

Домашние задания по теме: «Линейная алгебра»

1. «Матрицы и действия над ними»

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти $2A + 5B$, $3A - 2B$, $-4A - B$.

2) Произвести все возможные операции сложения и умножения матриц.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = (-2 \ 1 \ 0), C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: 2 сложения, 6 умножений.

3) Решить систему матричных уравнений:
$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4) Доказать, что если матрица B перестановочна с матрицей A , то она перестановочна и с матрицей $A - \lambda E$ (где λ – любое отличное от нуля число).

2. «Определители» (часть 1)

1) Вычислить определитель, используя определение
$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Ответ: 14.

Пользуясь только свойствами, вычислить определители

2) $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \delta) \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} (a^x + a^{-x})^2 & (a^x - a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y + b^{-y})^2 & (b^y - b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z + c^{-z})^2 & (c^z - c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$.

Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

5) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

Ответ: 10.

Ответ: 12.

7) Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **Ответ:** -9

3. Определители» (часть 2)

Вычислить определители, получив предварительно нули в какой-либо строке (столбце):

$$1) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

Ответ: 17.

$$2) \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Ответ: -10.

3) Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

4. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений матричным методом и методом Крамера

1) Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

Ответ: $x=1, y=1, z=1$

3) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0 \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0 \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0 \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $x=-3, y=0, z=-1/2, t=2/3. \Delta=-252$

5. Метод Гаусса

Исследовать системы на совместность. Если система совместна, найти её решение методом Гаусса.

$$1) \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0 \end{cases} \quad (\text{единственное решение})$$

$$2) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases} \quad (r(A) = 2)$$

$$3) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases} \quad (\text{система несовместна})$$

6. Системы линейных однородных уравнений

Выяснить, какие системы имеют нетривиальные решения. Если это возможно, найти фундаментальную систему решений.

$$1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \quad (r(A) = 2)$$

$$2) \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \quad (r(A) = 2)$$

$$3) \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{cases} \quad (r(A) = 6)$$