ВАРИАНТ 21

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 15 & -4 \\ 4 & 7 & 11 & 3 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & -4 & -5 & -9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & 15 & 17 \\ -2 & -2 & 4 \\ 9 & 17 & 19 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-2\mathbf{A} + 6\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -2. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&1&1\\2&4&1\\0&1&4\end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&0&2&0\\0&-1&0&4\\1&0&0&0\\0&-3&0&6\end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\bar{\mathbf{e}}_1=\{1;0;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_2=\{0;1;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3=\{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{x}}$:

$\bar{\mathbf{a}}_1=\{2;3;1\}$, $\bar{\mathbf{a}}_2=\{3;2;-1\}$, $\bar{\mathbf{a}}_3=\{-4;5;1\}$, $\bar{\mathbf{x}}=\{-4;22;2\}$.

а) доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ и $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 21

1. а) 18; б) 45; в) 216.

2. а) $\begin{pmatrix}46&86&96\\-14&-14&28\\48&92&108\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-43&-54&37\\-20&-35&-27\\-42&-44&78\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}13&9&-7\\-9&-6&5\\2&1&-1\end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix}0.6&1.2\\0.6&0.2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-9&-3&-4\\17&5&11\\-6&-2&-4\end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix}16&-21&12\\-15&34&9\\-12&27&19\end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} -9 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. **6.** а) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 22/3 \end{pmatrix}$. **8.** а) $X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} (2+x_5) \\ (1+3x_3-3x_4+5x_5) \\ 3x_3 \\ 3x_4 \\ 3x_5 \end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

9. а) Общее решение: $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{3}{2}x_1-2x_4-4x_5 \\ x_4+3x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$,

ФСР: $x_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_3=\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_{1,2}=3, x=\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3=6,\ x=\beta\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

б) $\lambda_1=1,\ x=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_2=2,\ x=\beta\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\lambda_3=-2,\ x=\gamma\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\lambda_4=3,\ x=\delta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **11.** в) $\overline{\mathrm{x}}=\{1;2;3\}$

ВАРИАНТ 22

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 2 & 11 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} -2 & -4 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \\ 8 & 12 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $5\mathbf{A} - 4\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 19 & 10 \\ 0 & -2 & 5 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 2x^2 + x - 4$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_4 = -5, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -4, \\ 2x_1 - x_2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ -4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0, \\ -x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 0, \\ -5x_1 + 16x_2 + 4x_3 - 14x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3\\ -1 & -2 & -3\\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1=\{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2=\{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3=\{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1=\{2;-1;1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2=\{3;1;2\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3=\{1;0;-1\}$, $\overline{\mathbf{x}}=\{3;2;-1\}$

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 22

1. а) 16; б) 9; в) 2.

2. а) $\begin{pmatrix} -3 & 6 & 11\\ 11 & 3 & 6\\ 6 & 11 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 5 & -5\\ -2 & -4 & 7\\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 0 & 2\\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 5\\ 1 & 2 & -5\\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} -3 & -21 & 35\\ 40 & 1 & 58\\ -3 & -36 & 49 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 56 & -56 & 0 & 56 \\ 69 & -69 & 0 & 69 \\ 17 & -17 & 0 & 17 \end{pmatrix}$. **6.** а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

8. а) $X=\begin{pmatrix} 0 \\ 4-2x_4 \\ 3-2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

9. а) $X=\begin{pmatrix} 2x_4 \\ 2x_4 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

10. а) $\lambda_{1,2} = 3,\ x = \alpha\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \lambda_3 = 6,\ x = \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

б) $\lambda_1 = 1,\ x = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix};\ \lambda_2 = 2,\ x = \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

$\lambda_3 = -3,\ x = \gamma\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \lambda_4 = -6,\ x = \delta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

11. в) $\overline{\mathrm{x}}=\{-1;1;2\}$.

ВАРИАНТ 23

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -10 & 3 & 4 & 14 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & -1 & 12 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 8 \\ 0 & 4 & 6 \\ 11 & 15 & 14 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $5\mathbf{A} - \mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 2x^2 + 2x - 5$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 4. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_3 = -4, \\ x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = -2, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 = 5, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 = -3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = 7, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 26x_2 - 9x_3 - 12x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{1;3;2\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{2;2;-1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{-3;-4;0\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{-7;-4;7\}$.

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 23

1. а) – 3; б) – 114; в) – 100.

