ВАРИАНТ 6

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 12 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-5\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -6 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 0 & -33 & 27 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -4, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3, \\ 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -8. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -1, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_6 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 - 3x_3 - x_4 + x_5 + 4x_6 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1=\{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2=\{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3=\{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$: $\overline{\mathbf{a}}_1=\{2;1;3\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2=\{1;-4;-6\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3=\{1;-2;2\}$, $\overline{\mathbf{x}}=\{-8;5;45\}$

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 6

1. а) 41; б) –2; в) 12.

2. а) $\begin{pmatrix} 11 & -20 & -32 \\ -3 & -7 & -28 \\ -14 & 13 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -26 & 5 & 2 \\ -31 & 20 & 11 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 14 & -10 & 18 \\ 8 & -6 & 8 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;

3. а) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 7 \\ 9 & 8 & 16 \\ 6 & 5 & 18 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

8. а) $X = \begin{pmatrix} 30 + 71x_4 \\ -7 - 15x_4 \\ -14 - 32x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$; б) $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}[2 + x_5] \\ \frac{1}{6}[1 + 3x_3 - 3x_4 + 3x_5] \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$.

9. а) Общее решение Х=$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

б) Х=$\begin{pmatrix} -2x_4 + 5x_6 \\ x_4 - x_6 \\ x_4 - 2x_6 \\ x_4 \\ 0 \\ x_6 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_{1,2,3} = -1, x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; б) $\lambda_{1,2,3,4} = 3,\ x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

11. в) $\overline{\text{x}}$={-5;-7;9}.

ВАРИАНТ 7

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 8 & 5 & -13 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \\ 2 & 4 & -1 & 12 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 11 \\ 7 & 12 & 20 \\ 6 & 7 & 16 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $4\mathbf{A} - \mathbf{B}$,
б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,
в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 + x - 1$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -11, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 11x_4 = 6. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 - 3x_6 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_6 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{2;1;6\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{-4;0;1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{5;-3;1\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{21;-18;30\}$.

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 7

1. а) 81; б) 2; в) −100.

2. а) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & -7 \\ 5 & -8 & -12 \\ -6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -9 & 1 & -9 \\ -19 & 9 & -6 \\ -8 & 10 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -9 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 14 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

8. а) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 13x_4 \\ 1+5x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$; б)система несовместна.

9. а) Общее решение X=$\begin{pmatrix} -x_4 \\ 4x_4 \\ -3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

б) X=$\begin{pmatrix} x_6 \\ 0 \\ x_5 + x_6 \\ -x_5 - x_6 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_1 = 1,\ x = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 7,\ x = \beta\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = -7,\ x = \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

б) $\lambda_{1,2} = 1,\ x = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_{3,4} = -1,\ x = \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

11. в) $\overline{\mathrm{x}} = \{3;5;7\}$.

ВАРИАНТ 8

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $\mathbf{A} - 4\mathbf{B}$,
б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,
в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 2, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{2;1;2\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{-1;1;-1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{1;-1;3\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{4;2;6\}$.

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 8

1. а) 1; б) –52; в) 12.

2. а) $\begin{pmatrix} -8 & 2 & -21 \\ -15 & 3 & -30 \\ -21 & -2 & -17 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -11 & -17 & 38 \\ -23 & -26 & 50 \\ -28 & -24 & 37 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & -6 \\ -4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

8. а) $X = \begin{pmatrix} -11x_4 \\ -12x_4 - 3 \\ -9x_4 - 4 \\ x_4 \end{pmatrix}$; б) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

9. а) $X = \begin{pmatrix} 3x_2 + 5x_4 \\ x_2 \\ -2x_2 - 4x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

б) $X = \begin{pmatrix} 5x_2 + 13x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -4x_2 - 10x_3 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_1 = -2,\ x = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_{2,3} = 1,\ x = \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix}$;

б) $\lambda_{1,2,3} = 1,\ x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_4 = -3, x = \delta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

11. в) $\overline{\mathrm{x}} = \{2;1;1\}$.

ВАРИАНТ 9

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$,
б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,
в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 11 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 + 2x - 5$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -5, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} 25x_1 + 31x_2 + 17x_3 + 43x_4 = 0, \\ 75x_1 + 94x_2 + 53x_3 + 132x_4 = 0, \\ 75x_1 + 94x_2 + 54x_3 + 134x_4 = 0, \\ 25x_1 + 32x_2 + 20x_3 + 43x_4 = 0, \\ 50x_1 + 63x_2 + 36x_3 + 89x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\bar{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{x}}$:

$\bar{\mathbf{a}}_1 = \{1;2;1\}$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = \{-2;1;-3\}$, $\bar{\mathbf{a}}_3 = \{1;-1;2\}$, $\bar{\mathbf{x}} = \{7;-2;11\}$.

а) доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ и $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 9

1. а) – 49; б) 100; в) – 4

2. а) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & -11 & 4 \\ 5 & -7 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -11 & -6 \\ -1 & -14 & 42 \\ -5 & 28 & 12 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 7 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 3 & -13 & 13 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 56 & 0 & 0 \\ 73 & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{20}\cdot\begin{pmatrix}17\\1\\15\end{pmatrix}$.

8. а) $X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix}-17x_3+29x_4+5\\10x_3-17x_4-2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$.

9. а) X=$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, б) X=$\begin{pmatrix}-x_2-x_4\\x_2\\-x_2-2x_4\\x_4\end{pmatrix}$, ФСР: $x_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $x_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_{1,2}=-1,\ x=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

б) $\lambda_{1,2}=1,\ x=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$;

$\lambda_3=-1,\ x=\gamma\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\lambda_4=3,\ x=\delta\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

11. в) $\overline{x}=\{1;-2;2\}$.

ВАРИАНТ 10

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 11 \\ 7 & -5 & 0 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $5\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 - 3x + 7$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ \quad - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 \quad - x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \quad = 5, \\ x_1 \quad + 3x_3 = 16, \\ \quad 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 8, \\ \quad x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 \quad + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 \quad + 5x_4 = 23; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \quad x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 7 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 13 & 0\end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1=\{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2=\{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3=\{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$: $\overline{\mathbf{a}}_1=\{1;3;2\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2=\{2;-5;7\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3=\{1;3;-1\}$, $\overline{\mathbf{x}}=\{4;1;8\}$.

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 10

1. а) 261; б) 216; в) – 26.

2. а) $\begin{pmatrix}-19 & -13 & -20\\ 7 & -1 & 30\\ -1 & -1 & -3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-18 & -13 & -11\\ 23 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}3 & 1 & -4\\ `-3 & -1 & 5\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

3. а) $\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}2 & 7\\ 21 & 2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix}4 & -17 & 23\\ 24 & 0 & 50\\ -7 & -28 & 40\end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **6.** а) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

8. а) X=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; б) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1+2x_1-x_5 \\ 3-4x_5 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix}$.

9. а) X=$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}$; б) X=$\begin{pmatrix} -11x_4 \\ -12x_4 \\ -9x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} -11 \\ -12 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_1 = 1, x = \alpha\begin{pmatrix} 59 \\ -3 \\ 20 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 2, x = \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_3 = -2, x = \gamma\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

б) $\lambda_{1,2,3} = 2,\ x = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \lambda_4 = -2,\ x = \delta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11. в) $\overline{x} = \{1;1;1\}$