[\ln x\cdot\ln(x-1)]$, б) $y=\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\text{tg}\,x}$,

VI. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования.

1. Область определения: $X=(-3,0]\cup[0;2)$.
2. Вертикальные асимптоты: $x=-3$, $x=2$.
3. Горизонтальные асимптоты: —
4. Наклонные асимптоты: —
5. Стационарные точки: $-2;-1;\ 1$.
6. Точки, где $y'=\infty$: 0 $(x\to\pm 0)$.
7. Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-3;-2)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$.
   б) убывания: $(-2;-1)$.
8. Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-3;-1\frac{1}{2})$, $(0;1)$.
   б) вогнутости: $(-1\frac{1}{2};0)$, $(1;2)$.
9. Значения функции в некоторых точках: $y(-2)=2$
   $y(-1)=1$, $y(-0)=2$, $y(+0)=0$, $y(1)=1$.

ВАРИАНТ 5

I. Найти экстремумы функций:

а) $y=x^3-6x^2+9x-4$, б) $y=(x+1)e^{-x}$,

в) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^2}$;

II. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

а) $y=x^3-3x+1$ $[\frac{1}{2};2]$, б) $y=\frac{4-x^2}{4+x^2}$ $[-1;3]$,

в) $y=\sqrt{5-4x}$ $[-1;1]$;

III. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=2x-\arcsin x$, б) $y=\ln\frac{x-1}{x+2}$,

в) $y=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$;

IV. Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R .

V. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$,

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$;

VI. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1. Область определения: $X=(-\infty;\infty)$
2. Вертикальные асимптоты: —
3. Горизонтальные асимптоты: $y=0$ $(x\to-\infty)$.
4. Наклонные асимптоты: $y=x-2$ $(x\to\infty)$.
5. Стационарные точки: $-1;\ 1;\ 3$.
6. Точки, где $y'=\infty$: $0;\ 2$.
7. Интервалы монотонности:
   - а) возрастания: $(-\infty;-1)$, $(0;1)$, $(3;\infty)$.
   - б) убывания: $(-1;0)$, $(1;2)$, $(2;3)$
8. Интервалы выпуклости и вогнутости:
   - а) выпуклости: $(-2;0)$, $(0;2)$
   - б) вогнутости: $(-\infty;-2)$, $(2;\infty)$
9. Значения функции в некоторых точках:
   $y(-2)=1$, $y(-1)=2$, $y(0)=0$, $y(1)=4$
   $y(2)=3$, $y(3)=2$

ВАРИАНТ 6

I. Найти экстремумы функций:

а) $y=x^3-6x^2+12x$, б) $y=\frac{x^3}{x^2+3}$,

в) $y=x^3(x+2)^2$;

II. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

а) $y=x^3-12x+7$ $[0;3]$, б) $y=\frac{\ln x}{x}$ $(0;\infty)$,

в) $y=x+\frac{1}{x}$ $[0,01;100]$;

III. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=\sqrt[3]{(x^2-8)^2}$, б) $y=\frac{1-x^3}{x^2}$,

в) $y=\frac{e^x}{x}$;

IV. Найти наибольший объем цилиндра, у которого полная поверхность равна S .

V. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x^3}{\sin^6 2x}$, б) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x)$;

VI. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1. Область определения: $X=(-\infty;\infty)$
2. Вертикальные асимптоты: —
3. Горизонтальные асимптоты: —
4. Наклонные асимптоты: $y=x$ $(x\to\pm\infty)$
5. Стационарные точки: $-2;\ 2;\ 3$;
6. Точки, где $y'=\infty$: 0 ;
7. Интервалы монотонности:
   - а) возрастания: $(-2;0)$, $(2;3)$;
   - б) убывания: $(-\infty;-2)$, $(0;2)$, $(3;\infty)$;
8. Интервалы выпуклости и вогнутости:
   - а) выпуклости: $(2\frac{1}{2};3\frac{1}{2})$;
   - б) вогнутости: $(-\infty;0)$, $(0;2\frac{1}{2})$, $(3\frac{1}{2};\infty)$;
9. Значения функции в некоторых точках: $y(-2)=3$,
   $y(0)=5$, $y(2)=-3$, $y(3)=-1$; $y(5)=-4,5$;