2. а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 9 & -10 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -21 & 27 & -10 \\ -2 & 24 & 2 \\ -8 & 31 & -3 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 8 & 5 & -6 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 13 & 10 & 10 \\ 24 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 20 \\ -9 & -18 \\ 33 & 12 \end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

8. а) $X=\begin{pmatrix} \frac{1}{8}(-4+19x_3-3x_4) \\ \frac{1}{8}(4+7x_3-25x_4) \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

9. а) $X=\begin{pmatrix} \frac{1}{23}x_4 \\ \frac{17}{23}x_4 \\ \frac{19}{23}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ 19 \\ 23 \end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_{1,2,3}=0,\ x=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

б) $\lambda_1=1,\ x=\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2=-1,\ x=\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\lambda_3=2,\ x=\gamma\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_4=3,\ x=\delta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11. в) $\overline{\mathrm{x}}=\{2;-3;1\}$.

ВАРИАНТ 24

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 11 & -4 \\ 1 & 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 9 \\ 1 & 12 & 18 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-3\mathbf{A} + 4\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 1{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^3 + 2x + 3$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 19, \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 30, \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14, \\ -x_1 + x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 15x_1 - 10x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 - 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1=\{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2=\{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3=\{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1=\{2;1;3\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2=\{1;-2;1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3=\{-1;2;1\}$, $\overline{\mathbf{x}}=\{5;-5;10\}$.

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 24

1. а) – 36; б) – 18; в) 12.

2. а) $\begin{pmatrix} 5 & 14 & 0 \\ 11 & 9 & 36 \\ -14 & 45 & 72 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -19 & 33 & 85 \\ -46 & -4 & 34 \\ -128 & -44 & 23 \end{pmatrix}$; в) $-\dfrac{1}{108}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -20 \\ 0 & -24 & 12 \\ -27 & 11 & -1 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 9 \\ 0 & -6 & -18 \\ 0 & 6 & 15 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix}-6 & -1 & -2 & -14\\ -8 & 14 & -18 & 12\\ 6 & -7 & 10 & -2\end{pmatrix}$. **6.** а) $\begin{pmatrix}5\\ 4\\ -2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

8. а) $X=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix}-3+2x_2-x_4\\ x_2\\ -\frac{1}{2}(10-5x_2+3x_4)\\ x_4\end{pmatrix}$.

9. а) $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{18}(12x_2+x_4)\\ x_2\\ -\frac{5}{6}x_4\\ x_4\end{pmatrix}$, ФСР: $x_1=\begin{pmatrix}2/3\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix}1/18\\ 0\\ -5/6\\ 1\end{pmatrix}$;

б) $X=\begin{pmatrix}x_1\\ 13x_4-x_5+2x_1\\ 5x_4+x_5\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}$, ФСР: $x_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix}0\\ 13\\ 5\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $x_3=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_1=1,\ x=\alpha\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$; $\lambda_2=-2,\ x=\beta\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$; $\lambda_3=4,\ x=\gamma\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$

б) $\lambda_{1,2}=0,\ x=\alpha\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$; $\lambda_{3,4}=2,\ x=\beta\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

11. в) $\overline{\mathrm{x}}=\{1;5;2\}$.

ВАРИАНТ 25

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \\ 15 & 2 & -3 & -4 \\ 11 & 7 & 7 & 3 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-(\mathbf{A} + 2\mathbf{B})$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 2x^2 - x - 2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -5x_2 + x_3 = 7, \\ -x_1 + 7x_2 + x_4 = -4, \\ x_1 + x_4 = -1, \\ x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 2. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 5x_5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1=\{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2=\{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3=\{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1=\{1;2;1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2=\{1;1;1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3=\{1;2;3\}$, $\overline{\mathbf{x}}=\{1;1;2\}$

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 25

1. а) 12; б) – 30; в) – 12.

2. а) $\begin{pmatrix} -6 & 0 & -11 \\ 1 & -3 & 6 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -6 & 16 & 3 \\ 1 & -8 & 4 \\ 14 & 16 & 14 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -2 & -8 & -1 \\ -3 & -12 & 2 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 7 \\ 19 & 1 & 8 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -4 \\ 1 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. а) $X=\begin{pmatrix} 6-26x_3+17x_4 \\ -1+7x_3-5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$; б) несовместная.

9. а) Общее решение $X=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-x_3-3x_4+x_5) \\ \frac{1}{2}(x_3+5x_4-3x_5) \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$,

ФСР: $x_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ -x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_1=-1, x=\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_2=2, x=\beta\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \lambda_3=5, x=\gamma\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

б) $\lambda_{1,2,3,4}=3,\ x=\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

11. в) $\overline{\mathrm{x}}=\{0;\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\}$.